

## Об одной задаче теории потенциала

*И. М. Рапопорт*

Мы указываем ниже элементарное решение следующей задачи теории потенциала. В плоскости  $xy$  определена гармоническая функция  $V(r, \varphi)$  вида

$$V(r, \varphi) = \alpha_0 \ln r + \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi}{r^m} \quad (1)$$

( $r, \varphi$  — полярные координаты). Требуется отыскать тот плоский контур  $L$ , который при заданной постоянной плотности  $\mu$  имеет внешний логарифмический потенциал  $V(r, \varphi)$  (\*). Сформулированная нами задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$\int_L \mu \ln R ds = \alpha_0 \ln r + \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi}{r^m}, \quad (2)$$

где  $R$  — расстояние от элемента  $ds$  контура  $L$  до точки с координатами  $r, \varphi$ .

Определенный интеграл, стоящий в левой части уравнения (2), может быть разложен в ряд

$$\begin{aligned} \int_L \mu \ln R ds = \ln r \int_L \mu ds - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\cos m\varphi}{mr^m} \int_L \mu r'^m \cos m\varphi' ds + \right. \\ \left. + \frac{\sin m\varphi}{mr^m} \int_L \mu r'^m \sin m\varphi' ds \right), \end{aligned} \quad (3)$$

сходящийся вне окружности  $r = \varrho$ , целиком содержащей внутри себя контур  $L$ .

Подставляя (3) в (2), получим следующие соотношения, которым должен удовлетворять искомый контур  $L$ :

$$\begin{aligned} \int_L \mu ds &= \alpha_0, \\ \int_L \mu r'^m \cos m\varphi' ds &\ll \begin{cases} -m\alpha_m & \text{при } m=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{при } m=n+1, n+2, \dots \end{cases} \\ \int_L \mu r'^m \sin m\varphi' ds &\ll \begin{cases} -m\beta_m & \text{при } m=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{при } m=n+1, n+2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

\*) Задача эта представляет собой один из случаев обратной задачи теории потенциала, которой посвящено значительное число исследований (см., например, П. Новиков, ДАН, XVIII, № 3, 1938; И. Рапопорт, ДАН, XXVIII, № 4, 1940).

Этим соотношениям можно придать вид:

$$\int_L z^m ds \begin{cases} \ll c_m & \text{при } m=0, 1, 2, \dots, n \\ \ll 0 & \text{при } m=n+1, n+2, \dots, \end{cases} \quad (4)$$

где  $z = r' e^{i\vartheta}$ ,

$$c_0 = \frac{\alpha_0}{\mu}, \quad c_m = -\frac{m}{\mu} (\alpha_m + i\beta_m), \quad m=1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Будем искать уравнение контура  $L$  в форме

$$z = f(e^{i\vartheta}), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad (6)$$

где  $f(\zeta)$  — подлежащая определению непрерывная функция на окружности  $|\zeta| = 1$ .

Для того чтобы контур, определяемый уравнением (6), удовлетворял соотношениям (4), функция  $f(\zeta)$  должна удовлетворять соотношениям:

$$\int_0^{2\pi} f^m(\zeta) |f'(\zeta)| d\vartheta \begin{cases} \ll c_m & \text{при } m=0, 1, 2, \dots, n \\ \ll 0 & \text{при } m=n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

$(\zeta = e^{i\vartheta}).$

Покажем, что условиям (7) для всех  $m > n$  можно удовлетворить, положив

$$f(\zeta) = \int_0^{\zeta} P_n^*(\zeta) d\zeta, \quad (8)$$

где  $P_n^*(\zeta)$  — произвольный полином степени  $n$ .

Для функции  $f(\zeta)$ , определяемой соотношением (8),

$$|f'(\zeta)| = P_n(\zeta) \overline{P_n(\zeta)}, \quad f(\zeta) = \zeta Q_{2n}(\zeta), \quad (9)$$

где  $Q_{2n}(\zeta)$  — некоторый полином степени  $2n$ .

