О динамических системах в пространстве функций

С. Фомин (Москва)

Целью данной работы является изучение различных инвариантных мер в динамической системе, которую можно естественным образом определить в пространстве Ω функций действительного аргумента. При этом в первую очередь нас будут интересовать спектральные свойства получающихся таким образом динамических систем с инвариантной мерой. Полученные здесь результаты позволят нам, в частности, установить существование некоторых новых спектральных типов динамических систем, например динамических систем с нелебеговским счетно-кратным непрерывным спектром.

Для простоты изложения мы будем рассматривать в первую очередь случай динамической системы с дискретным временем, принимая, соответственно, за исходное пространство Ω-пространство последовательностей.

Параграф 1 содержит лишь определения. Параграфы 2 и 3 посвящены изложению некоторых известных результатов, необходимых для дальнейшего. Параграф 5 и параграф 4 содержат некоторые новые факты. В параграфе 6 рассматривается случай непрерывного времени.

§ 1. Пространство Ω. Обозначим через Ω совокупность всевозможных бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{\omega_n\}$ действительных чисел. В пространство Ω можно ввести топологию, рассматривая его как тихоновское произведение счетного множества прямых.

Определим в Ω динамическую систему (с дискретным временем) положив:

$$s\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}, \tag{1}$$

то есть $s\{\omega_n\}$ есть последовательность, n-й член которой равен $(n+1)$-му члену последовательности $\{\omega_n\}$. Легко видеть, что определенное равенством (1) преобразование s есть взаимооднозначное и в обе стороны непрерывное (в смысле тихоновской топологии в Ω) отображение пространства Ω на себя.

Отметим, что пространство Ω, являющееся произведением счетного числа полных метрических пространств, само метризуемо и, следовательно, к рассматриваемой нами динамической системе в Ω применима теория инвариантных мер Боголюбова—Крылова [1] в том виде, как она изложена для некомпактных динамических систем в [2].

В некоторых случаях удобнее рассматривать в качестве основного пространства не Ω, а произведение счетного числа прямых, пополненных бесконечно удаленными точками $-\infty$ и $+\infty$. Очевидно, что это пространство гомеоморфно тихоновскому произведению счетного числа сегментов и, следовательно, есть компакт. К динамической системе в этом пространстве (преобразование s определяется здесь так же, как и в Ω) полностью применима вся теория Боголюбова—Крылова, в том числе и теорема о существовании инвариантной меры.

Если в Ω рассмотреть совокупность всех последовательностей ω, таких что $|\omega_n| \leqslant M$, то это будет инвариантное компактное подмножество в Ω. Это множество, рассматриваемое самостоятельно, есть компактная динамическая система, к которой, следовательно, также применимы результаты Боголюбова—Крылова.

§ 2. Меры в пространстве Ω. Меры, и, в частности, — инвариантные меры в пространстве Ω (или — непрерывный случай — в пространстве функций на прямой) неоднократно рассматривались различными авторами (А. Н. Колмогоров, Е. Е. Слуцкий, А. Я. Хинчин. I. L. Doob и др.), трактовавшими их как случайные процессы (с дискретным или непрерывным временем), в частности как стационарные случайные процессы, если речь идет об инвариантных мерах. Некоторые из полученных в этом направлении результатов будут играть существенную роль в дальнейшем изложении, и мы их вкратце приведем здесь. При этом мы не будем стремиться к возможно большей общности формулировок, ограничиваясь случаем пространства числовых последовательностей даже и тогда, когда соответствующий результат верен для любого пространства.

Пусть в пространстве Ω дана произвольная конечная мера μ*). Для определенности мы будем всегда рассматриваемые меры считать нормированными, то есть полагать, что $\mu(\Omega) = 1$. Пусть, далее, T — произвольное подмножество множества целых чисел. Каждому такому множеству T можно поставить в соответствие некоторое факторпространство Ω_T пространства Ω, именно, элементы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ из Ω мы будем считать принадлежащими одному и тому же классу, если $\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(2)}$ для каждого $n \in T$. Каждая мера μ, заданная в пространстве Ω, определяет в Ω_T очевидным образом некоторую меру μ_T, которую мы будем называть *проекцией меры* μ *в факторпространство* Ω_T. Если множество T состоит из конечного числа k элементов, то соответствующее Ω_T есть k-мерное линейное пространство. Меры μ_T, отвечающие конечным множества T, мы будем называть *конечномерными проекциями* меры μ.

---

*) Каждую меру в Ω мы будем считать заданной на борелевском теле множеств, порожденном совокупностью тихоновских окрестностей в пространстве Ω. Множества из этого борелевского тела мы будем кратко называть „измеримыми".

Согласно известной теореме А. Н. Колмогорова ([3], стр. 38) *совокупность всех конечномерных проекций μ_T меры μ однозначно определяет саму меру μ в пространстве Ω.*

Легко видеть, что различные конечномерные проекции одной и той же меры μ связаны между собой следующим *„условием согласованности“*: если $T_1 \subset T_2$, то пространство Ω_{T_1} можно рассматривать как факторпространство пространства Ω_{T_2}; следовательно, можно определить проекцию меры μ_{T_2} в факторпространство Ω_{T_1}. *Эта проекция совпадает с мерой μ_{T_1}.*

Пусть теперь в каждом конечномерном факторпространстве Ω_T пространства Ω задана некоторая нормированная мера μ_T. Согласно только что сказанному для того, чтобы эти меры μ_T были бы соответствующими конечномерными проекциями некоторой меры μ, определенной в Ω, необходимо, чтобы они были согласованы в указанном выше смысле. А. Н. Колмогоровым ([3], стр. 39) было доказано, что это условие согласованности является не только необходимым, но и достаточным. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Пусть в каждом конечномерном факторпространстве Ω_T пространства Ω задана некоторая нормированная мера μ_T и пусть эти меры между собой согласованы. Тогда в Ω существует одна и только одна нормированная мера μ, такая, что данные меры μ_T совпадают с соответствующими конечномерными проекциями меры μ.

В силу этой теоремы, для того чтобы однозначно определить в пространстве Ω некоторую меру, достаточно задать для всех конечномерных факторпространств Ω_T пространства Ω согласованную систему мер μ_T.

Мера μ, определенная в пространстве Ω, называется *инвариантной*, если для любого измеримого $A \subset \Omega$

$$\mu(sA) = \mu(A). \tag{2}$$

В терминах конечномерных проекций μ_T условие инвариантности меры μ можно сформулировать следующим образом: преобразование s переводит каждое факторпространство Ω в факторпространство Ω_{T+1} (то есть каждое из чисел $n \in T$, определяющих Ω_T, заменяется числом $n+1$). Следовательно, мера μ_T преобразованием s переводится в некоторую меру $s\mu_T$ в пространстве Ω_{T+1}. Инвариантность меры μ равносильна тому, что $s\mu_T = \mu_{T+1}$ для любого T.

