1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О некоторых типах расширений эрмитовых операторов

М. А. Красносельский

В настоящей статье рассматриваются два типа расширений эрмитова оператора. Во-первых, изучаются расширения, область определения которых имеет замыкание, совпадающее с замыканием области определения расширяемого оператора. Такие расширения [3б] называются уплотняющими. Во-вторых, для операторов с неплотной областью определения устанавливается существование расширений с выходом в расширенное пространство, для которых пересечение области определения с пространством, в котором ранее действовал расширяемый оператор, есть область определения расширяемого оператора. Такие расширения согласно М. А. Наймарку [1] называются расширениями второго рода.

Часть утверждений статьи была приведена без доказательств в [3б].

Существенным образом в статье используются результаты из [3г]. Здесь сохранены также определения и обозначения из [3г] (для удобства читателя часть из них мы повторяем в § 1).

§ 1

1. Пусть A — эрмитов (не обязательно замкнутый) оператор с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, множеством значений $\mathfrak{R}(A)$, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$. Замыкание множества $\mathfrak{D}(A)$ обозначим через $\mathfrak{D}$. Ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}$) — через $\mathfrak{B}$.

Множество $\mathfrak{R}(A-\lambda E)$ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), где E — оператор тождественного преобразования, обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda$. Ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к $\overline{\mathfrak{L}_\lambda}$ — через $\mathfrak{N}_\lambda$. Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ называется λ-дефектным подпространством оператора A. Размерности λ-дефектных подпространств одинаковы для всех λ из одной (верхней или нижней) полуплоскости комплексной плоскости [3а], [2] — это общая размерность называется дефектным числом оператора A в соответствующей полуплоскости комплексной плоскости.

Через $\mathfrak{M}_\lambda$ обозначим проекцию $\mathfrak{B}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$. Как легко видеть, оператор $P_{\mathfrak{N}_\lambda}$ ортогонального проектирования на $\mathfrak{N}_\lambda$ устанавливает между элементами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ одноодназначное соответствие (подпространства $\mathfrak{B}$ и $\overline{\mathfrak{M}_\lambda}$ образуют правильную пару [4]).

Лемма 1. *Линейное множество $\mathfrak{M}_\lambda$ является подпространством (замкнуто) тогда и только тогда, когда раствор между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ меньше единицы*

$$\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) < 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_\lambda$ — подпространство. Тогда, в силу известной теоремы Банаха-Шаудера (см. например [5], стр. 278) оператор B, определенный на $\mathfrak{M}_\lambda$ равенством

$$BP_{\mathfrak{N}_\lambda} h = h \qquad (h \in \mathfrak{B})$$

непрерывен, то есть

$$\|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\| \geqslant k\|h\| \qquad (h \in \mathfrak{B};\ k > 0).$$

Отсюда

$$\|h - P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|^2 = \|h\|^2 - \|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|^2 \leqslant (1 - k^2)\|h\|^2$$

и

$$\left\| P_{\mathfrak{N}_\lambda} h - \frac{\|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|^2}{\|h\|^2} h \right\|^2 \leqslant (1 - k^2)\|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|^2.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) \leqslant \sqrt{1 - k^2}.$$

Пусть теперь

$$\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) = \alpha < 1.$$

Тогда, в частности, для любого $h \in \mathfrak{B}$

$$\|h - P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\| \leqslant \alpha\|h\|,$$

или, что то же,

$$\|h\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|.$$

Таким образом, оператор B непрерывен. Для доказательства замкнутости $\mathfrak{M}_\lambda$ рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{M}_\lambda$ и покажем, что ее предел также является проекцией некоторого элемента из $\mathfrak{B}$. В силу непрерывности оператора B последовательность $\{B\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{B}$ также будет фундаментальной; обозначим ее предел через h. Очевидно,

$$\|\varphi_n - P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\| \leqslant \|B\varphi_n - h\|,$$

откуда

$$\lim_{h \to \infty} \|\varphi_n - P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\| = 0.$$

Лемма доказана.

