Об одном обобщении понятия аналитической функции

Я. Б. Лопатинский

В настоящей работе исследуется система уравнений вида $Au = Fv$, $Bu = -Av$, где A, B линейные диференциальные операторы произвольного одинакового порядка с двумя аргументами. При некоторых ограничениях, налагаемых на эти операторы, доказывается, что функция $u+iv$, составленная из решения этой системы, обладает некоторыми свойствами, подобными свойствам аналитической функции. В частности, получается аналог разложения Тейлора и аналог производной функции.

Вслед за известными исследованиями Лаврентьева, посвященными квазиконформным отображениям, появились работы, переносящие некоторые другие свойства аналитических функций (разложение Тейлора, производная, теорема и формула Коши) на функции более общего вида (работы Л. Берса и А. Гельбарта *), Положего [2] и др.). В настоящей работе разбираются аналогичные вопросы для случая диференциальных операторов порядка выше первого.

1. Пусть

$$A = \sum_{k+l\leq m} a_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, \partial y^l}, \quad B = \sum_{k+l\leq n} b_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, \partial y^l}$$

суть линейные диференциальные операторы, коэфициенты которых a_{kl}, b_{kl} являются действительными функциями действительных аргументов x, y, аналитическими в области Ω; предполагается, кроме того, что результант Δ форм

$$\sum_{k+l=m} a_{kl} \lambda^k \mu^l, \quad \sum b_{kl} \lambda^k \mu^l$$

отличен от нуля в каждой точке области Ω.

Система

$$Au = f, \quad Bu = g \tag{1}$$

(f, g функции x, y аналитические в Ω) будет называться совместной, если для всяких линейных диференциальных операторов P, Q с коэфициентами, аналитическими в Ω, из $PA = QB$ следует $Pf = Qg$.

Свойства системы (1) описываются следующей теоремой.

Теорема 1. Для того чтобы система (1) имела аналитическое в Ω решение, необходимо и достаточно, чтобы система (1) была совместной. Всякое решение системы (1), диференцируемое $m+n-1$

*) Основные результаты изложены в обзоре И. Г. Петровского [1].

раз в некоторой области $\Omega_1 \subseteq \Omega$, является аналитическим в Ω_1 и аналитически продолжаемо в Ω. Однородная система (1) имеет конечное количество линейно независимых в Ω_1, аналитических в Ω решений.

Доказательство. Очевидно, для существования аналитического в некоторой подобласти Ω решения необходима совместность системы (1). Далее, в случаях $m=0$ или $n=0$ теорема очевидна; далее, полагается $m, n \geqslant 1$. Пусть система (1) совместна. Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} Au = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^k\, \partial y^l} \qquad (k+l=n-1),$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} Bu = \frac{\partial^{m-1} g}{\partial x^k\, \partial y^l} \qquad (k+l=m-1),$$

всего $m+n$ уравнений; детерминант из коэфициентов при производных

$$\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^k\, \partial y^l} \qquad (k+l=m+n-1)$$

есть, очевидно, результант Δ, отличный от нуля в Ω по предположению. Таким образом, система приводима к виду

$$\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^k\, \partial y^{m+n-1-k}} = \sum_{i+j<m+n-1} c_{ij}^{(k)} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i\, \partial y^j} + P_k f + Q_k g \ (k=0, \ldots, m+n-1). \tag{2}$$

Здесь $c_{ij}^{(k)}$ аналитичны в Ω и P_k, Q_k суть диференциальные операторы порядков соответственно $n-1$, $m-1$ с аналитическими в Ω коэфициентами.

Далее рассматривается система уравнений относительно $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k\, \partial y^l}$ $(k+l<m+n-1)$ вида

$$(PA+QB)u = Pf + Qg, \tag{3}$$

где P, Q суть диференциальные операторы с аналитическими в Ω коэфициентами, такие, что $PA+QB$ есть оператор порядка меньшего $m+n-1$.

Из совместности системы (1) следует разрешимость этой системы уравнений в поле отношений аналитических в Ω функций. Пусть (x_0, y_0) такая точка из Ω, в которой система (3) разрешима в поле действительных чисел*). Пусть $P_{kl}^{(0)}$ $(k+l<m+n-1)$ система чисел, отождествляющая (4) в точке (x_0, y_0) при подстановке вместо $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k\, \partial y^l}$.

Будет показано, что существует и притом единственное решение u системы (1), аналитическое в окрестности (x_0, y_0) и удовлетворяющее начальным условиям: в точке (x_0, y_0)

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k\, \partial y^l} = P_{kl}^{(0)} \qquad (k+l<m+n-1).$$

---

*) Из дальнейшего будет следовать, что всякая точка обладает этим свойством.

В точке (x_0, y_0) все производные $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l}$ $(k+l \geqslant m+n-1)$ определяются однозначно уравнениями (2) и уравнениями, полученными диференцированием уравнений (2).

Действительно, приравнивание двух выражений одной и той же такой производной приводит к соотношению вида (3), справедливому при $x=x_0$, $y=y_0$, $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} = P_{kl}^{(0)}$.

Известным образом доказывается сходимость ряда

$$\sum_{k, l \geq 0} \frac{P_{kl}^{(0)}}{k!\, l!} (x-x_0)^k (y-y_0)^l.$$

В окрестности (x_0, y_0) $\left(P_{kl}^{(0)}\right.$ — значение $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l}$ в точке (x_0, y_0), определенное указанным образом$\Big)$. Сумма ряда $v(x, y)$ является искомым решением системы (1). Ввиду того, что правые части системы (2) содержат производные меньшего порядка, чем левые части этой системы, на основании одной теоремы Рикье можно заключить, что решение $v(x, y)$ аналитически продолжаемо на Ω. Это будет показано далее в более общих предположениях.

