

О плоском струйном обтекании твердого тела идеальной жидкостью

И. М. Рапопорт

Мы указываем ниже метод, который дает возможность посредством простых вычислений построить точное решение задачи о струйном обтекании плоского контура, близкого к заданному. В качестве примера мы рассмотрели задачу об обтекании окружности. В результате мы получили простые формулы, дающие точное решение задачи об обтекании контура, точки которого отклоняются от окружности радиуса R не более, чем на $0,0002 R$, то есть получили точное решение задачи об обтекании контура, практически не отличающегося от окружности. Пример этот свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого метода и дает основания предполагать, что и в других случаях посредством этого метода можно в итоге простых вычислений построить точное решение задачи о струйном обтекании контура, практически не отличающегося от заданного.

§ 1. Рассмотрим сперва случай обтекания разомкнутой дуги со срывом струй в концах этой дуги. Для простоты будем предполагать, что дуга эта имеет ось симметрии, параллельную направлению скорости на бесконечности, и обладает непрерывно вращающейся касательной и непрерывной кривизной. Расположим начало координат x, y в середине дуги и ориентируем координатные оси так, чтобы положительное направление оси x совпадало с направлением скорости на бесконечности. Обозначим через φ угол между касательной к обтекаемой дуге и осью y (рис. 1), через K обозначим кривизну дуги $\frac{d\varphi}{ds}$. Длину дуги s будем отсчитывать от середины дуги, полную длину обтекаемой дуги будем обозначать через $2S$. Функции $\varphi(s)$ и $K(s)$ по предположению непрерывны в интервале $-S < s < S$. Обтекаемую дугу будем ниже обозначать через L . Через L^* будем обозначать дугу

$$Z = K(s) e^{i\varphi(s)}, \quad 0 < s < S, \quad (1)$$

в плоскости комплексного переменного $Z = X + iY$. Пусть $\zeta(z)$ функция, осуществляющая конформное отображение области движения жидкости в плоскости $z = x + iy$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с разрезом вдоль положительной полуоси ξ , при котором начало координат и бесконечно удаленная точка плоскости z переходят соответственно в начало ко-

ординат и бесконечно удаленную точку плоскости ζ , а концы дуги L переходят в точки $\zeta = 1 \pm 0i$. Тогда, как известно,

$$\frac{d\zeta}{dz} = Cv, \quad (2)$$

где $v = v_x - iv_y$ — комплексная скорость, C — вещественная постоянная. Функция $v(\zeta)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\eta > 0$ и удовлетворяет следующим граничным условиям на вещественной оси ξ :

- 1) $\text{Im } v(\zeta) = 0$ при $\xi < 0, \eta = +0,$
- 2) дуга

$$z = \int_0^{\xi} \frac{d\zeta}{Cv(\xi + i0)}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (3)$$

совпадает с половиной дуги L , лежащей в полуплоскости $y > 0$ (см. (2)),

- 3) $|v(\zeta)| = v_\infty$ при $\xi > 1, \eta = +0,$

где v_∞ — значение скорости в бесконечно удаленной точке плоскости z .

Построив функцию $v(\zeta)$, голоморфную в полуплоскости $\eta < 0$, по граничным условиям (3), мы из соотношения (2) найдем функцию $z(\zeta)$ и тем самым установим связь между v и z , исчерпывающую решение задачи.

Второе из граничных условий (3) мы несколько видоизменим. Как видно из рис. 1, на дуге L

$$dz = ds e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = i ds e^{-i\varphi},$$

$$\arg dz = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно уравнение (1) дуги L^* преобразовать к виду