Будем называть ω_n, то есть n-й член последовательности ω, n-й координатой точки $\omega \in \Omega$. При фиксированном n величина ω_n есть некоторая непрерывная функция на Ω. Пусть теперь $f(\omega)$ — функция на Ω, имеющая вид:

$$f(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \omega_{n_i}, \tag{3}$$

иными словами, равная произведению некоторого числа координат. Интеграл

$$M_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega), \tag{4}$$

где $f(\omega)$ имеет вид (3), называется *моментом* меры μ. Если $f(\omega)$ есть произведение k координат, то (4) называется моментом порядка k. Так как функции вида (3) неограничены, то интеграл (4), вообще говоря, не обязан существовать. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением тех мер, для которых существуют моменты, по крайней мере, второго порядка. Некоторые приводимые в работе результаты будут относиться к мерам, для которых существуют все моменты всех порядков (таковы, например, определяемые нами дальше нормальные меры в Ω).

Аналогично обычной проблеме моментов, в которой ищут меру на прямой по заданным ее моментам, можно сформулировать следующую общую проблему моментов для пространства Ω.

Пусть для каждого конечного набора целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *задано действительное число* $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. *Найти в пространстве* Ω *меру* μ, *соответствующие моменты которой совпадали бы с заданными числами* $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Было бы интересно решить следующие вопросы:

1. *Каким условиям должны удовлетворять числа* $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *для того, чтобы решение существовало.* В частности:

1′. *Проблема моментов в* Ω *индуцирует соответствующую проблему моментов в каждом конечномерном факторпространстве* Ω_T *пространства* Ω. *Пусть для каждого* Ω_T *соответствующая проблема моментов разрешима. Разрешима ли она в этом случае для* Ω?

(Очевидно, что если соответствующая проблема моментов в каждом Ω_T имеет *единственное* решение, то и в Ω она имеет одно и только одно решение).

2. *Каковы условия единственности решения проблемы моментов в* Ω? В частности:

2′. Легко проверить, что *для того чтобы проблема моментов в* Ω *имела единственное решение* μ, *необходимо, чтобы многочлены от координат были всюду плотны в пространстве суммируемых в квадрате по* μ функций на Ω. *Достаточно ли это условие?*

§ 3. Корреляционная функция и спектральная функция меры. Пусть μ — произвольная нормированная мера в пространстве Ω. Ее моменты второго порядка (мы условились рассматривать лишь такие меры, для которых моменты второго порядка существуют)

$$B(n, m) = \int\limits_{\Omega} \omega_n \omega_m\, d\mu(\omega)$$

образуют совокупность значений некоторой функции двух целочисленных аргументов. Если мера μ инвариантна, то, очевидно, $B(n, m) = B(n+l, m+l)$ (l — целое), то есть $B(n, m)$ зависит лишь от разности $n-m$. Положим $n-m=k$. Функция $B(k)$ называется *корреляционной функцией* инвариантной меры μ.

А. Я. Хинчиным [4] доказана следующая теорема.

Для того чтобы заданная функция $B(k)$ была корреляционной функцией некоторой инвариантной меры в пространстве Ω, необходимо и достаточно, чтобы функция $B(k)$ была положительно определенной.

Необходимость этого условия проверяется непосредственно, достаточность его мы получим как следствие в § 5.

Как известно (см. например [5], § 4) действительная функция $B(k)$ положительно определена в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде:

$$B(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\, dF(\lambda), \tag{5}$$

где $F(\lambda)$ — монотонная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $F(-\pi) = 0$,
2. $F(\lambda-0) = F(\lambda)$ (непрерывность слева),
3. $F(\lambda) - F(+0) = F(0) - F(-\lambda+0)$.

Представление (5) равносильно следующему:

$$B(k) = \int_{0}^{\pi} \cos n\lambda\, d\Phi(\lambda), \tag{6}$$

где $\Phi(\lambda)$ — монотонная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\Phi(0) = 0$,
2. $\Phi(\lambda-0) = \Phi(\lambda)$.

Если $B(k)$ — корреляционная функция меры μ, то соответствующие функции $F(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ (из которых одна легко выражается через другую) называются *спектральными функциями* данной инвариантной меры μ. Для различения их мы будем иногда $F(\lambda)$ называть комплексной спектральной функцией, а $\Phi(\lambda)$ — действительной.

По заданной корреляционной функции $B(k)$ спектральные функции определяются однозначно, именно:

$$F(\lambda) = \frac{(\lambda+\pi)\, B(0)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=-\nu}^{\nu} B(k) \frac{e^{ik\lambda}}{k},$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda B(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} B(k) \frac{\sin k\lambda}{k}.$$

Из сказанного следует, что всякая монотонная функция, удовлетворяющая условиям 1—3, есть комплексная спектральная функция некоторой инвариантной меры.

Примеры. 1°. Пусть m — произвольная нормированная мера на прямой. В пространстве Ω, которое является произведением счетного числа прямых, определим меру μ как произведение тождественных между собой мер m, заданных на каждой из этих прямых. μ представляет собой некоторую нормированную инвариантную меру в Ω. Если, в частности, m есть гауссовское нормальное распределение на прямой, то соответствующая инвариантная мера μ в Ω есть так называемая „винеровская мера“. Нетрудно проверить, что для этой меры

$$B(k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 0 \\ 0 \text{ при } k \neq 0, \end{cases}$$

а $F(\lambda)$ — обычная лебегова мера на окружности.

2°. Пусть снова m — произвольная нормированная мера на прямой. Ее можно рассматривать как меру во всем пространстве, сосредоточенную на тех элементах $\omega \in \Omega$, для которых ω_n постоянно при всех n (то есть на точках покоя нашей динамической системы). Для такой меры $B(k) = 1$, а $F(\lambda)$ имеет скачок, равный единице при $\lambda = 0$, и постоянна для всех остальных значений λ.

Следующее очевидное замечание полезно иметь в виду: если мере μ_1 соответствуют корреляционная функция $B_1(k)$ и спектральная функция $F_1(\lambda)$, а ере μ_2 — соответственно $B_2(k)$ и $F_2(\lambda)$, то мере $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ соответствуют корреляционная функция $\alpha B_1(k) + \beta B_1(k)$ и спектральная функция $\alpha F_1(\lambda) + \beta F_2(\lambda)$.

Далее, пусть μ_t — семейство мер, зависящих от параметра t, причем μ_t есть интегрируемая функция от t в том смысле, что для любого измеримого множества $A \subset \Omega$ числовая функция $\mu_t(A)$ интегрируема. Пусть $\varphi(t)$ — некоторая функция распределения на действительной прямой.

Определим меру $\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu_t d\varphi(t)$ условием

$$\mu(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu_t(A)\, d\varphi(t).$$

Тогда корреляционная и спектральная функции меры μ имеют вид

$$B(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_t(k)\, d\varphi(t); \qquad F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(\lambda)\, d\varphi(t),$$

где $B_t(k)$ и $F_t(\lambda)$ — соответственно корреляционная и спектральная функции меры μ_t.

Мера μ называется интегралом от μ_t по $\varphi(t)$.

§ 4. Инвариантные меры и инвариантные подмножества в Ω. Если нам задана некоторая корреляционная функция $B(k)$ или, что то же самое, некоторая спектральная функция $F(\lambda)$, то соответствующая $B(k)$ инвариантная мера, очевидно, не определяется однозначно. Различные инвариантные меры μ могут иметь одну и ту же корреляционную функцию. В настоящем параграфе мы будем изучать инвариантные меры по их спектральным функциям; иначе говоря, мы будем рассматривать те свойства инвариантных мер, которые являются общими для всех мер, имеющих одну и ту же корреляционную функцию.

