Уравнения вида $y''' = R(y', y, x)y''^2$ с неподвижными критическими точками

Д. Ф. Верхоломов

Исследования Брио и Буке положили начало аналитической теории нелинейных диференциальных уравнений. Затем этими вопросами занимались Фукс и Пуанкаре.

В начале XX в. эта теория достигла наибольшего развития в работах Пенлеве. Пенлеве исходил из того, что почти все так называемые элементарные функции являются однозначными интегралами алгебраических диференциальных уравнений — или же однозначными обращениями таких интегралов. Исходя из этой идеи, Пенлеве исследует алгебраические диференциальные уравнения второго порядка и выделяет из этого класса уравнений те, которые обладают однозначными интегралами. На этом пути он сначала выделяет те классы уравнений, которые не имеют подвижных критических точек.

Необходимые условия для отсутствия подвижных критических точек Пенлеве получает введением параметра; при нулевом значении параметра получаются упрощенные уравнения, которые не должны иметь подвижных критических точек.

Найдя классы уравнений, удовлетворяющих необходимым условиям, Пенлеве исследует, действительно ли они не имеют подвижных критических точек. Все эти уравнения интегрируются, и их интегралы действительно не имеют критических подвижных точек.

Среди этих уравнений шесть уравнений являются источником новых трансцендентных функций. Эти уравнения называются уравнениями Пенлеве, а интегралы их называются интегралами Пенлеве.

В результате Пенлеве и Гарнье получили полную таблицу классов уравнений второго порядка, первой степени относительно старшей производной, не допускающих критических подвижных точек. Для уравнений третьего порядка аналогичную задачу поставили и получили частные результаты Шази и В. В. Голубев. Мы поставили задачу, являющуюся первым шагом программы Пенлеве для уравнения 3-го порядка линейного относительно старшей производной. Методом введения малого параметра мы отыскиваем необходимые условия отсутствия подвижных критических точек.

Первые два условия носят общий характер: правая часть должна быть многочленом второй степени относительно второй производной. Затем мы ограничиваемся случаем, когда в правой части налицо только член со второй степенью второй производной. Выясняется, что коэфициент при этой второй степени есть рациональная функция от первой производной, имеющая полюсы только первого порядка, не имеющая целой части и с определенным числовым характером вычетов этих полюсов.

В результате получается следующая таблица значений коэфициента при второй степени второй производной.

$$0,\ \left(1 \pm \frac{1}{N}\right)\frac{1}{y'-a};\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{y'-b}\right);\quad \frac{1}{y'-a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'-b}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{y'-b}+\frac{1}{y'-c}\right);\quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{y'-b}\right);\quad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{y'-b}\right)$$

$$\frac{3}{4}\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{y'-b};\quad \frac{5}{6}\frac{1}{y'-a}+\frac{2}{3}\frac{1}{y'-b};\quad \frac{2}{3}\frac{1}{y'-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{y'-b}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y'-a}+\frac{5}{6}\frac{1}{y'-b}.$$

После этого мы переходим к исследованию уравнения вида $y'''= = R(x, y, y')y''^2$ и находим уравнения вышеуказанного типа с двумя полюсами.

Рассмотрим уравнение вида

$$y'''=\left\{\frac{A}{y'+ay^2}+\frac{B}{y'+by^2}+\frac{C}{y'+cy^2}\right\}y''^2, \tag{1}$$

в котором A, B, C нам известны и нужно определить a, b и c. Для их определения заметим, что уравнение (1) имеет интеграл вида

$$y=\frac{k}{x}.$$

После подстановки и упрощений для определения a, b и c получим уравнение

$$\sum\frac{A}{ak-1}=-\frac{3}{2}. \tag{2}$$

От интеграла вида $y=\dfrac{k}{x}$ перейдем к уравнениям в вариациях.

Пусть $y=\dfrac{k}{x}+\alpha z$.

Сравнивая коэфициенты при α и используя (2), получим уравнение вида

$$z'''+\frac{6}{x}z''+\frac{4}{x^2}\sum\frac{A}{(ak-1)^2}z'+\frac{8}{x^3}\sum\frac{Aak}{(ak-1)^2}z=0. \tag{3}$$

Для отсутствия в уравнении критических подвижных точек необходимо, чтобы коэфициенты уравнения (3) были целыми числами. Выполним это требование.

Положим

$$4\sum\frac{A}{(ak-1)^2}=M,$$

где M целое число.

Так как

$$\sum\frac{Aak}{(ak-1)^2}=\sum\frac{A}{ak-1}+\sum\frac{A}{(ak-1)^2}=-\frac{3}{2}+\frac{M}{4},$$

то уравнение (3) примет вид

$$z'''+\frac{6}{x}z''+\frac{M}{x^2}z'+\frac{2M-12}{x^3}z=0. \tag{4}$$

Чтобы уравнение (1) было уравнением с неподвижными критическими точками, необходимо, чтобы уравнение (4) имело три интеграла вида $z=x^s$, где s целое число. Для нахождения s получим уравнение вида

$$s^3+3s^2+(M-4)s+(2M-12)=0 \tag{5}$$

уравнение (5) должно иметь три целых корня. Один корень уравнения (5) равен -2 и уравнение (5) принимает вид

$$(s+2)(s^2+s+M-6)=0.$$

Уравнение $s^2+s+M-6=0$ должно иметь целые корни. Решая его, получим

$$s=\frac{-1\pm\sqrt{25-4M}}{2}.$$

Следовательно, выражение $25-4M$ должно равняться квадрату нечетного числа.