Пусть $u(x, y)$ есть $m+n-1$ раз диференцируемое решение системы (1) в некоторой области $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Пусть

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} = p_{kl}, \quad (x_0, y_0 \in \Omega_1, \quad p_{kl} = P_{kl}^{(0)})$$

в точке (x_0, y_0). Очевидно, на основании (2), p_{kl} $(k+l \leqslant m+n-2)$ удовлетворяют системе уравнений

$$p_{kl} = P_{kl}^{(0)} + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (p_{k+1, l}\, d\zeta + p_{k, l+1}\, d\eta) \qquad (k+l < m+n-2),$$

$$p_{kl} = P_{kl}^{(0)} + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left\{ \left(\sum_{i+j < m+n-1} c_{ij}^{(k+1)} p_{ij} + P_{k+1} f + Q_{k+1} g \right) d\zeta + \right.$$

$$\left. + \left(\sum c_{ij}^{(k)} p_{ij} + P_k f + Q_k g \right) d\eta \right\}, \quad (k+l = m+n-2).$$

Путь интегрирования предполагается прямолинейным, принадлежащим Ω_1.

Подстановкой $\zeta = x_0 + (x-x_0)t$, $\eta = y_0 + (y-y_0)t$ система эта приведется к системе интегральных уравнений (относительно p_{kl}), которая будет рассматриваться и при комплексных значениях x, y. Применяя метод последовательных приближений, легко получить решение этой системы в виде предела равномерно сходящейся в некоторой комплексной окрестности Ω_2 точки (x_0, y_0) последовательности аналитических в Ω_2 функций. Отсюда следует аналитичность решения $u(x, y)$.

Так как окрестность Ω_2, очевидно, зависит только от области аналитичности коэфициентов операторов A, Buf, g, то возможно аналитическое продолжение $u(x, y)$ на Ω. Из того, что система (3) имеет конечное количество решений, далее следует, что однородная система (1) имеет конечное количество линейно независимых в Ω, аналитических в Ω решений. Это количество именно равно разности между $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$ и рангом системы (3), что и требовалось доказать.

Полезно отметить, что из возможности аналитического продолжения решений в Ω и равенства размерностей двух изоморфных линейных пространств (над одним полем) следует, что ранг системы (3) сохраняет постоянную величину в каждой точке Ω. Эта теорема может быть уточнена, если предположить далее, что операторы A, B имеют одинаковые порядки (равные $n \geqslant 1$) и перестановочны; эти предположения сохраняются в дальнейшем.

В этом случае имеет место:

Теорема 2. Количество линейно независимых решений однородной системы (1) равно n^2; при этом начальные значения производных u до порядка $n-1$ могут быть заданы произвольно.

Условием совместности (неоднородной) системы (1) является $Bf = Ag$.

Доказательство. Прежде всего будет доказано, что всякий оператор вида $CA+DB$ может быть представлен в виде $PA+QB$, где порядки PA, QB не превышают порядка $PA+QB$, причем $C=P+EB$, $D=Q-EA$.

Действительно, пусть

$$C = \sum_{k+l\leq p} c_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}, \quad D = \sum_{k+l\leq p} d_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$$

и порядки CA, DB больше порядка $CA+DB$. Тогда

$$\left(\sum_{k+l=p} c_{kl} \lambda^k \mu^l\right) \cdot \left(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'} \lambda^{k'} \mu^{l'}\right) + \left(\sum_{k+l=p} d_{kl} \lambda^k \mu^l\right) \cdot \left(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'} \lambda^{k'} \mu^{l'}\right) = 0.$$

Так как результант форм $\sum_{k+l=n} a_{kl} \lambda^k \mu^l$, $\sum_{k+l=n} b_{kl} \lambda^k \mu^l$ отличен от нуля в Ω, то

$$\sum_{k+l=p} c_{kl} \lambda^k \mu^l = \left(\sum_{k+l=p-n} e_{kl} \lambda^k \mu^l\right) \cdot \left(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'} \lambda^{k'} \mu^{l'}\right)$$

и

$$\sum_{k+l=p} d_{kl} \lambda^k \mu^l = -\left(\sum_{k+l=p-n} e_{kl} \lambda^k \mu^l\right) \cdot \left(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'} \lambda^{k'} \mu^{l'}\right).$$

Полагая

$$E_1 = \sum_{k+l=p-n} e_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}, \quad C = C_1 + E_1 B, \quad D = D_1 - E_1 A,$$

получают $CA+DB=C_1A+D_1B$ и порядки C_1A, D_1B меньше порядков CA, DB; такой процесс может быть продолжен и приводит к доказательству утверждения.

Отсюда следует, что если $CA+DB=0$, то $C=EB$, $D=-EA$. Поэтому единственным достаточным (и необходимым) условием совместности системы (1) является $Bf=Ag$. Далее, система (3) эквивалентна системе независимых уравнений вида

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} Au = \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}, \quad \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} Bu = \frac{\partial^{k+l} g}{\partial x^k \partial y^l} \quad (k+l \leqslant n-2)$$

(пустой при $n<2$). Отсюда следует, что начальные значения производных $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l}$ $(k+l \leqslant n-1)$ остаются произвольными. Ранг системы (3), таким образом, равен $(n-1)n$, и количество линейно независимых решений однородной системы (1) равно $(2n-1)n-(n-1)n=n^2$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в каждой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$, в уравнениях (3) содержится n^2 независимых производных, которые будут называться параметрическими.