С точки зрения метрической теории динамических систем те инвариантные подмножества фазового пространства, которые имеют меру нуль, не представляют, очевидно, никакого интереса и всегда могут быть исключены из рассмотрения. Естественно поэтому поставить следующий вопрос: пусть в пространстве Ω дана некоторая инвариантная мера μ; какие инвариантные подмножества пространства Ω имеют меры μ нуль (или, иначе говоря, какие подмножества в Ω имеют полную меру по μ)? Для неразложимых инвариантных мер в Ω имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть μ — произвольная неразложимая инвариантная мера в пространстве Ω и $F(\lambda)$ — ее спектральная функция. Тогда совокупность тех элементов из Ω, которые имеют винеровский спектр $F(\lambda)$, образует в Ω множество полной меры по μ.*

Напомним, что спектр (в смысле Винера) последовательности $\{\omega_n\}$ определяется следующим образом: пусть

$$\varphi(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \omega_{n+k}\,\omega_n;$$

последовательность $\varphi(k)$ — положительно определенная и, следовательно, может быть представлена в виде

$$\varphi(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\, dG(\lambda).$$

Монотонная функция $G(\lambda)$ называется спектром (в смысле Винера) последовательности $\{\omega_n\}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(\omega)$ — непрерывная функция на Ω и μ — неразложимая инвариантная мера, имеющая спектральную функцию $F(\lambda)$. Тогда согласно эргодической теореме Биркгофа-Хинчина предел

$$f^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} f(s^n \omega^0)$$

существует для почти всех (в смысле меры μ) $\omega^0 \in \Omega$ и равен постоянной величине, именно

$$f^* = \int_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Выберем теперь в качестве $f(\omega^0)$ функцию $\omega_0^0 \omega_k^0$, то есть произведение нулевой и k-й координат. Получаем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \omega_n^0 \, \omega_{n+k}^0 = \int_\Omega \omega_0 \, \omega_k \, d\mu(\omega) = B(k)$$

для почти всех $\omega^0 \in \Omega$.

По условию спектральная функция меры μ есть $F(\lambda)$, то есть

$$B(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \, dF(\lambda);$$

следовательно, для почти всех $\omega^0 \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \omega_n^0 \, \omega_{n+k}^0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \, dF(\lambda),$$

то есть, действительно, почти все (в смысле меры μ) элементы $\omega \in \Omega$ имеют винеровский спектр $F(\lambda)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Множество тех элементов $\omega \in \Omega$, которые не имеют винеровского спектра* (то есть для которых $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum\limits_{n=-T}^{T} \omega_n \omega_{n+k}$ не существует) *имеет меру нуль во всякой инвариантной мере* *).

Действительно, в силу доказанной теоремы это множество имеет меру нуль во всякой неразложимой инвариантной мере. Но отсюда непосредственно следует, что оно имеет меру нуль и в любой инвариантной мере на Ω.

Следствие 2. *Если μ — инвариантная мера со ступенчатой спектральной функцией, то почти все* (в смысле меры μ) *элементы $\omega \in \Omega$ имеют точечный винеровский спектр.* Для этого специального случая ступенчатой спектральной функции Е. Е. Слуцким был получен более точный результат. Им показано (для непрерывного случая, то есть для пространства функций на прямой), что всякая инвариантная мера со ступенчатой спектральной функцией сосредоточена на множестве почти периодических, по Безиковичу, функций, каждая из которых однозначно определяется своим рядом Фурье. Эта теорема Е. Е. Слуцкого непосредственно вытекает из следующего факта: для динамической системы с чисто точечным спектром всякая суммируемая на ней в квадрате функция является почти периодической по Безиковичу вдоль почти всех траекторий, а это в свою очередь сразу следует из теоремы Биркгофа-Хинчина и определения точечного спектра.

---

*) Напомним, что мы рассматриваем лишь меры, имеющие вторые моменты. Без этого условия данное утверждение неверно. Неразложимые меры, для которых вторые моменты не существуют, как раз должны быть сосредоточены на последовательностях ω, не имеющих винеровского спектра.

Следствие 3. *Всякая неразложимая инвариантная мера μ, сосредоточенная на множестве тех элементов из Ω, которые имеют винеровский спектр $F(\lambda)$, имеет спектральную функцию $F(\lambda)$.*

Действительно, если бы μ имела спектральную функцию $F_1(\lambda)=F(\lambda)$, то она была бы целиком сосредоточена на другом множестве, не пересекающемся с данным, именно на множестве тех элементов из Ω, которые имеют винеровский спектр $F_1(\lambda)$.

Таким образом, все пространство Ω распадается на: 1) инвариантное множество Ω^*, состоящее из тех элементов, которые не имеют винеровского спектра, то есть для которых среднее $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T+1}\sum\limits_{n=-T}^{T}\omega_{n+k}\omega_n$ не существует и которое имеет меру нуль во всякой инвариантной мере; 2) континуум инвариантных множеств Ω_F, каждое из которых состоит из элементов $\omega\in\Omega$, имеющих винеровский спектр $F(\lambda)$. Всякая неразложимая инвариантная мера в Ω целиком сосредоточена на соответствующем множестве Ω_F. Всякое множество Ω_F можно, таким образом, рассматривать как обособленную динамическую систему независимо от остального пространства. На каждом из них существует, вообще говоря, бесконечно много различных неразложимых инвариантных мер, которые все имеют одну и ту же спектральную функцию.

Если рассматривать те неразложимые инвариантные меры, которые имеют моменты всех порядков, то для них полученный результат можно несколько уточнить. Именно, пусть все моменты

$$\left\{a_{ij\ldots k}=\int\limits_{\Omega}\omega_i\omega_j\ldots\omega_k\,d\mu(\omega)\right\}$$

меры μ даны. Тогда по теореме Биркгофа-Хинчина для почти всех $\omega^0\in\Omega$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T+1}\sum_{n=-T}^{T}\omega^0_{i+n}\,\omega^0_{j+n}\ldots\omega^0_{k+n}=\int\limits_{\Omega}\omega_i\omega_j\ldots\omega_k\,d\mu(\omega)=a_{ij\ldots k}. \qquad (7)$$

Так как множество всех моментов счетно, то совокупность Ω_μ тех $\omega^0\in\Omega$, которые для всевозможных наборов индексов $ij\ldots k$ удовлетворяют равенству (7), имеет полную меру μ. Если μ однозначно определяется своими моментами, то равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T+1}\sum_{n=-T}^{T}f(s^n\omega)=\int\limits_{\Omega}f(\omega)\,d\mu(\omega)$$

будет выполнено при $\omega\in\Omega_\mu$ для всех непрерывных функций $f(\omega)$, то есть Ω_μ будет эргодическим множеством, соответствующим данной мере μ.

Рассмотрим теперь некоторые примеры инвариантных множеств в Ω (отличных от Ω_F) и укажем те инвариантные меры, которые на этих множествах можно определить.