$$Z = Ke^{i\varphi} = \frac{d\varphi}{ds e^{-i\varphi}} =$$

$$= i \frac{d\varphi}{dz} = -i \frac{d(\arg dz)}{dz}. \quad (4)$$

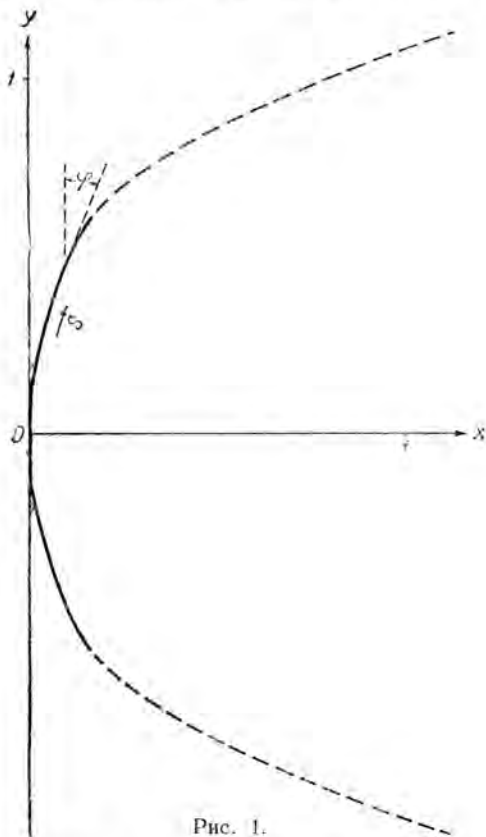


Рис. 1.

С другой стороны, если функция $v(\zeta)$ удовлетворяет второму из условий (3), на дуге L при $y > 0$

$$dz = \frac{d\xi}{Cv(\xi + i0)}, \quad \arg dz = -\arg v(\xi + i0). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), найдем, что дуга

$$Z = iCv(\xi + i0) \frac{d}{d\xi} \arg v(\xi + i0), \quad 0 < \xi < 1, \quad (6)$$

должна совпадать с дугой L^* .

Итак, граничные условия (3) для функции $v(\zeta)$ можно заменить следующими:

- 1) $\operatorname{Im} v(\zeta) = 0$ при $\xi < 0$, $\eta = +0$,
- 2) дуга

$$Z = iCv(\xi + i0) \frac{d}{d\xi} \arg v(\xi + i0), \quad 0 < \xi < 1, \quad (7)$$

совпадет с дугой L^* ,

- 3) $|v(\zeta)| = v_\infty$ при $\xi > 1$, $\eta = +0$.

Будем искать функцию $v(\zeta)$, голоморфную в верхней полуплоскости $\eta > 0$ и удовлетворяющую граничным условиям (7) на вещественной оси ξ , в форме

$$v(\zeta) = \frac{v_\infty \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1+i}} e^{i|\sqrt{\zeta}P(\zeta) - \sqrt{\zeta-1}Q(\zeta)|}, \quad (8)$$

где $P(\zeta)$ — произвольный полином (с вещественными коэффициентами), а $Q(\zeta)$ — полином той же степени, однозначно определяемый по полиному $P(\zeta)$ условием

$$Q(\zeta) - \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} P(\zeta) = 0 \left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty. \quad (9)$$

В формуле (8) условимся для радикалов брать ветви, положительные при $\xi > 1$, $\eta = +0$.

Функция

$$\sqrt{\zeta}P(\zeta) - \sqrt{\zeta-1}Q(\zeta) \quad (10)$$

при $\xi < 0$, $\eta = +0$ приобретает чисто мнимые значения, благодаря чему функция $v(\zeta)$, определяемая формулой (8) удовлетворяет первому из условий (7). В то же время при $\xi > 1$, $\eta = +0$ функция (10) приобретает вещественные значения, благодаря чему при $\xi > 1$

$$|v(\xi + i0)| = v_\infty \left| \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi-1+i}} \right| = v_\infty,$$

то есть удовлетворяется и третье из условий (7).

Далее, при $0 < \xi < 1$

$$v(\xi + i0) = -i v_\infty \frac{\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{\sqrt{1-\xi} Q(\xi) + i\sqrt{\xi} P(\xi)},$$

$$\arg v(\xi + i0) = \sqrt{\xi} P(\xi) - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для того, чтобы выполнялось второе из условий (7), дуга

$$Z = C v_\infty \frac{\frac{1}{2} P(\xi) + \xi P'(\xi)}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{\sqrt{1-\xi} Q(\xi) + i\sqrt{\xi} P(\xi)}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (11)$$

должна совпадать с заданной дугой L^* .