Подставляя (9) в (8), получим соотношения

$$\int_0^{2\pi} \zeta^m Q_{2n}^m(\zeta) P_n(\zeta) \overline{P_n(\zeta)} d\vartheta \begin{cases} \ll c_m & \text{при } m=0, 1, 2, \dots, n \\ \ll 0 & \text{при } m=n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \zeta^k \overline{\zeta}^l d\vartheta = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\vartheta} d\vartheta = 0 \quad \text{при } k \neq l, \quad (11)$$

условия (10) удовлетворяются для всех  $m > n$ . Действительно, при  $m > n$  произведение  $\zeta^m Q_{2n}^m(\zeta) P_n(\zeta)$  представляет собой полином от  $\zeta$ , в котором наименьший показатель степени  $\zeta$  превышает  $n$ , в то время как  $\overline{P_n(\zeta)}$  является полиномом от  $\overline{\zeta}$ , в котором наибольший показатель степени  $\overline{\zeta}$  не превосходит  $n$ .

Итак, чтобы определить искомую функцию  $f(\zeta)$ , достаточно выбрать коэффициенты полинома  $P_n(\zeta)$  в формуле (8) так, чтобы удовлетворить условиям (7) для  $m=0, 1, 2, \dots, n$ . Определение коэффициентов полинома  $P_n(\zeta)$  сведется к решению системы алгебраических уравнений. Отыскав функцию  $f(\zeta)$ , мы согласно (6) получим уравнение искомого контура  $L$ .

В качестве примера построим контур  $L$ , внешний логарифмический потенциал которого  $V(r, \varphi)$  при постоянной плотности  $\mu$  равен

$$V(r, \varphi) = \alpha_0 \ln r + \frac{\alpha_2 \cos 2\varphi}{r^2} \quad (\alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0). \quad (12)$$

В этом примере  $n=2$  и согласно (8)

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \int_0^{\zeta} (a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2)^2 d\zeta = a_0^2 \zeta + a_0 a_1 \zeta^2 + \\ &+ \frac{1}{3} (a_1^2 + 2a_0 a_2) \zeta^3 + \frac{1}{2} a_1 a_2 \zeta^4 + \frac{1}{5} a_2^2 \zeta^5. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как

$$|f'(\zeta)| = (a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2) (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\zeta} + \bar{a}_2 \bar{\zeta}^2),$$

условия (7) при  $m=0, 1, 2$  дают:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2) (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\zeta} + \bar{a}_2 \bar{\zeta}^2) d\vartheta &= c_0 = \frac{\alpha_0}{\mu}, \\ \int_0^{2\pi} (a_0^2 \zeta + 2a_0 a_1 \zeta^2 + \dots) (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\zeta} + \bar{a}_2 \bar{\zeta}^2) d\vartheta &= c_1 = 0, \\ \int_0^{2\pi} (a_0^2 \zeta^2 + \dots) (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\zeta} + \bar{a}_2 \bar{\zeta}^2) d\vartheta &= c_2 = -\frac{2\alpha_2}{\mu}, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} 2\pi (a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2) &= \frac{\alpha_0}{\mu}, \\ 2\pi (a_0^2 \bar{a}_1 + 2a_0 a_1 \bar{a}_2) &= 0, \\ 2\pi a_0^2 \bar{a}_2 &= -\frac{2\alpha_2}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Вводя обозначения:

$$a_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0}, \quad a_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad a_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}, \quad (15)$$

сможем соотношениям (14) придать вид:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0^3 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 &= \frac{\alpha_0}{2\pi\mu}, \\ \varrho_0^3 \varrho_1 e^{i(3\vartheta_0 - \vartheta_1)} &= 2\varrho_0^2 \varrho_1 \varrho_2 e^{i(2\vartheta_0 + \vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi)}, \\ \varrho_0^6 \varrho_2 e^{i(5\vartheta_0 - \vartheta_2)} &= \frac{\alpha_2}{\pi\mu} e^{i\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Отсюда получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 3\vartheta_0 - \vartheta_1 &= 2\vartheta_0 + \vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi + 2\pi k, \\ 5\vartheta_0 - \vartheta_2 &= \pi + 2\pi l. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 &= p, \\ \varrho_0^2 \varrho_1 (\varrho_0 - 2\varrho_2) &= 0, \\ \varrho_0^5 \varrho_2 &= q, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$p = \frac{\alpha_0}{2\pi\mu}, \quad q = \frac{\alpha_2}{\pi\mu} \quad (p > 0, q > 0). \quad (19)$$