---

*) Раствором [2], [4] между линейными множествами $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называется число $\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, определяемое равенством

$$\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \max\left\{ \sup_{\varphi_1 \in \mathfrak{L}_1, \|\varphi_1\| = 1} \varrho(\varphi_1, \mathfrak{L}_2), \sup_{\varphi_2 \in \mathfrak{L}_2, \|\varphi_2\| = 1} \varrho(\varphi_2, \mathfrak{L}_1) \right\}.$$

Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}'_\lambda$ в $\mathfrak{N}_\lambda$ к $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$:

$$\mathfrak{N}'_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \ominus \overline{\mathfrak{M}}_\lambda$$

называется λ-полудефектным подпространством оператора A. Полудефектные подпространства оператора A совпадают с дефектными подпространствами эрмитова оператора $P_\mathfrak{D} A$, действующего в пространстве $\mathfrak{D}$, — отсюда следует, что размерности λ-полудефектных подпространств одинаковы для всех λ из одной (верхней или нижней) полуплоскости комплексной плоскости; эта общая размерность называется полудефектным числом оператора A в соответствующей полуплоскости комплексной плоскости.

2. Преобразование Кели оператора A обозначим через U_λ

$$U_\lambda = (A - \bar\lambda E)(A - \lambda E)^{-1} \qquad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0).$$

Изометрический оператор U_λ определен на $\mathfrak{L}_\lambda$, множеством его значений является $\mathfrak{L}_{\bar\lambda}$.

Существенную роль в дальнейшем играет изометрический оператор V_A [3б, в, г], определяемый равенством

$$V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = P_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}} h \qquad (h \in \mathfrak{B}).$$

Оператор V_A определен на $\mathfrak{M}_\lambda$, множеством его значений является $\mathfrak{M}_{\bar\lambda}$. Изометричность оператора V_A следует из легко проверяемого тождества

$$\overline{U}_\lambda P_{\overline{\mathfrak{L}}_\lambda} h = P_{\overline{\mathfrak{L}}_{\bar\lambda}} h \qquad (h \in \mathfrak{B}).$$

Из леммы 1 следует, что *оператор V_A замкнут тогда и только тогда, когда*

$$\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) < 1.$$

Важное свойство оператора V_A выражает следующее утверждение.

Лемма 2. *Изометрический оператор $\overline{U}_\lambda \oplus V_A$**) *оставляет инвариантным каждый элемент из* $\mathfrak{B}$:

$$(\overline{U}_\lambda \oplus V_A) h = h \qquad (h \in \mathfrak{B}).$$

3. Изометрическое расширение $\tilde U_\lambda$ оператора U_λ называется допустимым, если при $\varphi \neq 0$ $(\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde U_\lambda))$ (всегда $\tilde U_\lambda \varphi \neq \varphi$. Между до-

*) Пусть A и B — такие операторы, что $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B) = 0$. Символом $A \dotplus B$ обозначается оператор, определенный на элементах вида $\varphi + \psi$ $(\varphi \in \mathfrak{D}(A),\ \psi \in \mathfrak{D}(B))$ равенством $(A \dotplus B)(\varphi + \psi) = A\varphi + B\psi$. Этот оператор называется прямой суммой операторов A и B. Если $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{D}(B)$ ортогональны, то прямую сумму операторов A и B называют ортогональной и обозначают ее через $A \oplus B$.

пустимыми расширениями $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ и всеми эрмитовыми расширениями $\tilde{A}$ оператора A соотношения

$$\tilde{A}=(\lambda\tilde{U}_\lambda-\bar{\lambda}E)(\tilde{U}_\lambda-E)^{-1} \qquad (1,1)$$

и

$$\tilde{U}_\lambda=(\tilde{A}-\bar{\lambda}E)(\tilde{A}-\lambda E)^{-1} \qquad (1,2)$$

устанавливают одноoднозначное соответствие.