Обозначим через \mathfrak{A} класс дуг, определяемый уравнением (11). Если заданная дуга L^* принадлежит классу \mathfrak{A} , то задача об обтекании соответствующей дуги \tilde{L} будет решена, если в формулу (8) вместо $P(\zeta)$ подставить тот полином, для которого уравнение (11) обращается в уравнение заданной дуги L^* . В общем случае надлежит выбрать из класса \mathfrak{A} дугу \tilde{L}^* , достаточно хорошо аппроксимирующую заданную дугу L^* . Дуге \tilde{L}^* на плоскости Z будет соответствовать на плоскости z дуга \tilde{L} , близкая к заданной дуге L . Подставив в формулу (8) вместо $P(\zeta)$ тот полином, для которого уравнение (11) обращается в уравнение дуги \tilde{L}^* , мы получим точное решение задачи об обтекании дуги \tilde{L} , близкой к заданной дуге L .

Итак, решение задачи об обтекании заданной дуги L со срывом струй в концах этой дуги сводится к аппроксимации дуги L^* , соответствующей заданной дуге L , дугой класса \mathfrak{A} , определяемого уравнением (11). Указанный процесс аппроксимации осуществляется сравнительно просто, так как уравнение (11) содержит лишь элементарные функции.

Коэффициенты полинома $Q(\zeta)$ легко выразить через коэффициенты полинома $P(\zeta)$, разложив функцию $\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}}$ в формуле (9) в ряд по степеням $\frac{1}{\zeta}$. Если

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n \\ Q(\zeta) &= b_0 + b_1 \zeta + \dots + b_n \zeta^n, \end{aligned} \quad (12)$$

то согласно (9)

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 \zeta + \dots + b_n \zeta^n &= \left[1 + \frac{1}{2\zeta} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 \zeta^n} + \dots \right] \times \\ &\times (a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n) + o\left(\frac{1}{\zeta}\right) \text{ при } \zeta \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + \frac{1}{2} a_n \\ &\dots \\ b_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая в (11) $P(\zeta)=Q(\zeta)=0$, найдем $Z=0$. Как видно из (1), в этом случае $K(s) = \frac{d\varphi}{ds} = 0$, $\varphi = \text{const}$. Так как $\varphi = 0$ при $s = 0$ (рис. 1), $\varphi = 0$ при $-S < s < S$ и, таким образом, обтекаемая дуга L в данном случае представляет собой прямолинейный отрезок, лежащий на оси y . Полагая в (8) $P(\zeta)=Q(\zeta)=0$, получим для этого случая известное решение задачи

$$v(\zeta) = \frac{v_\infty \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1+i}}. \quad (14)$$

Полагая в (11) $P(\zeta)=Q(\zeta)=\varphi_0$ (см. (13)), найдем

$$Z = \frac{Cv_\infty \varphi_0}{2(1+\sqrt{1-\xi})} e^{\varphi_0(\sqrt{1-\xi}+i\sqrt{\xi})}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (15)$$

Уравнение (15) дуги L^* можно представить в полярных координатах K, φ (см. (1)) в форме

$$\begin{aligned} K &= |Z| = \frac{Cv_\infty \varphi_0}{2(1+\sqrt{1-\xi})} e^{\varphi_0 \sqrt{1-\xi}} \\ \varphi &= \arg Z = \varphi_0 \sqrt{\xi}, \end{aligned}$$

или

$$K = \frac{Cv_\infty \varphi_0^2}{2(\varphi_0 + \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2})} e^{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0. \quad (16)$$

Дуге L^* , определяемой уравнением (16), соответствует обтекаемая дуга L , уравнение которой будет иметь вид (рис. 1)

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s \sin \varphi ds = \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{K(\varphi)} = A \int_0^\varphi (\varphi_0 + \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}) \sin \varphi e^{-\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi, \\ y &= \int_0^s \cos \varphi ds = \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{K(\varphi)} = A \int_0^\varphi (\varphi_0 + \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}) \cos \varphi e^{-\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi, \end{aligned} \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0, \quad (17)$$

где $A = \frac{2}{Cv_\infty \varphi_0^2}$ — произвольная постоянная.