Решая уравнения (17) относительно  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  и подставляя результат в (15), найдем

$$\alpha_0 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}, \quad \alpha_1 = \pm \varrho_1 e^{3i\vartheta_0}, \quad \alpha_2 = -\varrho_2 e^{5i\vartheta_0}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (13), получим для  $f(\zeta)$  выражение

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \varrho_0^2 \zeta e^{2i\vartheta_0} \pm \varrho_0 \varrho_1 (\zeta e^{2i\vartheta_0})^2 + \frac{1}{3} (\varrho_1^3 - 2\varrho_0 \varrho_2) (\zeta e^{2i\vartheta_0})^3 \mp \\ &\mp \frac{1}{2} \varrho_1 \varrho_2 (\zeta e^{2i\vartheta_0})^4 + \frac{1}{5} \varrho_2^2 (\zeta e^{2i\vartheta_0})^5. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (16), получим для искомого контура  $L$  уравнение

$$\begin{aligned} z &= \varrho_0^2 e^{i(\vartheta_0 + 2\vartheta_0)} \pm \varrho_0 \varrho_1 e^{2i(\vartheta_0 + 2\vartheta_0)} + \frac{1}{3} (\varrho_1^3 - 2\varrho_0 \varrho_2) e^{3i(\vartheta_0 + 2\vartheta_0)} \mp \\ &\mp \frac{1}{2} \varrho_1 \varrho_2 e^{4i(\vartheta_0 + 2\vartheta_0)} + \frac{1}{5} \varrho_2^2 e^{5i(\vartheta_0 + 2\vartheta_0)}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видим, выбор угла  $\vartheta_0$  не влияет на конфигурацию контура, определяемого уравнением (22), и, не нарушая общности, можно положить  $\vartheta_0 = 0$ . Уравнение (22) примет тогда вид

$$z = \varrho_0^2 e^{i\vartheta} \pm \varrho_0 \varrho_1 e^{2i\vartheta} + \frac{1}{3} (\varrho_1^3 - 2\varrho_0 \varrho_2) e^{3i\vartheta} \mp \frac{1}{2} \varrho_1 \varrho_2 e^{4i\vartheta} + \frac{1}{5} \varrho_2^2 e^{5i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (23)$$

Третье из уравнений (18) дает

$$\varrho_2 = \frac{q}{\varrho_0^5}. \quad (24)$$

Подставляя найденное значение  $q_2$  в первые два из уравнений (18), получим уравнения.

$$q_0^2 + \frac{q^2}{q_0^{10}} + q_1^2 = p, \quad (25)$$

$$\left(q_0^3 - \frac{2q}{q_0^3}\right) q_1 = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) приводит нас к двум случаям:  $q_1 = 0$  и  $q_0 = \sqrt[6]{2q}$ . Рассмотрим отдельно оба случая.

а)  $q_1 = 0$ .

В этом случае согласно (25)  $q_0$  определяется алгебраическим уравнением

$$q_0^{12} - pq_0^{10} + q^2 = 0. \quad (27)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{q}{p^{\frac{1}{3}}} = \frac{8\pi^2 \mu^2 \alpha_3}{\alpha_0^3}, \quad (28)$$

$$u = \frac{q_0^3}{p} (u > 0). \quad (29)$$

Тогда уравнению (27) можно будет придать вид

$$u^6 - u^5 + \lambda^2 = 0. \quad (30)$$

Полагая в (23)  $q_0 = \sqrt{pu}$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = \frac{\lambda \sqrt{pu}}{u^3}$  (см. (24)), получим для искомого контура  $L$  уравнение

$$z = p \left( u e^{i\vartheta} - \frac{2\lambda}{3u^2} e^{3i\vartheta} + \frac{\lambda^2}{5u^5} e^{5i\vartheta} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (31)$$

При  $\lambda > \frac{25\sqrt{5}}{216} = 0,25881$  уравнение (30) не имеет вещественных корней.