Лемма 3. *Если для некоторого изометрического расширения $\tilde{U}_\lambda$ (не являющегося допустимым) оператора U_λ и для некоторого h имеет место*

$$\tilde{U}_\lambda h=h,$$

то $h\in\mathfrak{B}$ *и*

$$\bar{\tilde{U}}_\lambda P_{\mathfrak{N}_\lambda}h=V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda}h=P_{\mathfrak{N}_\lambda}h.$$

Из этой леммы следует, что *изометрическому расширению $\tilde{U}_\lambda$ преобразования Кели U_λ замкнутого эрмитова оператора A соответствует по* (1,1) *эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A тогда и только тогда, когда из $\tilde{U}_\lambda\varphi=V_A\varphi$ ($\varphi\in\mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda)\cap\mathfrak{M}_\lambda$) вытекает, что $\varphi=0$.*

§ 2

1. Эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A называется уплотняющим, если

$$\mathfrak{D}(\tilde{A})\subset\mathfrak{D}.$$

Эрмитов оператор, не имеющий уплотняющих расширений, называется полумаксимальным.

Нас будет интересовать возможность построения уплотняющих и, в частности, замкнутых полумаксимальных расширений. Кроме этого, будут установлены признаки полумаксимальности операторов.

Как будет выяснено ниже, свойство полумаксимальности оператора абсолютно. Таким образом, если оператор A полумаксимален, то это значит, что он не допускает „разумных" доопределений ни на одном дополнительном элементе из $\overline{\mathfrak{D}(A)}$; если оператор A не имеет замкнутых полумаксимальных расширений, то это значит, что „разумные максимальные" доопределения оператора A должны производиться с выходом области определения из $\overline{\mathfrak{D}(A)}$.

2. Теорема 1. *Эрмитов оператор $\tilde{A}$ будет уплотняющим расширением замкнутого эрмитова оператора A тогда и только тогда, когда он определен на элементах f вида*

$$f=g+\varphi-\bar{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi-UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi$$

равенством

$$\tilde{A}f=Ag+\bar{\lambda}\varphi-\lambda(\bar{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi+UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi),$$

где $g\in\mathfrak{D}(A)$, а φ пробегает некоторое линейное множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{N}_\lambda$, не пересекающееся с $\mathfrak{M}_\lambda$; оператор U — изометрический, определенный *на* $P_{\mathfrak{N}'_\lambda}$ *с множеством значений в* $\bar{\lambda}$*-полудефектном подпространстве* $\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}}$.

Доказательство. Как известно, каждое эрмитово расширение $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A определено на элементах f вида

$$f = g + \varphi - U'\varphi \tag{2,1}$$

равенством

$$\tilde{A}f = Ag + \bar{\lambda}\varphi - \lambda U'\varphi, \tag{2,2}$$

где $g \in \mathfrak{D}(A)$, а φ пробегает некоторое линейное множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}_\lambda$, оператор U' — изометрический с множеством значений $\subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, не принимающий ни на одном элементе на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\lambda$ таких значений, какие принимает оператор V_A. При этом преобразования Кели $\tilde{U}_\lambda$ и U_λ операторов $\tilde{A}$ и A связаны равенством $\tilde{U}_\lambda = U_\lambda \oplus U'$.

Если $\tilde{A}$ — уплотняющее расширение оператора A, то в силу леммы 2 у оператора $\tilde{U}_\lambda$ существует изометрическое расширение W, оставляющее инвариантным каждый элемент $h \in \mathfrak{B}$. В силу этого область определения оператора $\tilde{U}_\lambda$ не пересекается с $\mathfrak{M}_\lambda$. Так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda)$, то в частности