Полагая в (8) $P(\zeta) = Q(\zeta) = q_0$, получим решение задачи об обтекании дуги (17)

$$v(\zeta) = \frac{v_\infty \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1} + i} e^{-i\varphi_0 (\sqrt{\zeta-1} - \sqrt{\zeta})}, \quad (18)$$

$$z(\zeta) = \frac{1}{Cv_\infty} \int_0^\zeta (\sqrt{\zeta-1} + i) e^{i\varphi_0 (\sqrt{\zeta-1} - \sqrt{\zeta})} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}. \quad (19)$$

(соотношение (2)).

Уравнение линии тока, выходящей из начала координат, согласно (19) будет иметь вид

$$z = \frac{i}{Cv_\infty} \int_0^\xi (1 + \sqrt{1-\xi}) e^{-i\varphi_0 \sqrt{1-\xi} - i\varphi_0 \sqrt{\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

или

$$x = \frac{1}{Cv_\infty} \int_0^\xi (1 + \sqrt{1-\xi}) e^{-\varphi_0 \sqrt{1-\xi}} \sin(\varphi_0 \sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad \text{при } 0 < \xi < 1, \quad (20)$$

$$y = \frac{1}{Cv_\infty} \int_0^\xi (1 + \sqrt{1-\xi}) e^{-\varphi_0 \sqrt{1-\xi}} \cos(\varphi_0 \sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

и

$$z = z_0 + \frac{1}{Cv_\infty} \int_1^\xi (\sqrt{\xi-1} + i) e^{i\varphi_0 (\sqrt{\xi-1} - \sqrt{\xi})} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

или

$$x = x_0 + \frac{1}{Cv_\infty} \int_1^\xi \cos \left[\varphi_0 \sqrt{\xi-1} - \sqrt{\xi} \right] + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\xi}} \Big] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad \text{при } \xi > 1, \quad (21)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{Cv_\infty} \int_1^\xi \sin \left[\varphi_0 (\sqrt{\xi-1} - \sqrt{\xi}) + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

где

$$x_0 = \frac{1}{Cv_\infty} \int_0^1 (1 + \sqrt{1+\xi}) e^{-\varphi_0 \sqrt{1+\xi}} \sin(\varphi_0 \sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}, \quad (22)$$

$$y_0 = \frac{1}{Cv_\infty} \int_0^1 (1 + \sqrt{1+\xi}) e^{-\varphi_0 \sqrt{1+\xi}} \cos(\varphi_0 \sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

координаты точки срыва струй.

Формулы (20) дают уравнение дуги, обтекаемой в полуплоскости $y > 0$ (полагая в (20) $\xi = \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}$, мы получим формулы (17) для $0 < \varphi < \varphi_0$), формулы (21) дают уравнение кривой, ограничивающей область застоя.

На рис. 1 изображена картина обтекания дуги (17), рассчитанная по формулам (17) и (21) для случая $\varphi_0 = 30^\circ$, $A = \frac{2}{Cv_\infty \varphi_0^2} = 1$.

§ 2. В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу об обтекании разомкнутой дуги со срывом струй в концах этой дуги. В этой задаче положение точек срыва струй было заранее известно. Рассмотрим теперь задачу об обтекании замкнутого контура L_0 , имеющего ось симметрии, параллельную направлению скорости на бесконечности, и обладающего непрерывно вращающейся касательной и непрерывной кривизной. В этом случае срыв струй происходит в концах некоторой непредопределенной заранее дуги L контура L_0 , положение точек срыва струй определяется, как известно, следующими двумя условиями (см., например, Н. Villat, *Leçons sur l'hydrodynamique*, Paris, 1929):

а) на обтекаемой дуге L скорость движения жидкости не должна превышать скорости в бесконечно удаленной точке v_∞ , так как в противном случае давление, будучи равным нулю на бесконечности, должно было бы принимать отрицательные значения на дуге L ;

б) линии тока, выходящие из точек срыва струй, должны лежать вне замкнутого контура L_0 .