2. Теперь будет рассмотрена система

$$Au=Bv, \quad Bu=-Av. \tag{1}$$

Характеристическая функция системы:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k+l=n} a_{kl}\lambda^k\mu^l; & -\sum\limits_{k+l=n} b_{kl}\lambda^k\mu^l \\ \sum\limits_{k+l=n} b_{kl}\lambda^k\mu^l; & \sum\limits_{k+l=n} a_{kl}\lambda^k\mu^l \end{vmatrix}$$

является, очевидно, положительно определенной формой; система (1), таким образом, эллиптическая. Как известно, всякое достаточно гладкое решение такой системы будет аналитическим *). Аналитические в некоторой области $\Omega_1 \subseteq \Omega$ функции u, v, удовлетворяющие этой системе, будут называться сопряженными (эта связь не симметрична). Функция $w=u+iv$, имеющая свойства, обобщающие свойства аналитической функции аргумента $x=iy$, будет называться (A,B)-аналитической. Очевидно, система (1) равносильна уравнению

$$(A+iB)\,w=0. \tag{2}$$

Система $Au=0$, $Bu=0$ имеет, как отмечалось, n^2 линейно независимых решений, аналитических в Ω: $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$. Очевидно, эти функции являются (AB)-аналитическими. При этом всякая (AB)-аналитическая функция w, удовлетворяющая, кроме того, условию $Aw=0$, линейно зависит от

$$\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}.$$

*) Далее это утверждение будет уточнено.

Следующая теорема показывает, что (A, B)-аналитические функции обладают некоторыми обобщенными производными.

Теорема 3. Пусть w, w_0 суть (A, B)-аналитические в общей области $\Omega_1 \subseteq \Omega$ функции, причем $Aw_0 \neq 0$ (или, что равносильно, w_0 не является линейной комбинацией функций $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$). Пусть (x, y), (x_i, y_i) $(i=1, \ldots, n^2)$ суть точки из Ω; пусть в точке $(x, y) \in \Omega_1$ $Aw_0 \neq 0$ и

$$\delta(w; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2}) = \begin{vmatrix} w(x, y) & \omega_1(x, y) \ldots & \omega_{n^2}(x, y) \\ w(x_1, y_1) & \omega_1(x_1, y_1) \ldots & \omega_{n^2}(x_1, y_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w(x_{n^2}, y_{n^2}) & \omega_1(x_{n^2}, y_{n^2}) \ldots & \omega_{n^2}(x_{n^2}, y_{n^2}) \end{vmatrix}.$$

Если $x_i \to x$, $y_i \to y$ $(i=1, \ldots, n^2)$ и притом так, что

$$\frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} \quad (i, j = 1, \ldots, n^2)$$

остаются ограниченными и точки с однородными координатами $(x_1 - x):(y_1 - y): \ldots :(x_{n^2} - x):(y_{n^2} - y)$ не накапливаются около некоторой алгебраической поверхности (определяемой формулой (6) далее), то

$$\frac{\delta(w; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2})}{\delta(w_0; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2})} \longrightarrow \frac{Aw}{Aw_0}.$$

Доказательство. Пусть операторы

$$D_s = \frac{\partial^{i_s + j_s}}{\partial x^{i_s} \partial y^{j_s}} \qquad (s=1, \ldots, n^2)$$

соответствуют параметрическим производным в точке (x, y); в частности, $i_1 = 0$, $j_1 = 0$. По формулам (1), (2), непараметрические производные $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ могут быть в точке (x, y) представлены в виде

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{s=1}^{n^2} c_{kl}^s D_s + P_{kl} A + Q_{kl} B, \tag{3}$$

где P_{kl}, Q_{kl} диференциальные операторы. Пусть теперь $F(X, Y)$ произвольная (комплекснозначная) функция, аналитическая в окрестности (x, y); используя формулы (3), можно разложение Тейлора $F(X, Y)$ представить в виде

$$F(X, Y) = \sum_{s=1}^{n^2} \varphi_s(X, Y) D_s F(x, y) + P(X, Y) AF + Q(X, Y) BF,$$

где $\varphi_s(X, Y)$ $(s=1, \ldots, n^2)$ суть вообще формальные степенные ряды (по $X-x$, $Y-y$), $P(X, Y)$, $Q(X, Y)$ диференциальные операторы (по x, y) бесконечного порядка, коэфициентами которых являются формальные степенные ряды; AF, BF определены в точке x, y. Если $F(X, Y)$ есть (A, B)-аналитическая функция, то $BF=iAF$ и

$$F(X, Y)=\sum_{s=1}^{n^2}\varphi_s(X, Y)D_sF(x, y)+R(X, Y)AF, \tag{4}$$

где $R=P+iQ$; φ_s, P, Q, R не зависят от F.

Пусть $\omega_j (j=1,\ldots, s^2)$ удовлетворяют в точке (x, y) следующим начальным условиям: $D_j\omega_j=1$, $D_s\omega_j=0$ $(s\neq j)$. Заменяя в (4) F через ω_j $(j=1,\ldots, n^2)$, получают

$$\varphi_s(X, Y)=\omega_s(X, Y) \quad (s=1,\ldots, n^2). \tag{5}$$

Следовательно, для всякой (A, B)-аналитической в окрестности (x, y) функции F, RAF есть аналитическая функция X, Y в окрестности (x, y).