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\lambda = 0.$$

В силу леммы 3 оператор W будет изометрическим расширением и оператора $\tilde{U}_\lambda$ и оператора V_A. Значит, он будет изометрическим расширением оператора $\tilde{U}_\lambda \dotplus V_A$. Отсюда следует, что оператор $\tilde{U}_\lambda \dotplus V_A$ (как часть изометрического) будет изометрическим. Будет изометрическим и оператор $\overline{U' \dotplus V_A}$. Наконец, как часть последнего будет изометрическим оператор U, определенный на $P_{\mathfrak{N}'_\lambda}\mathfrak{A}$ равенством

$$UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi = U'\varphi - \overline{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi \qquad (\varphi \in \mathfrak{A}).$$

Так как

$$U'\varphi = (U' \dotplus V_A)\varphi \qquad (\varphi \in \mathfrak{A})$$

и

$$V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = (U' \dotplus V_A) P_{\mathfrak{N}_\lambda} h \qquad (h \in \mathfrak{B})$$

и оператор $U' \dotplus V_A$ изометричен, то

$$(U'\varphi,\ V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) = (\varphi,\ P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) \qquad (\varphi \in \mathfrak{A},\quad h \in \mathfrak{B}).$$

Замечая еще, что

$$(\overline{V}_A P_{\mathfrak{M}_\lambda}\varphi,\ V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) = (P_{\mathfrak{M}_\lambda}\varphi,\ P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) = (\varphi,\ P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) \qquad (\varphi \in \mathfrak{A},\quad h \in \mathfrak{B}),$$

получим

$$(UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi,\ P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} h) = (U'\varphi,\ V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) - (\overline{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi,\ V_A P_{\mathfrak{N}_\lambda} h) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{A},\ h \in \mathfrak{B}).$$

Таким образом $\mathfrak{R}(U) \subset \mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}}$. Этим окончательно доказана необходимость условий теоремы.

Перейдем к доказательству достаточности этих условий.

Обозначим через U' оператор, определенный на элементах $\varphi \in \mathfrak{A}$ равенством

$$U'\varphi = UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi + \overline{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi.$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$, $\psi \in \mathfrak{M}_\lambda$. Тогда

$$(U' \dot{+} V_A)(\varphi + \psi) = UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi + \overline{V}_A P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi + V_A\psi$$

и, так как по условию теоремы $UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi \in \mathfrak{N}'_{\bar\lambda}$, то

$$\|(U' \dot{+} V_A)(\varphi + \psi)\|^2 = \|UP_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi\|^2 + \|\overline{V}_A(P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi + \psi)\|^2 = \|P_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi\|^2 + \|P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi + \psi\|^2.$$

Очевидно, и

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|P_{\mathfrak{N}'_\lambda}\varphi\|^2 + \|P_{\overline{\mathfrak{M}}_\lambda}\varphi + \psi\|^2.$$

Значит, операторы U' и $U' \dot{+} V_A$ изометричны.

Так как $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_\lambda = 0$, то $U_\lambda \oplus U'$ будет допустимым расширением оператора U_λ. Этому расширению $\tilde{U}_\lambda = U_\lambda \oplus U'$ соответствует эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A, определяемое формулами (2,1) и (2,2).

Расширение $\tilde{A}$ будет уплотняющим, так как $\tilde{U}_\lambda$ имеет изометрическое расширение $\tilde{U}_\lambda \dot{+} V_A = U_\lambda \oplus (U' \dot{+} V_A)$, оставляющее инвариантным каждый элемент $h \in \mathfrak{B}$, откуда по лемме 3 подпространство $\mathfrak{B}$ ортогонально $\mathfrak{D}(\tilde{A})$.

Теорема доказана.

Если уплотняющему расширению $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A соответствует преобразование Кели $\tilde{U}_\lambda$, то, как было выяснено при доказательстве теоремы 1, оператор $\tilde{U}_\lambda \dot{+} V_A$ является изометрическим. Следовательно, $\tilde{U}_\lambda$ является частью изометрического оператора U^0, имеющего вид

$$U^0 = U_\lambda \oplus \overline{V}_A \oplus \check{U},$$

где $\check{U}$ — изометрический оператор, для которого

$$\mathfrak{D}(\check{U}) \subset \mathfrak{N}'_\lambda, \quad \mathfrak{R}(\check{U}) \subset \mathfrak{N}'_{\bar\lambda},$$

причем $\mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda) \cap \mathfrak{M}_\lambda = 0$.