При  $\lambda = \frac{25\sqrt{5}}{216}$  уравнение (30) имеет один вещественный корень  $u = \frac{5}{6}$ . Уравнение (31) контура  $L$  принимает в этом случае вид

$$z = p \left( \frac{5}{6} e^{i\vartheta} - \frac{\sqrt{5}}{9} e^{3i\vartheta} + \frac{1}{30} e^{5i\vartheta} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (32)$$

Контур  $L$ , определяемый уравнением (32), показан пунктиром на рис. 1.

При  $0 < \lambda < \frac{25\sqrt{5}}{216}$  уравнение (30) имеет два вещественных положительных корня  $u_1$  и  $u_2$   $\left(\frac{5}{6} < u_1 < 1, 0 < u_2 < \frac{5}{6}\right)$ . Контур (31), соответствующий корню  $u_1$ , будем обозначать через  $L_1$ , контур (31),

соответствующий корню  $u_2$ , будем обозначать через  $L_2$ . На рис. 1 показаны контуры  $L_1$  и  $L_2$ , построенные для случая  $\lambda = 0,257$ .

б)  $q_0 = \sqrt[3]{2q}$ .

Придерживаясь обозначений (28) и (29), находим

$$u = \sqrt[3]{2\lambda}. \tag{33}$$

Уравнение (25) принимает вид

$$q_1^2 = p - \frac{5}{4} q_0^2 = p \left( 1 - \frac{5}{4} u \right) \tag{34}$$

согласно (29). Таким образом, должно иметь место неравенство  $u \leq \frac{4}{5}$  или согласно (33)  $\lambda \leq \frac{32}{125} = 0,256$ .

Если это неравенство выполняется, то, полагая в (22)  $q_0 = \sqrt{pu}$ ,  $q_1 = \sqrt{p \left( 1 - \frac{5}{4} u \right)}$ ,  $q_2 = \frac{q_0}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{pu}$  (см. (29), (34) и (24)), получим для контура  $L$  уравнение

$$z = p \left[ u e^{i\vartheta} \pm \sqrt{u \left( 1 - \frac{5}{4} u \right)} e^{2i\vartheta} + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{9}{4} u \right) e^{3i\vartheta} \mp \frac{1}{4} \sqrt{u \left( 1 - \frac{5}{4} u \right)} e^{4i\vartheta} + \frac{u}{20} e^{5i\vartheta} \right], \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad u = \sqrt[3]{2\lambda}. \tag{35}$$

Контур (35) будем обозначать через  $L_1, L_4$ . При  $\lambda = \frac{32}{125}$ ,  $u = \frac{4}{5}$  уравнение (35) для контуров  $L_3, L_4$  принимает вид

$$z = p \left( \frac{4}{5} e^{i\vartheta} - \frac{4}{15} e^{3i\vartheta} + \frac{1}{25} e^{5i\vartheta} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \tag{36}$$

Контур (36) показан пунктиром на рис. 2.

Уравнение (30) при  $\lambda = \frac{32}{125}$  имеет корень  $u_2 = \frac{4}{5}$ . Полагая в (31)  $\lambda = \frac{32}{125}$ ,  $u = \frac{4}{5}$ , получим для контура  $L_2$  уравнение (36). Таким образом при  $\lambda = \frac{32}{125}$  контуры  $L_3, L_4$  совпадают с контуром  $L_2$ .

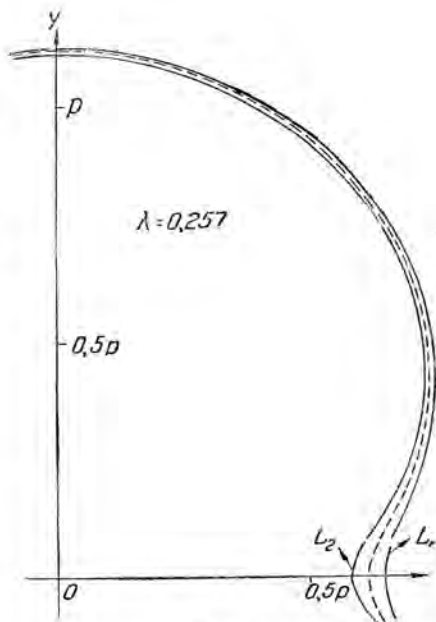


Рис. 1.