1°. Пусть $\Omega^{(1)}$ есть совокупность таких элементов $\omega \in \Omega$, что $|\omega_n| = \mathrm{const}$, например, положим для определенности, что $|\omega_n| = 1$, то есть $\omega_n = \pm 1$. Очевидно, что множество $\Omega^{(1)}$ инвариантно. Множество $\Omega^{(1)}$ представляет собой компактную коммутативную группу (относительно обычной операции умножения последовательностей). Преобразование

$$s\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$$

есть автоморфизм этой группы. Пусть μ — мера Хаара на группе $\Omega^{(1)}$. Эта мера инвариантна относительно преобразования s. Действительно, положим $\mu'(A) = \mu(sA)$. Тогда μ' также является инвариантной мерой в $\Omega^{(1)}$. В силу единственности меры Хаара отсюда следует, что $\mu' = a\mu$. Но так как $\mu'(\Omega^{(1)}) = 1$, то $a = 1$, то есть $\mu(sA) = \mu(A)$ для любого измеримого множества A.

Полученная, таким образом, инвариантная мера будет, как легко проверить, неразложимой. Ее одномерные проекции μ_1 — это меры, сосредоточенные в двух точках на прямой: $+1$ и -1, причем $\mu_1(1) = \mu_1(1) = \frac{1}{2}$. Сама мера μ есть произведение своих одномерных проекций. Корреляционная функция этой меры есть

$$B(k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 0 \\ 0 \text{ при } k \neq 0 \end{cases}$$

и, следовательно, спектральная функция — лебегова мера на окружности.

Эта мера μ не является единственной инвариантной неразложимой мерой на динамической системе $\Omega^{(1)}$. Легко указать целый континуум таких мер. Полного описания всех неразложимых инвариантных мер на $\Omega^{(1)}$, насколько нам известно, не существует.

2°. Рассмотрим совокупность элементов $\omega \in \Omega$, координаты которых имеют вид

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{r} \cos(\theta_k + \lambda_k n). \tag{8}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — фиксированные действительные числа без рациональных соотношений $\mathrm{mod}\, 2\pi$ между ними, лежащие на отрезке $[0, 2\pi]$. Каждый из этих элементов ω определяется, таким образом, r-числами θ_k, $0 \leqslant \theta_k < 2\pi$. Из того, что между числами θ_k нет рациональных соотношений, следует, что два элемента

$$\omega'_n = \sum_{k=1}^{r} \cos(\theta'_k + \lambda_k n) \quad \text{и} \quad \omega''_n = \sum_{k=1}^{r} \cos(\theta''_k + \lambda_k n)$$

совпадают тогда и только тогда, когда

$$\theta'_k = \theta''_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Иначе говоря, можно установить взаимно-однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между всеми элементами $\omega \in \Omega$, имеющими вид (8), и точками r-мерного тора; именно, элементу ω, координаты которого имеют вид $\Sigma \cos(\theta_k + \lambda_k r)$, ставится в соответствие на торе точка с координатами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. Далее,

$$s\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\} = \left\{\sum_{k=1}^{r} \cos[\theta_k + \lambda_k (n+1)]\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{r} \cos(\theta_k + \lambda_k + \lambda_k n)\right\},$$

то есть в результате применения преобразования s числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ заменяются числами $\theta_1 + \lambda_1, \theta_2 + \lambda_2, \ldots, \theta_r + \lambda_r$, это означает, что точка $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$ r-мерного тора переходит в точку $(\theta_1 + \lambda_1, \theta_2 + \lambda_2, \ldots, \theta_r + \lambda_r)$.

Как известно, такое преобразование определяет на торе строго эргодическую динамическую систему (то есть систему с единственной возможной инвариантной мерой). Та единственная, инвариантная мера, которая существует на этой динамической системе, имеет спектральную функцию, постоянную для всех λ, кроме $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, и имеющую в каждой из этих точек скачок.

Аналогично можно рассмотреть и случай, когда берется счетное число точек λ_k. При этом получится динамическая система на счетномерном торе.

3°. Обозначим через $\Omega^{(\text{п. о.})}$ совокупность всех положительно определенных последовательностей $\{\omega_n\} \in \Omega$ и всех их сдвигов. $\Omega^{(\text{п. о.})}$ есть подмножество всех последовательностей, винеровский спектр которых — чисто точечный. Следовательно, всякая инвариантная мера на $\Omega^{(\text{п. о.})}$ имеет ступенчатую спектральную функцию. Отсюда и из упоминавшегося выше результата Е. Е. Слуцкого следует, что всякая такая мера целиком сосредоточена на множестве содержащихся в $\Omega^{(\text{п. о.})}$ почти периодических функций.

3а°. В частности, если $\Omega^{(c)}$ — множество положительно определенных функций с непрерывным спектром, и их всех сдвигов, то единственная инвариантная мера на $\Omega^{(c)}$ — это мера, сосредоточенная в точке $\omega_n \equiv 0$ (нулевая последовательность).

Некоторый интерес представляет вопрос об индивидуальных мерах (в смысле Боголюбова—Крылова), соответствующих различным точкам из Ω. Имеет место следующая

Теорема 2. *Если $\omega \in \Omega$ имеет винеровский спектр $F(\lambda)$, то соответствующая ω индивидуальная мера имеет спектральную функцию $F(\lambda)$* *).

*) Заметим, что эта теорема не покрывается следствием 3 из теоремы I, так как инвариантное множество, на котором сосредоточена индивидуальная мера некоторой точки ω, вовсе не обязано содержать эту точку.

Доказательство. Индивидуальная мера, соответствующая точке ω, определяется следующим образом: пусть

$$\mu_\omega^0(A) = \begin{cases} 0 \text{ если } \omega \overline{\in} A \\ 1 \text{ если } \omega \in A. \end{cases}$$

Далее, положим, для каждого натурального T

$$\mu_\omega^T(A) = \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \mu_\omega^0(s^n A).$$

Тогда под индивидуальной мерой μ мы будем понимать всякую предельную точку (в слабом смысле) последовательности μ_ω^T (подробнее см. например [1]). Из определения меры μ_ω^T следует, что для всякой непрерывной функции $f(\omega)$ на Ω

$$\int_\Omega f(\xi)\, d\mu_\omega^T(\xi) = \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} f(s^n\omega). \tag{9}$$

В частности, если положить $f(\xi)=\xi_0\,\xi_k$ (ξ_0 и ξ_k — соответствующие координаты точки $\xi \in \Omega$), то получим

$$\int_\Omega \xi_0\,\xi_k\, d\mu_\omega^T(\xi) = \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \omega_n\,\omega_{n+k}; \tag{10}$$

переходя в (10) к пределу при $T \to \infty$, имеем

$$\int_\Omega \xi_0\,\xi_k\, d\mu_\omega(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \omega_n\,\omega_{n+k} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\, dF(\lambda)$$

а это и означает, что μ_ω имеет спектральную функцию $F(\lambda)$.

В заключение этого параграфа сформулируем кратко понятие спектра динамической системы, которое будет играть существенную роль в § 5.