Как следует из доказательства теоремы 2, существует ровно две непараметрические производные порядка n: $-\dfrac{\partial^n}{\partial x^{k_1}\partial y^{n-k_1-1}}$, $\dfrac{\partial^n}{\partial x^{k_2}\partial y^{n-k_2}}$ (в точке (x, y)); производные порядка меньшего n — параметрические. Поэтому член наименьшей степени относительно $X-x$, $Y-y$ оператора R имеет вид

$$\psi(X, Y)=r_1(X-x)^{k_1}(Y-y)^{n-k_1}+r_2(X-x)^{k_2}(Y-y)^{n-k_2}; \quad r_1, r_2\neq 0.$$

Члены наименьшей степени в разложении $\omega_s(X, Y)$ по степеням $X-x$, $Y-y$ имеют вид

$$\psi_s(X, Y)=\frac{1}{i_s!\, j_s!}(X-x)^{i_s}(Y-y)^{j_s}+\sum_{k+l=i_s+j_s}e_{kl}^{(s)}(X-x)^k(Y-y)^l$$

где $\dfrac{\partial^{i_s+j_s}}{\partial x^{i_s}\partial y^{j_s}}=D_s$ и, при $e_{kl}^{(s)}\neq 0$, $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}$ не является параметрической производной.

Следовательно, соотношение

$$\begin{vmatrix} \psi(x_1, y_1) & \psi_2(x_2, y_2)\ldots & \psi_{n^2}(x_1, y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi(x_{n^2}, y_{n^2}) & \psi_2(x_{n^2}, y_{n^2})\ldots & \psi_{n^2}(x_{n^2}, y_{n^2}) \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

не является тождеством.

Пусть теперь точки с однородными координатами (x_1-x): $(y_1-y):\ldots:(x_{n^2}-x):(y_{n^2}-y)$ не накапливаются около поверхности (6).

На основании (4), (5), полагая в (4) $F(X, Y)=w(X, Y)$ и заменяя точку (X, Y) последовательно точками (x, y), (x_j, y_j) $(j=1,\ldots, n^2)$, получают без труда

$$\partial(w; x, y; x_1, y_1;\ldots; x_{n^2}, y_{n^2})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ R(x_1, y_1)Aw & \omega_1(x_1, y_1) & \ldots & \omega_{n^2}(x_1, y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R(x_{n^2}, y_{n^2})Aw & \omega_1(x_{n^2}, y_{n^2})\ldots & & \omega_{n^2}(x_{n^2}, y_{n^2}) \end{vmatrix}.$$

Член наименьшей степени в разложении этого выражения по степеням $x_1-x,\ y_1-y, \ldots, x_{n^2}-x,\ y_{n^2}-y$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \psi(x_1, y_1) & \psi_2(x_1 y_1) \ldots & \psi_{n^2}(x_1, y_1) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \psi(x_{n^2}, y_{n^2}) & \psi_2(x_{n^2}, y_{n^2}) \ldots & \psi_{n^2}(x_{n^2}, y_{n^2}) \end{vmatrix} Aw.$$

Так как $Aw_0 \neq 0$, то из сделанных предположений отсюда следует

$$\frac{\delta(w;\, x,\, y;\, x_1,\, y_1;\, \ldots;\, x_{n^2},\, y_{n^2})}{\delta(w_0;\, x,\, y;\, x_1,\, y_1;\, \ldots;\, x_{n^2},\, y_{n^2})} \longrightarrow \frac{Aw}{Aw_0}.$$

Этот же результат сохранится и при произвольном выборе ω_j $(j=1, \ldots, n^2)$, так как при линейном преобразовании ω_j, δ умножается на детерминант преобразования, что и требовалось доказать.

Этот результат делает естественным рассмотрение Aw как обобщенной производной w

Легко видеть, что теорема остается справедливой и в более общих предположениях относительно операторов A, B.

Имеет место очевидная

Теорема 4. Если w есть (A, B)-аналитическая функция, то Aw есть также (A, B)-аналитическая функция в той же области.

3. Здесь будет дано локальное разложение (A, B)-аналитической функции по элементарным (A, B)-аналитическим функциям, разложение, обобщающее Тейлорово.

Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\dfrac{\partial^{i_s+j_s}}{\partial x^{i_s}\, \partial y^{j_s}} = D_s$ $(s=1, \ldots, n^2)$ параметрические производные пары A, B. Пусть $\omega_t^{(0)}$ $(t=1, \ldots, n^2)$ аналитические решения системы $Au=0$, $Bu=0$, удовлетворяющие начальным условиям: при $s \neq t$, $(D_s\omega_t^{(0)})_0=0$ при $s=t$, $(D_s\omega_t^{(0)})_0=1$*). Если $\omega_t^{(p)}$ $(t=1, \ldots, n^2)$ определены и являются функциями (A, B)-аналитическими в окрестности (x_0, y_0), то $\omega_t^{(p+1)}$ обозначает решение системы: $Au=\omega_t^{(p)}$, $Bu=i\omega_t^{(p)}$, удовлетворяющее условиям $(D_s\omega_t^{(p+1)})_0=0$ $(s, t=1, \ldots, n^2)$.

Система $Au=\omega_t^{(p)}$, $Bu=i\omega_t^{(p)}$ разрешима, так как $B\omega_t^{(p)}=A(i\omega_t^{(p)})$; очевидно, $\omega_t^{(p+1)}$ оказывается функцией (A, B)-аналитической в области Ω. Функции $\omega_t^{(p)}$ являются функциями точек (x, y); (x_0, y_0); $\omega_t^{(p)}=\omega_t^{(p)}(x, y; x_0, y_0)$. Имеет место следующая

Теорема 5. Всякая (A, B)-аналитическая в окрестности точки (x_0, y_0) функция w разлагается и притом единственным образом в равномерно и абсолютно сходящийся в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ряд вида

$$w(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(p)}(x, y; x_0, y_0) \cdot D_t A^p w)_0. \tag{1}$$

---

*) Знаком $(\ \ )_0$ обозначается значение выражения в скобках при $x=x_0$, $y=y_0$.