Итак, при  $\lambda > \frac{25\sqrt{5}}{216}$  мы не получаем решений интегрального уравнения (2). При  $\lambda = \frac{25\sqrt{5}}{216}$  мы получаем одно решение, показанное пунктиром на рис. 1. При  $\frac{32}{125} \leq \lambda < \frac{25\sqrt{5}}{216}$  мы получаем два решения интегрального уравнения (2)  $L_1$  и  $L_2$  (см. рис. 1). При  $\lambda = \frac{32}{125}$  контур  $L_2$  принимает конфигурацию, показанную пунктиром на рис. 2. При  $0 < \lambda < \frac{32}{125}$  мы получаем четыре решения интегрального уравнения (2)  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$ . На рис. 2 показаны контуры  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$ , построенные для случая  $\lambda = 0,25$ .

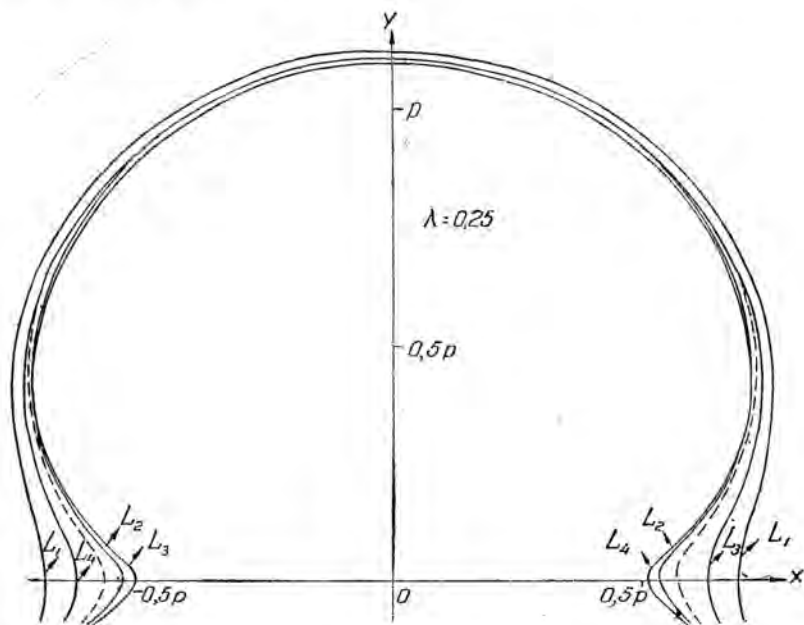


Рис. 2.

Когда  $\lambda \rightarrow 0$ , корни  $u_1$  и  $u_2$  уравнения (30) стремятся к единице и к нулю. Согласно (31) при  $\lambda \rightarrow 0$  контур  $L_1$  приближается к окружности  $z = pe^{i\vartheta}$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , а контур  $L_2$  — к окружности  $z = \frac{p}{5} e^{5i\vartheta}$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , описываемой пять раз при изменении  $\vartheta$  от 0 до  $2\pi$ . Контур  $L_3, L_4$ , определяемые уравнением (35), при  $\lambda \rightarrow 0$  приближаются к окружности  $z = \frac{p}{3} e^{3i\vartheta}$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , описываемой три раза при изменении  $\vartheta$  от 0 до  $2\pi$ .

Важно отметить существование различных контуров, звездных относительно одной и той же точки и имеющих одинаковый внешний логарифмический потенциал при одинаковой постоянной плотности. Как известно (см. П. С. Новиков, ДАН XVIII, № 3, 1938), при условии звездности относительно какой-либо фиксированной точки однородная плоская фигура однозначно определяется своим внешним логарифмическим потенциалом, соответствующим заданной ее плотности.

Поступило 20. XII 1949.

---