Пусть R — произвольная динамическая система и m — некоторая инвариантная мера в ней. Обозначим через $H=H(R, m)$ пространство всех суммируемых в квадрате по m функций на R. Преобразование s в пространстве R индуцирует в H некоторый унитарный оператор U, именно:

$$Uf(r) = f(sR).$$

Спектр оператора U называется спектром соответствующей динамической системы.

Если в пространстве Ω задана некоторая инвариантная мера μ, то можно установить некоторое соответствие между ее спектральной функцией и спектром соответствующей динамической системы. В частности, очевидно следующее: спектральная функция подчинена (в смысле Хеллингера) спектру; скачки спектральной функции являются собственными значениями оператора U.

§ 5. Нормальные инвариантные меры в пространстве Ω. Выше мы рассматривали произвольные инвариантные меры в пространстве Ω. Поэтому, например, говоря об „инвариантной мере с данной корреляционной функцией $B(k)$" мы имели в виду, по существу, совокупность всех инвариантных мер, имеющих данную корреляционную функцию. Однако из множества всех инвариантных мер, имеющих данную корреляционную функцию, естественным образом выделяется одна мера.

Определение. *Инвариантная мера, все конечномерные проекции которой суть гауссовские нормальные распределения в пространстве соответствующего числа измерений, называется нормальной инвариантной мерой.*

Теорема 3. *Пусть $B(k)$ — произвольная положительно определенная функция. Тогда в пространстве Ω существует одна и только одна нормальная мера μ, имеющая корреляционную функцию $B(k)$.*

Доказательство. Пусть $B(\ )$ — заданная положительно определенная функция. Для того чтобы построить в Ω соответствующую меру μ, нужно построить ее конечномерные проекции. l-мерное гауссовское распределение с равными нулю первыми моментами можно определить (см. например [6], стр. 132) как распределение, характеристическая функция которого имеет вид

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_l) = e^{-\frac{1}{2} Q(t_1, t_2, \ldots, t_l)}, \tag{11}$$

где Q — положительно определенная квадратичная форма.

Определим для каждого конечномерного факторпространства Ω_T $(T = \{n_1, n_2, \ldots, n_l\})$ форму Q следующим образом:

$$Q(t_1, t_2, \ldots, t_l) = \sum_{i,j} B(n_i - n_j) t_i t_j .$$

Эта форма положительно определена, так как функция $B(k)$ положительно определена. Таким образом, для каждого конечномерного Ω_T мы определили, с помощью соответствующей характеристической функции, некоторую меру μ_T. Легко проверить, что эта система мер является согласованной. Следовательно, по упомянутой в § 2 теореме А. Н. Колмогорова она определяет, единственным образом, в пространстве Ω некоторую меру μ. Эта мера инвариантна. Ее корреляционная функция совпадает с $B(k)$. Для доказательства этого последнего утверждения проще всего воспользоваться тем (см. например [7]), что моменты соответствующих порядков произвольной меры μ в l-мерном пространстве являются коэфициентами разложения в ряд Маклорена характеристической функции меры μ. Итак, для любой положительно определенной функции $B(k)$ существует нормальная инвариантная мера, корреляционная функция которой есть $B(k)$. Отсюда, в частности, следует приведенная нами в § 2 теорема А. Я. Хинчина о том, что всякая положительно определенная функция есть корреляционная функция некоторой инвариантной меры в Ω.

Пусть теперь μ_1 и μ_2 две нормальные инвариантные меры в Ω с одной и той же корреляционной функцией $B(k)$. По заданной корреляционной функции нормальной меры формула (11) позволяет однозначно восстановить характеристические функции всех конечномерных проекций этой нормальной меры, а следовательно, и сами конечномерные проекции. Поэтому μ_1 и μ_2 имеют одинаковые конечномерные проекции и, следовательно, совпадают. Итак, нормальная инвариантная мера определяется своей корреляционной функцией однозначно.

В дальнейшем мы будем рассматривать именно нормальные инвариантные меры. Мы выделяем для более детального изучения именно этот класс инвариантных мер, так как, во-первых, рассмотрение произвольных инвариантных мер в Ω было бы, вероятно, не проще, чем изучение вообще произвольных динамических систем с инвариантной мерой, а, во-вторых, повидимому, нормальные динамические системы в Ω представляют собой весьма существенный класс динамических систем, который в общей теории динамических систем должен играть такую же роль „первого приближения“, как и гауссовские процессы в общей теории стационарных случайных процессов.

Так как сама нормальная мера определяется своей корреляционной функцией, то, следовательно, все ее моменты однозначно определяются ее вторыми моментами. Так как это нам понадобится для дальнейшего, мы вычислим явные выражения старших моментов нормальной инвариантной меры через ее вторые моменты. Для этого мы воспользуемся уже упоминавшейся нами связью между моментами меры и коэфициентами разложения в степенной ряд ее характеристической функции.

Пусть $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ — характеристическая функция некоторого l-мерного распределения. Тогда разложение функции $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ в ряд имеет вид

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_l) = 1 + i(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_l t_l) +$$
$$+ \frac{i^2}{2}\left(a_{11} t_1^2 + a_{12} t_1^2 + \ldots + a_{ll} t_l^2\right) + \ldots,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, \ldots, a_{ll} \ldots$ — соответственно моменты первого, второго и т. д. порядков этого распределения.

В случае нормального гауссовского распределения имеем, непосредственно разлагая функцию (11) в ряд,

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_l) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{ij} B(n_i - n_j)\, t_i t_j} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[B(n_1 - n_1) t_1^2 + B(n_1 - n_2) t_1 t_2 + \ldots + B(n_l - n_l) t_l^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left[3B^2(n_1 - n_1) t_1^4 + 3B(n_1 - n_1) B(n_1 - n_2) t_1^3 t_2 + \ldots + 3B^2(n_l - n_l) t_l^4\right] + \ldots$$

Отсюда получаем, что моменты четвертого порядка $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ нормального распределения выражаются через моменты второго порядка, то есть через значения корреляционной функции следующим образом:

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\beta} \cdot a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\gamma} \cdot a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} \cdot a_{\beta\gamma} =$$
$$= B(n_\alpha - n_\beta) B(n_\gamma - n_\delta) + B(n_\alpha - n_\gamma) B(n_\beta - n_\delta) + B(n_\alpha - n_\delta) B(n_\beta - n_\gamma).$$

И вообще: момент $a_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}}$ порядка $2m$ представляет собой сумму $\frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$ произведений по m моментов второго порядка, причем эта сумма составлена так, что она симметрична относительно индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m}$. Моменты нечетных порядков, очевидно, все равны нулю.

Применим этот результат к установлению следующей существенной характеристики нормальных инвариантных мер в Ω с непрерывной спектральной функцией.