Доказательство. Доказательство распадается на несколько частей. Сначала будет показано, что значения $(D_t A^p w)_0$ $(t=1, \ldots, n^2;$ $p=0, 1, \ldots)$ однозначно определяют функцию w.

Для этого достаточно заметить, что из $Aw=-iBw$ следует, что $(D_t A^p w)_0$ определяют также $(D_t A^p B^q w)_0$ $(t=1, \ldots, n^2;$ $p, q=0, 1, \ldots)$. С другой стороны, каждая производная $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ представима в виде (2), (3):

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} C_t^{(k, l)} D_t + P_{kl} A + Q_{kl} B,$$

где $C_t^{(k, l)}$ — аналитические функции (x, y), P_{kl}, Q_{kl}— операторы порядка не выше $k+l-n$, с аналитическими коэфициентами. Аналогичное преобразование производных, входящих в P_{kl}, Q_{kl} приведет к выражению вида

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} \sum_{p+q \leqslant \left[\frac{k+l}{n}\right]} C_{tpq}^{(k, l)} D_t A^p B^q, \tag{2}$$

где $C_{tpq}^{(k, l)}$ — аналитические функции. Таким образом, значения $(D_t A^p w)_0$ определяют значения $\left(\frac{\partial^{k+l} w}{\partial x^k \partial y^l}\right)_0$ и, следовательно, аналитическую в окрестности (x_0, y_0) функцию w.

Теперь будет показана равномерная и абсолютная сходимость в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ряда формулы (1). Для этого будут получены сначала оценки $\omega_t^{(p)}$ и $(D_t A^p w)_0$. Как видно из формулы (2), при $p \geqslant 1$,

$$\left(\frac{\partial^{k+l} \omega_t^{(p)}}{\partial x^k \partial y^l}\right)_0 = 0 \quad \text{при} \quad k+l \leqslant np-1.$$

Таким образом, при $p \geqslant 1$, согласно (1, 2), функция $\omega^{(p+1)}$ (для простоты нижний индекс t опускается), определяется системой

$$\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^k \partial y^{2n-1-k}} = \sum c_{ij}^{(k)} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} + (P_k + iQ_k) \omega^{(p)} \quad (k=0, 1, \ldots, 2n-1)$$

и нулевыми начальными условиями

$$\left(\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}\right)_0 = 0 \qquad (0 \leqslant i+j \leqslant 2n-2);$$

операторы P_k, Q_k, как выяснилось ранее, имеют порядки $n-1$. Пусть при $|x-x_0| \leqslant r$, $|y-y_0| \leqslant r$, $r \leqslant 2$, $c_{ij}^{(k)}$ и коэфициенты P_k, Q_k аналитичны. Тогда для $c_{ij}^{(k)}$ и коэфициентов P_k, Q_k можно указать мажоранты вида

$$\frac{N}{1 - \frac{x-x_0+y-y_0}{r}}$$

для $\omega^{(p)}$ — мажоранты вида

$$\zeta_p = \frac{M_p \left(2\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}\right)^{np}}{1-2\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}}.$$

Полагая

$$\xi = 2\frac{x-x_0+y-y_0}{r}$$

и замечая, что при $i'+j'>i+j$,

$$\frac{\partial^{i'+j'}\zeta_p}{\partial x^{i'}\,\partial y^{j'}}$$

мажорирует

$$\frac{\partial^{i+j}\zeta_p}{\partial x^i\,\partial y^j},$$

можно представить мажорантную систему в виде

$$\frac{\partial^{2n-1}u}{\partial x^k\,\partial y^{2n-1-k}} = \frac{N}{1-\dfrac{\xi}{2}}\sum_{i+j\leq 2n-2}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\,\partial y^j} + \frac{M_pNn(n-1)}{1-\dfrac{\xi}{2}}\left(\frac{2}{r}\right)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(\frac{\xi^{np}}{1-\xi}\right).$$

Всякое решение этой системы с нулевыми начальными условиями будет мажорировать, как известно, $\omega^{(p+1)}$. Достаточно искать эту мажоранту в виде функции от ξ; тогда для ее определения получают уравнение

$$\frac{d^{2n-1}u}{d\xi^{2n-1}} = \frac{N\left(\dfrac{r}{2}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{\xi}{2}}\sum_{i\leq 2n-2}(i+1)\left(\frac{2}{r}\right)^i\frac{d^iu}{d\xi^i} + \frac{M_pNn(n-1)\left(\dfrac{r}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\xi}{2}}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(\frac{\xi^{np}}{1-\xi}\right) \tag{3}$$

и начальные условия: $\dfrac{d^iu}{d\xi^i}=0$ при $\xi=0$ и $i=0, 1, \ldots, 2n-2$.

Как легко проверить, решение уравнения

$$\frac{d^{2n-1}v}{d\xi^{2n-1}} = \frac{Nn(2n-1)r}{1-\dfrac{\xi}{2}}\frac{d^{2n-2}v}{d\xi^{2n-2}} + \frac{M_pNn(n-1)r^n}{1-\dfrac{\xi}{2}}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(\frac{\xi^{np}}{1-\xi}\right), \tag{4}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям, мажорирует искомое решение уравнения (3).