Таким образом, *все уплотняющие (замкнутые и незамкнутые) расширения $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A порождаются допустимыми расширениями $\tilde{U}_\lambda$ оператора $\tilde{U}_\lambda$, имеющими вид $\tilde{U}_\lambda = U_\lambda \oplus U'$, где U' — такая часть оператора $\overline{V}_A \oplus \check{U}$, что $\mathfrak{D}(U') \cap \mathfrak{M}_\lambda = 0$.*

3. Последнее утверждение указывает путь конструирования уплотняющих расширений оператора A. При этом ясно, что уплотняющие расширения нельзя строить в том и только в том случае, когда оператор $U_\lambda \oplus V_A$ полуунитарен (изометрический оператор называется полуунитарным, если либо $\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{H}$, либо $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{H}$). Это дает нам признак полумаксимальности замкнутого эрмитова оператора.

Теорема 2. *Замкнутый эрмитов оператор A полумаксимален тогда и только тогда, когда оператор V_A замкнут и одно из полудефектных чисел оператора A равно нулю.*

Из теоремы 2 следует, что для замкнутого эрмитова оператора A раствор $\theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda)$ либо для всех λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) меньше 1, либо для всех λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) равен 1.

Приведем еще один просто устанавливаемый признак полумаксимальности: *допускающий или не допускающий замыкание эрмитов оператор полумаксимален тогда и только тогда, когда для некоторого* λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$)

$$\mathfrak{L}_\lambda \dotplus \mathfrak{B} = \mathfrak{H}.$$

4. Займёмся теперь вопросом существования замкнутых*) уплотняющих расширений. Для того чтобы применить теорему 2, нужно выяснить, как изменится оператор V_A при построении уплотняющего расширения.

Лемма 4. *Пусть A — замкнутый эрмитов оператор. Пусть оператор V_A незамкнут. Тогда для любого уплотняющего расширения $\tilde{A}$ оператора A оператор $V_{\tilde{A}}$ тоже незамкнут.*

Доказательство. Так как оператор $V_{\tilde{A}}$ незамкнут, то для любого положительного $\alpha < 1$ найдется элемент $h_\alpha \in \mathfrak{B}$ ($\|h_\alpha\| = 1$) такой, что

$$\varrho(h_\alpha, \mathfrak{M}_\lambda) = \varrho(h_\alpha, \mathfrak{N}_\lambda) > \alpha.$$

Для любого расширения $\tilde{A}$ дефектные подпространства включены в дефектные подпространства оператора A. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda$ дефектное подпространство оператора $\tilde{A}$. Так как $\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda$, то

$$\varrho(h_\alpha, P_{\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda}\mathfrak{B}) = \varrho(h_\alpha, \tilde{\mathfrak{N}}_\lambda) \geqslant \varrho(h_\alpha, \mathfrak{N}_\lambda) > \alpha$$

и в силу произвольности α ($0 < \alpha < 1$)

$$\theta(\mathfrak{B}, P_{\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda}\mathfrak{B}) = 1.$$

Значит, по лемме 1 оператор $V_{\tilde{A}}$ не замкнут.

Лемма доказана.

Отметим, что лемма справедлива только для уплотняющих расширений, так как при расширениях других типов множество элементов, ортогональных к области определения, уменьшается. Например, для максимальных или, в частности, самосопряженных расширений $\tilde{A}$ замкнутого эрмитова оператора A (для которого V_A может быть незамкнут) оператор $V_{\tilde{A}}$ всегда замкнут, так как он определен только на нуле пространства $\mathfrak{H}$.

*) Полумаксимальные необязательно замкнутые расширения существуют у любого эрмитова оператора.