Так же, как и в § 1, каждой точке заданного контура L_0 в плоскости z поставим в соответствие точку $Z = Ke^{i\varphi}$ в плоскости Z (K — кривизна, φ — угол между касательной к контуру L_0 и осью y). Через L_0^* обозначим образ контура L_0 в плоскости Z , через L^* попрежнему будем обозначать образ дуги контура L_0 , заключенной между точкой ветвления струй и точкой срыва, лежащей в полуплоскости $y > 0$. Так как дуга L^* является дугой замкнутого контура L_0^* , функция $v(\zeta)$, будучи голоморфной в полуплоскости $\eta > 0$, должна согласно (7) удовлетворять следующим условиям на вещественной оси ξ :

$$\left. \begin{aligned} 1) \operatorname{Im} v(\zeta) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0, \quad \eta = +0, \\ 2) \text{ дуга } Z = iCv(\xi + i0) \frac{d}{d\xi} \arg v(\xi + i0), \quad 0 < \xi < 1, \text{ лежит на} \\ \text{контуре } L_0^*, \\ 3) |v(\zeta)| &= v_\infty \quad \text{при} \quad \xi > 1, \quad \eta = +0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Кроме того, должны выполняться сформулированные выше условия а) и б).

Так же, как и в § 1, будем искать функцию $v(\zeta)$ в форме

$$v(\zeta) = \frac{v_\infty \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1} + i} e^{i[V \tau P(\zeta) - \sqrt{\zeta-1} Q(\zeta)]} \quad (24)$$

(см. (8)).

Установим сперва то дополнительное ограничение, которому необходимо подчинить выражение (24) для функции $v(\zeta)$ для того, чтобы

могли выполняться условия а) и б). При $0 < \xi < 1$ формула (24) дает

$$v(\xi + i0) = -i \frac{v_\infty \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{V_{1-\xi} Q(\xi) + iV_\xi P(\xi)}$$

$$|v(\xi + i0)| = \frac{v_\infty \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{V_{1-\xi} Q(\xi)},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} |v(\xi + i0)| &= \frac{v_\infty}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{V_{1-\xi} Q(\xi)} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi(1-\xi)} Q'(\xi) + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{\xi}}{2\sqrt{1-\xi}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1-\xi}} - Q(\xi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Как видим, если $Q(1) > 1$, $\frac{d}{d\xi} |v(\xi + i0)| \rightarrow -\infty$, когда $\xi \rightarrow 1$. В то же время $|v(\xi + i0)| \rightarrow v_\infty$, когда $\xi \rightarrow 1$. Таким образом, если $Q(1) > 1$, в некотором интервале $\xi_0 < \xi < 1$ ($0 < \xi_0 < 1$) будет иметь место неравенство

$$|v(\xi + i0)| > v_\infty,$$

и, следовательно, условие а) выполняться не будет.

Итак, условие а) накладывает на полином $Q(\xi)$ ограничение

$$Q(1) \leq 1. \quad (25)$$

Перейдем теперь к условию б). Согласно 2) уравнение линии тока, выходящей из точки срыва струй в полуплоскости $y > 0$, имеет вид

$$z = z_0 + \int_1^\xi \frac{d\xi}{Cv(\xi + i0)}, \quad \xi > 1, \quad (26)$$

где $z = z_0$ — точка срыва струй. Вычислим кривизну $K = \frac{d\varphi}{ds}$ этой линии тока. Согласно (26) угол φ между касательной к указанной линии тока и осью y равен

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arg dz = \frac{\pi}{2} - \arg \frac{d\xi}{Cv(\xi + i0)} = \frac{\pi}{2} + \arg v(\xi + i0),$$

и

$$ds = |dz| = \frac{d\xi}{C|v(\xi + i0)|},$$

откуда

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = C|v(\xi + i0)| \frac{d}{d\xi} \arg v(\xi + i0), \quad \xi > 1. \quad (27)$$

При $\xi > 1$, $\eta = +0$ формула (24) для функции $v(z)$ дает

$$\begin{aligned} v(\xi + i0) &= \frac{v_\infty \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi-1} + i} e^{i[V_\xi P(\xi) - V_{\xi-1} Q(\xi)]} = \\ &= v_\infty e^{i \left[V_\xi P(\xi) - V_{\xi-1} Q(\xi) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right]} \quad \text{при } \xi > 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), найдем

$$K = C v_{\infty} \frac{d}{d\xi} \left[\sqrt{\xi} P(\xi) - \sqrt{\xi-1} Q(\xi) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right] = \\ = C v_{\infty} \left\{ \frac{P(\xi)}{2\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi} P'(\xi) - \sqrt{\xi-1} Q'(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}} \left[\frac{1}{\xi} - Q(\xi) \right] \right\}, \quad \xi > 1. \quad (29)$$