Из (4), замечая, что при $Nn(2n-1)r\leq 1$,

$$\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left[\frac{\eta^{np}}{\left(1-\dfrac{\eta}{2}\right)^{1-N_1r}(1-\eta)}\right]$$

мажорирует

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r}}\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left(\frac{\eta^{np}}{1-\eta}\right)_1, \qquad (N_1 = Nn(2n-1)),$$

получают для $\omega^{(p+1)}$ мажоранту вида

$$w_{p+1} = M_p N_1 r^n \int\limits_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\eta^{np}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)} d\eta.$$

Интегрируя n раз по частям, получают

$$w_{p+1} = \frac{(-1)^{n-1} M_p N_1 r^n}{(np+1)\ldots(np+n)} \left\{ \frac{\xi^{n(p+1)}}{(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{\xi} \frac{\partial^n}{\partial\eta^n} \left[\frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)} \right] \cdot \eta^{n(p+1)} d\eta \right\}. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой убеждаются, что $\frac{2}{1-\xi}$ мажорирует $\frac{1}{(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)}$. Остается показать, что интеграл в формуле (5) имеет мажоранту вида

$$\frac{N_0 \xi^{n(p+1)}}{1-\xi},$$

где N_0 не зависит от p. Но этот интеграл получается в виде линейной комбинации (с постоянными, не зависящими от p коэфицентами) интегралов вида

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1-i}}{(1-\eta)^{1+j}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1+k}} \eta^{n(p+1)} d\eta \qquad (i+j+k=n, \quad i \leqslant n-1).$$

Достаточно показать, что каждый такой интеграл имеет мажоранту вида

$$\frac{N_0 \xi^{n(p+1)}}{1-\xi}$$

с не зависящим от p коэфициентом N_0, или, что

$$\frac{\xi^{n(p+1)}}{(1-\xi)^{1+j}\left(1-\frac{\xi}{2}\right)^{1+k}}$$

имеет мажоранту вида

$$N_0 \frac{d^{n-i}}{d\xi^{n-i}}\left[\frac{\xi^{n(p+1)}}{1-\xi}\right].$$

Элементарный подсчет (который, для полноты приводится ниже) показывает, что утверждение это справедливо, например, при $N_0=2$. Действительно,

$$\frac{\xi^{n(p+1)}}{(1-\xi)^{i+j}\left(1-\dfrac{\xi}{2}\right)^{1+k}} = \xi^{n(p+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \xi^s \sum_{t=0}^{s} \frac{(s+j-t)!\ (t+k)!}{(s-t)!\ t!} \frac{1}{2^t},$$

$$\frac{d^{n-i}}{d\xi^{n-i}}\left[\frac{\xi^{n(p+1)}}{1-\xi}\right] = \frac{d^{j+k}}{d\xi^{j+k}}\left[\frac{\xi^{n(p+1)}}{1-\xi}\right] = \sum_{s=n(p+1)-j-k}^{\infty} \frac{(s+n+np+j+k)!}{(s+n+np)!}\xi^{s+n(p+1)}.$$

Теперь следует сравнить коэфициенты при одинаковых степенях ξ. Но из вида Эйлерова интеграла первого рода сразу следует

$$\frac{(s-t+j)!\ (t+k)!}{(s+j+k+1)!} \leqslant \frac{(s-t)!\ t!}{(s+1)!}$$

и, следовательно,

$$\sum_{t=0}^{s} \frac{(s+j-t)!\ (t+k)!}{(s-t)!\ t!}\frac{1}{2^t} \leqslant \frac{(s+j+k+1)!}{(s+1)!}\sum_{t=0}^{s}\frac{1}{2^t} <$$

$$< 2\frac{(s+j+k+1)!}{(s+1)!} < 2\frac{(s+n+np+j+k)!}{(s+n+np)!},$$

что и доказывает утверждение.

Итак, получается следующая мажоранта для $\omega^{(p+1)}$:

$$\zeta_{p+1} = \frac{N_2 M_p r^n}{(np+1)\dots(np+n)}\frac{\xi^{n(p+1)}}{1-\xi},$$

где N_2 не зависит от p и, следовательно,

$$M_{p+1} = \frac{M_p N_2 r^n}{(np+1)\dots(np+n)}.$$

Итак,

$$M_p = \frac{M(N_2 r^n)^p}{(np)!},$$

где M не зависит от p и

$$\zeta_p = \frac{M(N_2 r^n)^p}{(np)!}\frac{\xi^{np}}{1-\xi}.$$

Замечая, что $\frac{2}{(1-\xi)^{np}}$ мажорирует $\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)(1-\xi)^{np}}$, индукцией легко установить следующую мажоранту для $A^p w$ $\left(\text{мажорируя коэфициенты } A \text{ функцией } \frac{N}{1-\frac{\xi}{2}} \text{ и } Aw \text{ функцией } \frac{N_3}{1-\xi}\right)$

$$\frac{M_0 (N_4 r^{-n})^p [n(p-1)]!}{(1-\xi)^{n(p-1)}} \qquad (p \geqslant 2).$$

Но тогда

$$|(D_t A^p w)_0| \leqslant (np)!\, M_0 (N_4 r^{-n})^p$$

и при

$$|\xi| \leqslant \frac{1}{2^n \sqrt{N_2 N_4}}$$

ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(p)} (D_t A^p w)_0$$

будет равномерно сходящимся.

Отсюда сразу следует, что сумма этого ряда w_1 есть (A, B)-аналитическая в окрестности точки (x_0, y_0) функция. При этом

$$(D_t A^p w_1)_0 = (D_t A^p w)_0 \qquad (t = 1, \ldots, n^2;\ p = 0, 1, \ldots).$$

Действительно, $A^q \omega_t^{(p)} = 0$ при $q > p$:

$$(D_s A^q \omega_t^{(p)})_0 = 1, \quad (q = p,\ s = t); \quad (D_s A^q \omega_t^{(p)})_0 = 0, \quad (q < p, \text{ или } p = q,\ s \neq t).$$

Почленное диференцирование ряда (1) возможно, ввиду его равномерной сходимости и в комплексной окрестности точки (x_0, y_0). По сделанным ранее замечаниям отсюда следует $w = w_1$, и теорема доказана.