Теорема 3. *Замкнутый эрмитов оператор A допускает замкнутые полумаксимальные расширения тогда и только тогда, когда оператор V_A замкнут.*

Доказательство. Из леммы 4 следует необходимость условия теоремы. Остается показать его достаточность.

Пусть λ-полудефектное число оператора не больше $\bar{\lambda}$-полудефектного числа. Обозначим через U оператор, изометрически отображающий $\mathfrak{N}'_\lambda$ в $\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}}$. Оператору $\tilde{U}_\lambda = U_\lambda \oplus U$ по теореме 1 будет соответствовать уплотняющее расширение $\tilde{A}$ оператора A, которое по теореме 2 будет полумаксимальным.

Теорема доказана.

Заметим еще, что если оператор V_A замкнут, то для некоторых уплотняющих расширений $\tilde{A}$ оператора A оператор $V_{\tilde{A}}$ может оказаться незамкнутым. Приведем пример.

Пусть A — замкнутый эрмитов оператор, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения, со счетномерными дефектными подпространствами $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — другое счетномерное унитарное пространство. Если оператор A рассматривать действующим в пространстве $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}$, то для него $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{H}_1$, а оператор V_A — замкнутый оператор тождественного преобразования в $\mathfrak{H}_1$.

Выберем в $\mathfrak{N}_\lambda$ и в $\mathfrak{H}_1$ ортонормированные базисы и обозначим их соответственно через $\{\varphi_n\}_1^\infty$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$. Пусть $\mathfrak{N}^*_\lambda$ — замыкание линейной оболочки элементов вида $\psi_n + n\varphi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что $\mathfrak{N}^*_\lambda \cap \mathfrak{H}_1 = 0$ и что $\theta(P_{\mathfrak{N}^*_\lambda}\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1) = 1$.

Определим на ортогональном дополнении $\mathfrak{L}^*_\lambda$ к $\mathfrak{N}^*_\lambda$ в $\mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{H}_1$ оператор U' равенством

$$U'h = V_A P_{\mathfrak{H}_1} h + U P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = P_{\mathfrak{H}_1} h + U P_{\mathfrak{N}_\lambda} h \qquad (h \in \mathfrak{L}^*),$$

где U — оператор, изометрически отображающий $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Оператор U' — изометрический. По теореме 1 оператору $\tilde{U}_\lambda = U_\lambda \oplus U'$ соответствует замкнутое уплотняющее расширение $\tilde{A}$ оператора A.

Для оператора $\tilde{A}$ одним из дефектных подпространств будет $\mathfrak{N}^*_\lambda$, а так как $\theta(P_{\mathfrak{N}^*_\lambda}\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1) = 1$, то из леммы 1 следует, что оператор $V_{\tilde{A}}$ незамкнут.

5. Пусть A — замкнутый эрмитов оператор, заданный действующим в пространстве $\mathfrak{H}$. Будем считать теперь, что он действует в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$. При этом полудефектные подпространства оператора A не изменятся, а область определения оператора V_A получит ортогональное слагаемое $\mathfrak{H}_1$, на котором оператор V_A — это оператор тождественного преобразования. Ясно, что замкнутость или незамкнутость оператора V_A при этом не изменяется.

Поэтому *свойства замкнутого эрмитова оператора иметь замкнутые полумаксимальные расширения или быть полумаксимальным абсолютны.*

§ 3

1. Пусть снова A — замкнутый эрмитов оператор, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$. Расширение $\tilde{A}$ оператора A с выходом в пространство $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$ называется согласно М. А. Наймарку [1] расширением **второго рода**, если

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{D}(A). \tag{3.1}$$

Теорема 4. *Каждый замкнутый эрмитов оператор A имеет самосопряженные расширения второго рода.*