Теорема 4. *Для того чтобы динамическая система Ω с нормальной инвариантной мерой μ была системой с обобщенным перемешиванием, необходимо и достаточно, чтобы спектральная функция $F(\lambda)$ меры μ была непрерывна.*

Доказательство. Напомним, что динамическая система называется системой с обобщенным перемешиванием, если для любых двух измеримых множеств $A, B \subset \Omega$ выполнено следующее условие:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \{\mu(s^n A \cap B) - \mu(A)\cdot\mu(B)\}^2 = 0. \tag{12}$$

Это равносильно тому, что для любых двух суммируемых в квадрате по μ функций f и g,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{n=-T}^{T} \left\{ \int_\Omega f(s^n\omega)\cdot g(\omega)\, d\mu(\omega) - \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \cdot \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) \right\} 2 = 0. \tag{13}$$

Непрерывность спектральной функции $F(\lambda)$ эквивалентна тому, что соответствующая корреляционная функция $B(k)$ имеет среднее квадратичное, равное нулю:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{k=-T}^{T} B^2(k).$$

Заметим, что для доказательства наличия в Ω обобщенного перемешивания достаточно установить справедливость равенства (13) для какой-либо совокупности функций, линейные комбинации которых образуют в пространстве суммируемых в квадрате по μ функций на Ω всюду плотное множество. Таким множеством будет, например, для всякой нормальной меры совокупность всевозможных произведений координат.

Итак, пусть

$$f(\omega)=\omega_{n_1}\omega_{n_2}\dots\omega_{n_i};\qquad g(\omega)=\omega_{m_1}\omega_{m_2}\dots\omega_{m_j}.$$

Тогда равенство (13) для этих функций можно, используя принятые нами выше обозначения для моментов, записать в виде

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T+1}\sum_{k=-T}^{T}\{a_{n_1+k,\,n_2+k,\dots,\,n_i+k,\,m_1,\,m_2,\dots,\,m_j}-a_{n_1,\,n_2,\dots,\,n_i}a_{m_1,\,m_2,\dots,\,m_j}\}2=0. \quad (14)$$

Это равенство нам и нужно доказать.

Если из чисел i и j одно четно, а другое нечетно, то в равенстве (14) слева стоит, очевидно, тождественный нуль, так как все моменты нечетных порядков равны нулю. Пусть теперь числа i и j оба нечетны. Тогда левая часть равенства (14) сводится к выражению $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T+1}\sum\limits_{k=-T}^{T}\{a_{n_1+k,\,n_2+k,\dots,n_i+k,\,m_1,\,m_2,\dots,m_j}\}^2$. Покажем, что оно равно нулю.

Действительно, $a_{n_1+k,\,n_2+k,\dots,\,n_i+k,\,m_1,\,m_2,\dots,\,m_j}$ есть момент порядка $i+j$ меры μ. В соответствии с найденным выше выражением старших моментов через вторые, он представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых есть произведение $\dfrac{i+j}{2}$ сомножителей. Каждый из этих сомножителей представляет собой значение корреляционной функции или при некотором фиксированном (то есть не зависящем от k) значении аргумента, или же при аргументе вида $k+\alpha$. При любом фиксированном значении α функция $B(k+\alpha)$ будет, очевидно, функцией со средним равным нулю. Далее, произведение нескольких множителей, каждый из которых есть или постоянное число или ограниченная функция со средним равным нулю, есть снова функция со среднем равным нулю, если хотя бы один из сомножителей не есть постоянное. Но легко видеть, что если i и j нечетны, то в каждом из этих произведений будет хотя бы один сомножитель, зависящий от k. Следовательно, если i и j нечетны, то выражение $\{a_{n_1+k,\,n_2+k,\dots,\,n_i+k,\,m_1,\,m_2,\dots,\,m_j}\}^2$ будет, как функция от k, иметь среднее, равное нулю.

Пусть теперь i и j четны. Тогда в выражении для $a_{n_1+k,\dots,\,n_i+k,\,m_1\dots m_j}$ через вторые моменты некоторые из слагаемых будут представлять собой функции со средним, равным нулю, а некоторые — постоянные, то есть не зависящие от k. Как легко видеть, эти постоянные слагаемые будут составлять сумму, в точности равную величине $a_{n_1 n_2\dots n_i}\,a_{m_1 m_2\dots m_j}$, если эти моменты порядков i и j заменить их выражениями через соответствующие моменты второго порядка. Отсюда следует равенство (14) Итак, достаточность доказана. Необходимость этого условия почти очевидна. Действительно, как известно (см. например [5], стр. 151), *динамическая система обладает обобщенным перемешиванием в том и только том случае, когда она неразложима и ее спектр непрерывен.*

Как мы отмечали в § 4, для любой инвариантной меры μ точки разрыва спектральной функции являются элементами точечного спектра соответствующей динамической системы. Если динамическая система обладает обобщенным перемешиванием, то ее спектр непрерывен, а значит непрерывна и соответствующая спектральная функция.

Так как согласно упомянутой только что теореме всякая динамическая система с обобщенным перемешиванием не разложима, то из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Всякая нормальная динамическая система с непрерывной спектральной функцией не разложима.*

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4, показывают, что динамическая система Ω с мерой μ будет системой с полным перемешиванием (в строгом смысле, а не обобщенным), если корреляционная функция $B(k)$ меры μ стремится к нулю (а не только стремится в среднем) при $k \to \pm\infty$. Условия на спектральную функцию, необходимые и достаточные для того, чтобы $B(k)$ стремилась к нулю при $k \to \infty$ до сих пор не известны. Известно лишь, что для этого достаточна (но не необходима) абсолютная непрерывность спектральной функции $F(\lambda)$.

Поставим теперь следующую задачу: пусть дано, что нормальная инвариантная мера μ имеет спектральную функцию $F(\lambda)$. Найти по $F(\lambda)$ спектр соответствующей динамической системы. При этом мы ограничимся тем, единственно интересным случаем, когда $F(\lambda)$ непрерывна и, следовательно, мера μ не разложима. Для произвольных инвариантных мер в Ω задание спектральной функции, очевидно, еще не определяет спектра соответствующей динамической системы полностью. Однако, если мы ограничиваемся нормальными инвариантными мерами, то задача станет вполне определенной, так как сама нормальная инвариантная мера определяется по спектральной функции однозначно.

Для того чтобы найти спектр оператора U (см. конец § 4), нужно представить пространство H в виде прямой суммы попарно ортогональных циклических подпространств.

Нуль является собственным значением оператора U. Соответствующие собственные функции — постоянные, и только они, так как динамическая система не разложима. Образованное ими одномерное инвариантное подпространство обозначим через H_0, а через h_0 обозначим функцию $\equiv 1$, порождающую H_0. Никаких других собственных значений и собственных функций не существует.

Далее, пусть $h_1 = \omega_0$. Очевидно, что h_1 ортогонально H_0. Обозначим через H_1 циклическое подпространство, порожденное элементом

h_1, иначе говоря, H_1 есть наименьшее замкнутое подпространство, содержащее элементы ω_i, $i=0, \pm 1, \pm 2$ и т. д. Найдем спектр оператора U в H_1

$$(U^k h_1, h_1) = \int\limits_{\Omega} \omega_k \omega_0 \, d\mu(\omega) = B(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \, dF(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ — заданная спектральная функция меры μ. Для того чтобы исчерпать все пространство H, дальнейшее построение инвариантных циклических подпространств нужно вести так, чтобы они содержали все многочлены от координат. Мы построили пространство H_0, содержащее постоянные, и пространство H_1, содержащее многочлены первой степени от координат. Будем строить ортогональные циклические подпространства, содержащие многочлены второй, третьей и т. д. степеней.