4. Теперь, используя один прием Э. Э. Леви [3], будут даны аналоги теоремы и интегральной формулы Коши. Попутно будет доказано, что всякое n-раз непрерывно диференцируемое решение уравнения $(A + iB) w = 0$ является аналитической функцией x, y.

Пусть

$$A' = \sum_{k+l \leqslant n} (-1)^{k+l} \frac{\partial^{k+l} (a_{kl}^*)}{\partial x^k \partial y^l}, \quad B' = \sum_{k+l \leqslant n} (-1)^{k+l} \frac{\partial^{k+l} (b_{kl}^*)}{\partial x^k \partial y^l}$$

(переход к сопряженным в смысле Лагранжа операторам).

Операторы A', B' обладают всеми свойствами пары A, B. Действительно, характеристические формы операторов A, A' и B, B', соответственно, совпадают и из $AB = BA$ следует $B'A' = A'B'$.

Пусть $\omega_1', \ldots, \omega_{n^2}'$ суть линейно независимые, аналитические в Ω решения системы $A'u=0$, $B'u=0$.

Пусть

$$vAu-uA'v=\frac{\partial}{\partial x}N(u, v)-\frac{\partial}{\partial y}M(u, v),$$

$$vBu-uB'v=\frac{\partial}{\partial x}Q(u, v)-\frac{\partial}{\partial y}P(u, v),$$

где M, N, P, Q известные диференциальные билинейные формы.

Если $w=u+iv$ произвольная (A, B)-аналитическая и $w'-(A', B')$-аналитическая функция в области $\Omega_1\subseteq\Omega$ и C кусочно-гладкий контур, лежащий в Ω_1, то из формулы Грина непосредственно следует

$$\int_C\left\{M(w, w')+iP(w, w')\right\}dx+\left\{N(w, w')+iQ(w, w')\right\}dy=0.$$

В частности,

$$\int_C\left\{M(w, \omega_s')+iP(w, \omega_s')\right\}dx+\left\{N(w, \omega_s')+iQ(w, \omega_s')\right\}dy=0 \qquad (1)$$
$$(s=1, \ldots, n^2).$$

Эти последние формулы и представляют аналог теоремы Коши. Действительно, имеет место

Теорема 6. Если w есть непрерывно диференцируемая n раз функция в области $\Omega_1\subseteq\Omega$ и для всякого кусочно-гладкого контура C в этой области имеют место формулы (1), то

$$(A+iB)w=0.$$

Отсюда, как будет показано далее, будет следовать (A, B)-аналитичность функции w.

Пусть (x_0, y_0) произвольная точка из Ω_1 и C окружность круга S произвольно малого радиуса с центром (x_0, y_0). Из теоремы 1 следует существование аналитического действительного решения ω' системы $A'u=0$, $B'u=0$, удовлетворяющего условию $\omega'(x_0, y_0)=1$. При этом ω' линейно зависит от $\omega_1', \ldots, \omega_{n^2}'$. Следовательно,

$$\int_C\left\{M(w, \omega')+iP(w, \omega')\right\}dx+\left\{N(w, \omega')+iQ(w, \omega')\right\}dy=0$$

и

$$\iint_S\omega'(A+iB)w\,dx\,dy=0.$$

Отсюда

$$\iint_S\omega'(Au-Bv)\,dx\,dy=0, \qquad \iint_S\omega'(Av+Bu)\,dx\,dy=0.$$

Из произвольности (x_0, y_0) и радиуса S отсюда непосредственно следует $Au=Bv$ и $Bu=-Av$, что и требовалось доказать.

Если система $A'u=0$, $B'u=0$ обладает решением ω'_1, сохраняющим постоянный знак, то заключение теоремы 6 сохраняется при выполнении одного из соотношений (1), именно соответствующего $s=1$.

Для линейных уравнений с двумя аргументами эллиптического типа (и для некоторых более общих случаев), в случае аналитических коэфициентов, Э. Э. Леви показал [3] существование фундаментального решения и, на основании этого, аналитичность в некоторой области всякого решения с непрерывными производными до порядка равного порядку уравнения.

Незначительным видоизменением метода Э. Э. Леви можно получить доказательство существования фундаментального решения непосредственно для уравнения $(A+iB)w=0$ и показать, что всякое n раз непрерывно диференцируемое решение этого уравнения, по крайней мере, в области $\Omega_1 \subseteq \Omega$, в которой корни уравнения

$$f(\Theta)=\sum_{k+l=n}(a_{kl}+ib_{kl})\Theta^l=0$$

не меняют кратности, является аналитической и, следовательно, (A, B)-аналитической функцией.

Доказательство этого может быть проведено совершенно так же, как и в случае, рассмотренном Э. Э. Леви (уравнения с действительными коэфициентами), и здесь опускается. Некоторых замечаний требует только определение главного члена фундаментального решения.

Главный член $\psi(x, y; x_0, y_0)$ фундаментального решения является решением уравнения

$$\sum[a_{kl}(x_0, y_0)+ib_{kl}(x_0, y_0)]\frac{\partial^{k+l}w}{\partial x^k\partial y^l}=0$$

и имеет особенность в точке $(x_0, y_0)\in\Omega_1$.

При $n=1$,

$$\psi(x, y; x_0, y_0)=\frac{1}{x-x_0+\Theta(y-y_0)},$$

где Θ определяется уравнением первой степени $f(\Theta)=0$.