Формула (29) показывает, что при $Q(1) < 1$ кривизна $K = \frac{d\varphi}{ds}$ линии тока, выходящей из точки срыва струй, стремится к $+\infty$, когда $\xi \rightarrow 1$, то есть при подходе к точке срыва струй. Так как кривизна K обтекаемого контура L_0 по предположению ограничена, линия тока, выходящая из точки срыва струй, должна в этом случае от точки срыва уходить внутрь контура L_0 , и условие б), таким образом, при $Q(1) < 1$ не выполняется. Итак, условие б) накладывает на полином $Q(\xi)$ ограничение

$$Q(1) \geq 1. \quad (30)$$

Из (25) и (30) следует, что условия а) и б) могут одновременно выполняться лишь в том случае, если

$$Q(1) = 1. \quad (31)$$

Наличие равенства (31) является необходимым для выполнения условий а) и б), но не всегда достаточным. Выполнение условий а) и б) поэтому должно быть дополнительно проверено после того, как получено решение задачи в соответствии с излагаемым нами методом.

Итак, условия а) и б) привели нас к условию (31) для полинома $Q(\xi)$. Перейдем теперь к граничным условиям (23). Как мы показали в § 1, если функция $v(\zeta)$ имеет вид (24), первое и третье из условий (23) выполняются. Уравнение дуги

$$Z = i C v (\xi + i0) \frac{d}{d\xi} \arg v (\xi + i0), \quad 0 < \xi < 1,$$

в этом случае принимает вид (11)

$$Z = C v_{\infty} \frac{\frac{1}{2} P(\xi) + \xi P'(\xi)}{1 + \sqrt{1-\xi}} e^{i\sqrt{1-\xi} Q(\xi) + i\sqrt{\xi} P(\xi)}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (32)$$

Таким образом, граничные условия (23) будут удовлетворены, если дуга (32) будет лежать на заданном контуре L_0^* .

Класс дуг, определяемый уравнением (32), мы обозначили в § 1 через \mathfrak{A} . Обозначим теперь через \mathfrak{A}^* совокупность тех дуг класса \mathfrak{A} , для которых выполняется дополнительное условие (31). Если класс \mathfrak{A}^* содержит дугу, лежащую на заданном контуре L_0^* , то задача об обтекании соответствующего контура L_0 будет решена, если в формулу (24) вместо $P(\zeta)$ подставить тот полином, которому соответствует дуга класса \mathfrak{A}^* , лежащая на контуре L_0^* . В общем случае надлежит выбрать из класса \mathfrak{A}^* дугу, достаточно близкую к заданному контуру L_0^* . Подставив в формулу (24) вместо $P(\zeta)$ полином, соответствующий

щий выбранной дуге класса \mathfrak{A}^* , мы получим точное решение задачи об обтекании контура, близкого к заданному контуру L_0 .

В качестве примера рассмотрим задачу об обтекании окружности радиуса R . Контур L_0^* будет представлять собой в данном случае окружность $|Z| = \frac{1}{R}$. Нам надлежит, таким образом, выбрать дугу класса \mathfrak{A}^* , близкую к дуге окружности $|Z| = \frac{1}{R}$. Полагая в (32) $P(\xi) = 0,907 + 0,062\xi$ (в этом случае $Q(\xi) = 0,938 + 0,062\xi$ и условие (31) выполняется), $C = \frac{1,722}{Rv_\infty}$, мы получаем дугу класса \mathfrak{A}^* , полярные координаты которой $|Z|$ и $\arg Z$, соответствующие ряду значений параметра ξ , сведены нами в табл. 1.