Рассмотрим элемент $h_2^{(0)} = \omega_0^2 - 1$. Легко видеть, что $h_2^{(0)} \perp H_0$ и $h_2^{(0)} \perp H_1$.

Действительно,

$$(\omega_0^2 - 1, 1) = B(0) - 1 = 0$$

и, так как все нечетные моменты равны нулю, то

$$(\omega_0^2 - 1, \omega_k) = 0.$$

Пусть $H_2^{(0)}$ — циклическое подпространство, порожденное элементом $h_2^{(0)}$. Вычислим спектр оператора U в H_2.

$$(U^k h_2^{(0)}, h_2^{(0)}) = (\omega_k^2 - 1, \omega_0^2 - 1) = B^2(0) + 2B^2(k) - 2B(0) + 1 =$$

$$= 2B^2(k) = 2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \, dF_2(\lambda),$$

где $F_2(\lambda) = F * F(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda - \tau) \, dF(\tau)$ — свертка функции $F(\lambda)$ с самой собой.

Пусть $h_3^{(0)} = \omega_0^3 - 3\omega_0$. Элемент $h_3^{(0)}$ ортогонален ко всем уже построенным циклическим подпространствам H_0, H_1, $H_2^{(0)}$. Действительно, $h_3^{(0)}$ ортогонален H_0 и $H_2^{(0)}$, так как все моменты нечетных порядков равны нулю; далее

$$(\omega_0^3 - 3\omega_0, \omega_k) = (\omega_0^3, \omega_k) - 3(\omega_0, \omega_k) = 3B(k) - 3B(k) = 0,$$

то есть $h_3^{(0)} \perp H_1$. Обозначим через $H_3^{(0)}$ циклическое подпространство, порожденное $h_3^{(0)}$. Найдем спектр оператора U в $H_3^{(0)}$.

$$(U^k h_3^{(0)}, h_3^{(0)}) = (\omega_k^3 - 3\omega_k, \omega_0^3 - 3\omega_0) = 9B(k) + 6B^3(k) - 9B(k) - 9B(k) +$$

$$+ 9B(k) = 6B^3(k) = 6 \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \, dF_3(\lambda),$$

где $F_3(\lambda) = F * F_2(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_2(\lambda - \tau) \, dF(\tau)$ — свертка функции $F_2 = F * F(\lambda)$ с $F(\lambda)$.

Дальнейшее построение ведется аналогично, например $h_4^0 = \omega_0^4 - 6\omega_0^2 + 3$, элемент $h_4^{(0)}$ ортогонален подпространствам $H_0, H_1, H_2^{(0)}, H_3^{(0)}$, построенным выше и

$$(U^k h_4^{(0)}, h_4^{(0)}) = 24B^4(k) = 24\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\, dF_4(\lambda); \quad F_4(\lambda) = F * F_3(\lambda).$$

Вообще, элемент $h_r^{(0)}$ ищется в виде

$$h_{2n}^{(0)} = \omega_0^{2n} + \alpha_1 \omega^{2(n-1)} + \ldots + \alpha_n$$

при четном $r = 2n$ и в виде

$$h_{2n-1}^{(0)} = \omega^{2n-1} + \beta_1 \omega_0^{2(n-1)-1} + \ldots + \beta_{n-1}\omega_0$$

при нечетном $r = 2n - 1$. Коэфициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (в первом случае) находятся из условий

$$(h_{2n}^{(0)}, \omega_0^{2\nu}) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(это всегда возможно). Нетрудно проверить, пользуясь выражением старших моментов через вторые, что при таком выборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будут выполнены условия $(h_{2n_1}^{(0)} \omega_k^{2\nu}) = 0$ и при всех значениях k, то есть условия $h_{2n}^{(0)} \perp H_0$, $h_{2n}^{(0)} \perp H_1$, $h_{2n}^{(0)} \perp H_2^{(0)}, \ldots, h_{2n}^{(0)} \perp H_{2n-1}^{(0)}$. Аналогично строятся и элементы $h_{2n-1}^{(0)}$. Спектром каждого из элементов $h_n^{(0)}$ будет $F_n(\lambda)$, то есть n-кратная свертка функции $F(\lambda)$ с самой собой.

Построенные циклические подпространства $H_0, H_1, H_2^{(0)}, \ldots$, вообще говоря, не исчерпывают всего пространства H, так как они содержат лишь степени координат ω_n, но не содержат произведений координат, имеющих различные номера. Рассмотрим сперва элементы

$$\omega_0\omega_1, \omega_0\omega_2, \ldots, \omega_0\omega_n, \ldots$$

Каждый из этих элементов будет ортогонален всем построенным уже циклическим подпространствам, за исключением H_0 и $H_2^{(0)}$. Заменив их элементами

$$\omega_0\omega_1 - B(1),\ \omega_0\omega_2 - B(2), \ldots, \omega_0\omega_n - B(n), \ldots$$

мы получим систему элементов, ортогональных H_0.

Вычислим спектр элемента $\omega_0\omega_n - B(n)$:

$$(U^k(\omega_0\omega_n - B(n)), \omega_0\omega_n - B(n)) = (\omega_k\omega_{k+n} - B(n),\ \omega_0\omega_n - B(n)) =$$
$$= B^2(k) - B^2(n) + B(n+k)B(n-k) - 2B^2(n) + B^2(n) =$$
$$= B^2(k) + B(n+k)B(n-k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\, d\Phi_2^{(n)}(\lambda),$$

где $\Phi_2^{(n)}(\lambda)$ функция (вообще говоря, не монотонная), подчиненная (в смысле Хеллингера) функции $F_2(\lambda)$.

Обозначим через $h_2^{(1)}$ проекцию элемента $\omega_0\omega_1 - B(1)$ на ортогональное дополнение к пространству $H_2^{(0)}$, а через $H_2^{(1)}$ — циклическое подпространство, порожденное элементом $h_2^{(1)}$.

Пусть $F_2^{(1)}(\lambda)$ — спектр элемента $h_2^{(1)}$. Очевидно,

$$F_2^{(1)}(\lambda) \leqslant \Phi_2^{(1)}(\lambda) \leqslant F_2(\lambda).$$

Далее, пусть $h_2^{(2)}$ — проекция элемента $\omega_0\omega_2 - B(2)$ на ортогональное дополнение к $H_2^0 \oplus H_2^{(1)}$. Пусть $H_2^{(2)}$ — порожденное элементом $h_2^{(2)}$ циклическое подпространство, а $F_2^{(2)}(\lambda)$ — его спектр. Очевидно,

$$F_2^{(2)}(\lambda \leqslant \Phi_2^{(2)}(\lambda) \leqslant F_2(\lambda).$$

Продолжая таким же образом, построим элементы $h_2^{(3)}, \ldots, h_2^{(n)}, \ldots$ и соответствующие циклические подпространства $H_2^{(3)}, \ldots, H_2^{(n)}, \ldots$ Для соответствующих функций $F_2^{(n)}(\lambda)$, очевидно, имеет место соотношение

$$F_2^{(n)}(\lambda) \leqslant \Phi_2^{(n)}(\lambda) \leqslant F_2(\lambda).$$

Далее, рассмотрим элементы вида $\omega_0\,\omega_n\,\omega_m$. Каждый из этих элементов имеет спектр, подчиненный $F_3(\lambda) + F_1(\lambda)$. Заменяя последовательно каждый из этих элементов его проекцией на ортогональное дополнение к сумме уже построенных циклических пространств, мы получим элементы $h_3^{(n)}$ со спектрами, подчиненными функции $F_3(\lambda) + F_1(\lambda)$, порождающие соответствующие ортогональные циклические подпространства.