Доказательство. Пусть у оператора A дефектные числа $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$. Будем рассматривать A в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — унитарное пространство бесконечной размерности не меньшей чем $\mathfrak{m}$. Пусть U — оператор, изометрически отображающий $\mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$ так, что из $U\varphi = \varphi$ следует, что $\varphi = 0$. Тогда оператор

$$U_\lambda^0 = U_\lambda \oplus U$$

будет допустимым расширением оператора U_λ, так как из

$$(U_\lambda \oplus U)\, \varphi = \varphi$$

следует, что $\varphi \in \mathfrak{H}_1$, значит $U\varphi = \varphi$ и $\varphi = 0$. Полуунитарному оператору U_λ^0 соответствует по (1,1) замкнутое эрмитово расширение A^0 оператора A, удовлетворяющее условию (3,1), ибо если

$$g_0 = U\varphi - \varphi \in \mathfrak{H} \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathfrak{H}_1),$$

где

$$\varphi = \varphi_1 + \psi_1 \qquad (\varphi_1 \in \dot{\mathfrak{N}}_\lambda,\ \psi_1 \in \mathfrak{H}_1),$$

то

$$g_0 = \varphi_1$$

и

$$U\varphi_1 + U\psi_1 = \psi_1,$$

откуда $\varphi_1 = 0$, $U\psi_1 = \psi_1$ и $\psi_1 = 0$.

Оператор A^0 по теореме 2 полумаксимален, а так как это свойство абсолютно, то все его самосопряженные расширения $\tilde{A}$ с выходом в любое пространство $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$ будут самосопряженными расширениями второго рода оператора A.

Теорема доказана.

2. Пусть $\tilde{A}$ — эрмитово расширение второго рода с выходом в пространство $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ эрмитова оператора A_1, действующего в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Пусть A_2 такая часть оператора $\tilde{A}$, что $\mathfrak{D}(A_2) \subset \mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{D}(\tilde{A})$. Дефектные подпространства оператора $A_1 \oplus A_2$, действующего в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda^0$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^0$.

Через U_λ^0 $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ обозначим преобразование Кели оператора $A_1 \oplus A_2$. Тогда преобразование Кели $\tilde{U}_\lambda$ оператора $\tilde{A}$ можно представить, как обычно, в виде

$$\tilde{U}_\lambda = U_\lambda^0 \oplus U,$$

где U — некоторый изометрический оператор $(\mathfrak{D}(U) \subset \mathfrak{N}_\lambda^0,\ \mathfrak{R}(U) \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^0)$.

Следуя М. А. Наймарку, будем говорить, что операторы A_2 и U определяют расширение $\tilde{A}$ оператора A_1.

Легко показать, что операторы A_2 и U *определяют эрмитово расширение второго рода* $\tilde{A}$ *оператора* A_1 *тогда и только тогда, когда выполняется условие М. А. Наймарка:* из

$$f_2 + P_{\mathfrak{H}_2}\varphi + P_{\mathfrak{H}_2}U\varphi = 0 \qquad (f_2 \in \mathfrak{D}(A_2),\ \varphi \in \mathfrak{N}_\lambda^0)$$

следует

$$f_2 = \varphi = 0.$$

3. Предложения настоящего параграфа для самосопряженных расширений второго рода эрмитовых операторов с плотной областью определения были установлены в [1] М. А. Наймарком другим путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Наймарк, О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, Известия АН СССР, т. 4, № 1, 1940.

2. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, Успехи матем. наук, т. II, вып. 3 (9), 1947.

3. М. А. Красносельский, а) О дефектных числах замкнутых операторов, Доклады АН СССР, т. 56, № 6, 1947.

б) О расширении замкнутых эрмитовых операторов с неплотной областью определения, Доклады АН СССР, т. 59, № 1, 1948.

в) Об эрмитовых операторах, не допускающих замыкания, Сборник трудов Ин-та математики АН УССР № 12, 1949.

г) О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, Укр. математ. ж. № 1, 1949.

4. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сборник трудов Ин-та математики АН УССР № 11, 1948.

5. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937.

Поступило 15.IX 1949.