Таблица 1

ξ	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,81	1
$\arg Z$	0	5°12'	10°26'	15°42'	21°01'	26°26'	31°58'	37°24'	49°22'	55°32'
$ Z $	$\frac{0,998}{R}$	$\frac{0,998}{R}$	$\frac{1,001}{R}$	$\frac{1,003}{R}$	$\frac{1,004}{R}$	$\frac{1,004}{R}$	$\frac{1,000}{R}$	$\frac{0,992}{R}$	$\frac{0,975}{R}$	$\frac{0,940}{R}$

Подставляя выбранный нами полином $P(\xi)$ в формулу (24) для $v(\zeta)$, находим:

$$v(\zeta) = \frac{v_\infty \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1+i}} e^{i[(0,907+0,062\zeta)\sqrt{\zeta} - (0,938-0,062\zeta)\sqrt{\zeta-1}]} \quad (33)$$

Формула (2) дает

$$z(\zeta) = 0,5808 R \int_0^\zeta (\sqrt{\xi-1+i}) e^{i[(0,933+0,062\xi)\sqrt{\xi-1} - (0,907+0,062\xi)\sqrt{\xi}] } \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (34)$$

Функция $z(\zeta)$, определяемая формулой (34), отображает отрезок $0 < \xi < 1$, $\eta = +0$ на дугу, полярные координаты которой $\varrho = |z-R|$ и $\vartheta = \pi - \arg(z-R)$ для ряда точек этой дуги указаны в табл. 2. В табл. 2 указаны также значения угла φ между касательной к этой дуге и осью y .

Таблица 2

ϑ	0°	4°	8°	12°	16°	20°	24°	28°
ϱ	1,0000 R	1,0000 R	1,0000 R	1,0000 R	1,0001 R	1,0001 R	1,0001 R	1,0001 R
φ	0°	3°59'	7°59'	11°59'	15°59'	19°59'	24°00'	28°01'
ϑ	32°	36°	40°	44°	48°	52°	55°51'	
ϱ	1,0001 R	1,0000 R	0,9999 R	0,9999 R	0,9998 R	0,9999 R	1,0002 R	
φ	32°02'	36°03'	40°03'	44°02'	47°58'	51°51'	55°32'	

Табл. 2 показывает, что формулы (33) и (34) дают решение задачи об обтекании контура, практически не отличающегося от окружности радиуса R . Срыв струй происходит в точках с полярным углом $\vartheta = \pm 55^\circ 51'$.

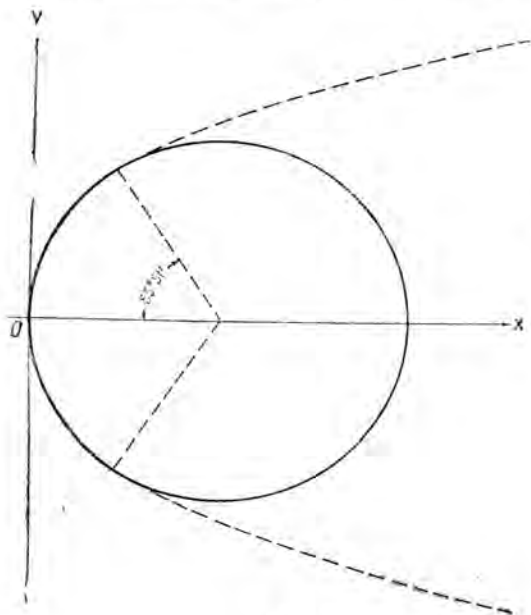


Рис. 2.

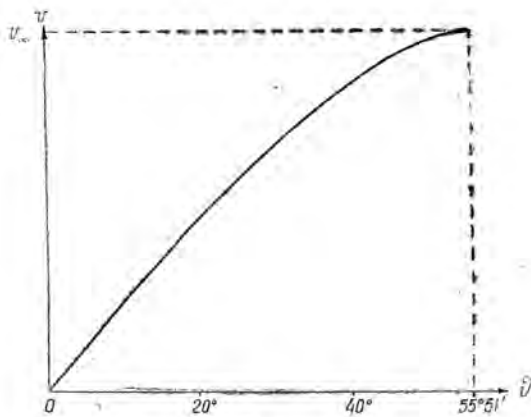


Рис. 3.

На рис. 2 показана конфигурация линий тока, исходящих из точек срыва, рассчитанная по формуле (34). На рис. 3 показана скорость движения жидкости на обтекаемом контуре v , как функция полярного угла ϑ , рассчитанная по формуле (33). Как видно из рис. 2 и 3, условия а) и б) действительно выполняются. Формулы (33) и (34) можно рассматривать, как практически точное решение задачи о струйном обтекании окружности идеальной жидкостью.

Поступила 20. XII 1949.