Окончательно получаем следующий результат.

Если μ — нормальная инвариантная мера с непрерывной спектральной функцией $F(\lambda)$, то спектр соответствующей динамической системы обладает такими свойствами:

Максимальным спектральным типом будет

$$\psi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(\lambda),$$

где $F_0(\lambda)$ — мера, сосредоточенная в нуле, $F_1(\lambda) = F(\lambda)$, $F_n(\lambda) = F_{n-1}^* F(\lambda)$ и коэфициенты $a_n > 0$ выбраны так, чтобы ряд сходился. Все свертки функции $\psi(\lambda)$ с самой собой эквивалентны $\psi(\lambda)$.

Непрерывный спектр системы будет, повидимому, всегда счетнократным. Он будет обязательно счетнократным, если $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна или если все $F_n(\lambda)$ имеют тот же тип, что и $F(\lambda)$.

Отсюда следует:

Теорема 5. *Какова бы ни была непрерывная монотонная функция $F(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda < \pi$ такая, что все ее свертки ей эквивалентны, существует неразложимая динамическая система, для которой $F(\lambda)$ будет максимальным спектральным типом.*

В частности:

Существуют неразложимые динамические системы с нелебеговским непрерывным спектром.

Если за $F(\lambda)$ принять функцию, эквивалентную своим сверткам, то мы получим динамическую систему со счетнократным однородным спектром (нелебеговским, если $F(\lambda)$ не абсолютно непрерывна).

Если за $F(\lambda)$ принять некоторую монотонную функцию, которая сама не абсолютно непрерывна, но ее свертки уже абсолютно непрерывны (например, $F(\lambda)$ постоянная на всех интервалах смежности канторова совершенного множества), то можно построить динамическую систему, имеющую неоднородный (лебеговский и нелебеговский) непрерывный спектр.

§ 6. Случай непрерывного времени. В этом параграфе мы перенесем полученные выше результаты (главным образом § 5) на тот случай, когда рассматривается не один оператор U, а однопараметрическая группа унитарных операторов U_t, то есть на случай динамических систем с непрерывным временем. Соответственно в качестве исходного пространства Ω мы будем здесь рассматривать не пространство последовательностей, а пространство действительных функций на прямой.

Основная (и, собственно говоря, единственная) возникающая здесь трудность по сравнению с дискретным случаем состоит в том, что пространство всех функций на прямой с некоторой мерой в нем не имеет, вообще говоря, счетного базиса, а это выводит нас за пределы того класса пространств, на которых обычно динамические системы рассматриваются.

Пусть теперь Ω, в отличие от предыдущих параграфов, означает пространство всех функций на прямой. Динамическую систему в этом пространстве определим следующим образом:

$$S_\tau \omega(t) = \omega(t+\tau).$$

Пространство Ω можно рассматривать как топологическое произведение континуального множества прямых.

Пусть в Ω дана некоторая мера *) μ, инвариантная относительно S_τ.

Корреляционную и спектральную функции инвариантной меры определим, как и в дискретном случае:

$$B(\tau) = \int\limits_\Omega \omega(t)\,\omega(t+\tau)\,d\mu(\omega); \qquad B(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\,dF(\lambda),$$

При этом опять-таки предполагается, что написанное выражение для $B(\tau)$ имеет смысл, то есть, что рассматриваемые меры имеют моменты, по крайней мере, второго порядка.

Фиксируя для t конечное число значений $t_1, \ldots, t_n$, мы получим некоторое конечномерное факторпространство пространства Ω. В каждом из этих факторпространств определяется естественным образом

*) Мера предполагается определенной для всех множеств борелевского тела, порожденного системой тихоновских окрестностей в Ω.

проекция меры μ. Инвариантная мера μ называется нормальной, если каждая ее конечномерная проекция представляет собой нормальное гауссовское распределение в пространстве соответствующего числа измерений. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением именно нормальных инвариантных мер.

Как и в случае дискретного времени, можно показать, что каждый корреляционной функции (или, что то же самое, каждой спектральной функции) соответствует одна и только одна нормальная инвариантная мера (определенная на борелевском теле, порожденном тихоновскими окрестностями).

Попытаемся теперь для каждой нормальной инвариантной меры, выделить в Ω некоторое инвариантное подмножество Ω' положительной меры и такое, чтобы в нем уже существовал счетный базис. Это возможно, если наложить некоторые условия на спектральную функцию; именно, имеет место следующая теорема, принадлежащая Е. Е. Слуцкому:

Если спектральная функция $F(\lambda)$ нормальной инвариантной меры μ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, dF(\lambda) < \infty, \tag{15}$$

то совокупность абсолютно непрерывных функций образует в пространстве Ω множество полной меры (в смысле меры μ).

Соответствующая корреляционная функция $B(\tau)$ будет в этом случае непрерывна и дважды диференцируема.

Поскольку при изучении спектра нормальной динамической системы мы всегда можем данную спектральную функцию $F(\lambda)$ заменить ей эквивалентной (сам спектр при этом, опять-таки с точностью до эквивалентности, останемся тем же самым), то мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких мер, для которых условие (15) выполнено.

Пространство Ω^* всех абсолютно непрерывных функций из Ω, очевидно, инвариантно и обладает счетным базисом. (Каждая функция из Ω^* определяется, например, своими значениями в рациональных точках).

Вычисление спектра нормальной динамической системы по заданной спектральной функции происходит в точности так же, как и в дискретном случае. Полученные нами в § 5 выражения старших моментов через вторые также остаются в силе.

Таким образом, теоремы 4 и 5, доказанные в § 5 для дискретного времени, переносятся без всяких изменений на непрерывный случай. [При этом, однако, рассматриваются лишь те функции $F(\lambda)$, которые удовлетворяют условию (15)].

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bogolioubоff and N. Kriloff, La theorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèms dynamiques de la mecanique non linéaire, Annals of Math. 38 (1937), стр. 65.

2. С. Фомин, О конечных инвариантных мерах в динамических системах с некомпактным фазовым пространством, Матем. сборник 12 : 1, 1943, стр. 99.

3. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, Москва, 1936.

4. А. Я. Хинчин, Теория корреляции стационарных случайных процессов, Успехи матем. наук, т. V (старая серия), 1938, стр. 42.

5. Э. Хопф, Эргодическая теория, Успехи матем. наук, IV : 1, 1949, стр. 111—182.

6. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Госиноиздат, 1947.

7. Г. Крамер, Математические основы статистики, Госиноиздат, 1948 г.

Московский ордена Ленина Государственный университет
им. М. В. Ломоносова, 26 ноября 1949 г.
Поступило 13. XII 1949.