При $n\geqslant 2$, если $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ суть различные корни кратностей, соответственно, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ уравнения $f(\Theta)=0$, то

$$\psi(x, y; x_0, y_0)=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\frac{\partial^{\varkappa_k-1}}{\partial\Theta^{\varkappa_k-1}}\left\{[x-x_0+\Theta(y-y_0)]^{n-2}\lg[x-x_0+\Theta(y-y_0)]\right\}_{\Theta=\Theta_k};$$

постоянные α_k подбираются так, чтобы ψ было однозначной функцией, что оказывается всегда возможным *).

В частности, если корни уравнения $f(\Theta)$ простые, можно положить, например, $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k \operatorname{sign} \operatorname{Im} \Theta_k$, где α_k есть определитель Вандермонда последовательности $\Theta_1, \ldots, \Theta_{k-1}, \Theta_{k+1}, \ldots, \Theta_n$.

Пусть $\Phi(x, y; \xi, \eta)$ есть фундаментальное решение (по x, y) уравнения $(A' + iB')w = 0$, пронормированное так, что для всякой непрерывной вместе с производными до порядка $n-1$ функции $u(x, y)$

$$\int_\gamma [M(u, \Phi)+iP(u, \Phi)]\,dx+[N(u, \Phi)+iQ(u, \Phi)]\,dy \to 2\pi i\, u(\xi, \eta),$$

если спрямляемый контур γ, окружающий (ξ, η), стягивается к точке (ξ, η).

Тогда из формулы Грина непосредственно получается следующий аналог интегральной формулы Коши для (A, B)-аналитической в области Ω_1 и на кусочно-гладкой границе C этой области функции w:

$$w(\xi, \eta)= \frac{1}{2\pi i}\int_C [M(w, \Phi)+iP(w, \Phi)]\,dx+[N(w, \Phi)+iQ(w, \Phi)]\,dy,$$

для всякой точки (ξ, η) из Ω_1.

5. Здесь в виде примера будет разобран случай

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad B=2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y},$$

связанный с бигармоническим уравнением. Действительно, функции u, v, определяемые системой

$$Au=Bv, \quad Bu=-Av,$$

очевидно, бигармонические (естественно назвать их сопряженными бигармоническими функциями).

Независимыми решениями системы

$$Au=0, \quad Bu=0$$

являются, например, 1, x, y, x^2+y^2.

Если заметить, что в разложении (3, 1) при линейном преобразовании $\omega_1, \ldots, \omega_n$, при каждом p функции $\omega_1^{(p)}, \ldots, \omega_{n^2}^{(p)}$ меняютсяконгредиентно, то разложение (3, 1) можно представить в более общей форме

$$w= \sum_{p=0}^{\infty}{}' \sum_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(p)} (L_t A^p w)_0,$$

*) Легко видеть, что уравнение $f(\Theta)$ не имеет действительных корней.

где L_t операторы не выше порядка n со свойством: $(L_t\omega_s^{(0)})_0=\delta_{st}$ (δ_{st} — символ Кронекера) (контрагредиентно преобразующиеся из D_t). Если положить $\omega_1=1$, $\omega_2=x+iy$, $\omega_3=x+iy$, $\omega_4=x^2+y^2$ и принять (0, 0) за начальную точку, то $\omega_t^{(p)}$, с точностью до постоянных множителей, будут иметь вид или $(x+iy)^q$ или $(x+iy)^q(x-iy)$.

Таким образом, из теоремы 5 получается известное разложение Гурса бигармонической функции.

Далее, операторы A, B — самосопряженные. Билинейные формы M, N, P, Q имеют вид

$$M(u, v)=v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad N(u, v)=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$P(u, v)=-v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q(u, v)=v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Теорема 6 в данном случае позволяет утверждать, что для бианалитичности w (в предположении непрерывности вторых производных) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_C\left(\frac{\partial w}{\partial y}-i\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy=0$$

для всякого кусочно-гладкого замкнутого пути C; или:

$$\int\limits_C\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)d(x+iy)=0.$$

Далее, фундаментальное решение уравнения $(A+iB)w=0$ можно принять в форме

$$\Phi(x, y; \xi, \eta)=-\frac{y-\eta}{x-\xi+i(y+\eta)}.$$

Тогда интегральное представление бианалитической функции примет вид

$$w(\xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left\{w\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\Phi\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}(dx+i\,dy)$$

или

$$w(\xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{(y-\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)-iw}{x-\xi+i(y-\eta)}d(x+iy).$$

Формулы эти не новы. Новым, однако, повидимому, является факт существования предела

$$\frac{\begin{vmatrix} w(x, y) & 1 & x & y & x^2+y^2 \\ w(x_1, y_1) & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ w(x_2, y_2) & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ w(x_3, y_3) & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \\ w(x_4, y_4) & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \zeta(x, y) & 1 & x & y & x^2+y^2 \\ \zeta(x_1, y_1) & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ \zeta(x_2, y_2) & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ \zeta(x_3, y_3) & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \\ \zeta(x_4, y_4) & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}},$$

при описанном в теореме 3 сближении точек (x, y); (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4). При этом, если положить

$$\zeta(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{4} + i\frac{xy}{2},$$

то пределом этого отношения будет как раз

$$Aw = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, т. I; вып. 3-4 (13-14), 1946, стр. 44—70.

2. Г. Н. Положий, О p-аналитических функциях комплексного переменного. Доклады АН СССР, т. LVIII, № 7, 1947, стр. 1275—1278.

3. Е. Е. Леви, О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. Успехи матем. наук, вып. VIII, 1941, стр. 249—292.

Поступило 12.XI 1949.