Положим

$$25-4M=(2p-1)^2=N^2 \text{ — квадрату нечетного числа.}$$

Отсюда $M=6+p-p^2$ и $M=\dfrac{25-N^2}{4}$, p — любое число.

Итак, для всех корней уравнения

$$\sum\frac{A}{ak-1}=-\frac{3}{2}$$

имеем условие $\displaystyle\sum\frac{A}{(ak-1)^2}=\frac{25-N^2}{16}=\frac{6+p-p^2}{4}$.

Рассмотрим случай

$$C=0,\quad A\neq 0,\quad B\neq 0.$$

На основании выведенной нами ранее таблицы имеем:

$$A = B = \frac{2}{3};\quad \frac{3}{4};\quad \frac{1}{2},$$

или

$$A + B = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2},\ \frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right);\quad A + B = \frac{7}{6}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right),$$

или

$$A + B = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right);\quad A + B = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right).$$

Рассмотрим первый случай: $A = B$. Уравнения примут вид

$$\sum \frac{1}{ak - 1} = -\frac{3}{2A},$$

$$\sum \frac{1}{(ak - 1)^2} = \frac{25 - N^2}{16A} = \frac{M}{4A};$$

отсюда

$$\sum \frac{1}{(ak - 1)^2} + \frac{2}{(ak - 1)(bk - 1)} = \frac{9}{4A^2}$$

и

$$\frac{2}{(ak - 1)(bk - 1)} = \frac{9 - AM}{4A^2}; \tag{6}$$

с другой стороны, из

$$\frac{1}{ak - 1} + \frac{1}{bk - 1} = -\frac{3}{2A}$$

имеем

$$\frac{2}{(ak - 1)(bk - 1)} = \frac{3}{A[2 - (a + b)k]}. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) имеем

$$\frac{9 - AM}{4A^2} = \frac{3}{A[2 - (a + b)k]},$$

отсюда

$$(a + b)k = \frac{18 - 2AM - 12A}{9 - AM}.$$

Подставляя сюда оба корня k_1 и k_2, найдем

$$(a + b)k_1 = \frac{18 - 2AM - 12A}{9 - AM},$$

$$(a + b)k_2 = \frac{18 - 2AN - 12A}{9 - AN}.$$

Отсюда

$$(a+b)(k_1+k_2)=\frac{18-12A-2AM}{9-AM}+\frac{18-2AN-12A}{9-AN}. \tag{8}$$

Но из уравнения (2) имеем

$$\frac{3}{2A}abk^2-(a+b)\left(\frac{3}{2A}-1\right)k+\left(\frac{3}{2A}-2\right)=0.$$

Положим $\frac{3}{2A}ab=1$.

Тогда

$$k_1+k_2=(a+b)\left(\frac{3}{2A}-1\right),$$

$$k_1k_2=\frac{3}{2A}-2.$$

Отсюда на основании (8) имеем

$$(a+b)^2\left(\frac{3}{2A}-1\right)=\frac{18-2AM-12A}{9-AM}+\frac{18-2AN-12A}{9-AN},$$

$$(a+b)^2\left(\frac{3}{2A}-2\right)=\frac{18-2AM-12A}{9-AM}\cdot\frac{18-2AN-12A}{9-AN}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{2A}-2\right)\left[\frac{18-2AN-12A}{9-AN}+\frac{18-2AM-12A}{9-AM}\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{2A}-1\right)\frac{18-2AN-12A}{9-AN}\cdot\frac{18-2AM-12A}{9-AM}. \tag{9}$$

Таково соотношение, которое должно существовать между M и N, где

$$M=\frac{25-u^2}{4}\quad N=\frac{25-v^2}{4}.$$

Очевидно, что соотношение (9) между u и v может существовать невсегда.

Пусть $A=B=\frac{2}{3}$; тогда из соотношения (9) получим

$$u^2v^2+2(u^2+v^2)-5=0$$

при целых u и v это возможно только в случае

$$u=v=1.$$

Тогда

$$M=N=6.$$

Из (8) имеем

$$k_1=k_2=\frac{2}{5(a+b)}.$$

Уравнение

$$\frac{3}{2A}abk^2-(a+b)\left(\frac{3}{2A}-1\right)k+\left(\frac{3}{2A}-2\right)=0$$

принимает вид

$$k^2-\frac{5}{4}(a+b)\,k+\frac{1}{4}=0.$$

Из равенства корней этого уравнения получим

$$a+b=\pm\frac{4}{5}\cdot$$

Из $\frac{3}{2A}ab=1$ следует $ab=\frac{4}{9}\cdot$ Итак, для определения a и b имеем систему:

$$a+b=\pm\frac{4}{5}$$

$$ab=\frac{4}{9};$$

откуда

$$a=\pm\frac{6+8i}{15},$$

$$b=\pm\frac{6-8i}{15}.$$

Уравнение имеет вид

$$y'''=\frac{2}{3}y''^2\left\{\frac{1}{y'\pm\frac{6+8i}{15}y^2}+\frac{1}{y'\pm\frac{6-8i}{15}y^2}\right\}. \tag{I}$$

В случае $A=B=\frac{1}{2}$, проведя вышеуказанные рассуждения, получим уравнение

$$y'''=\frac{1}{2}y''^2\left\{\frac{1}{y'+\frac{3+i\sqrt{3}}{6}y^2}+\frac{1}{y'+\frac{3-i\sqrt{3}}{6}y^2}\right\}. \tag{II}$$

Чтобы перейти к остальным случаям, мы дадим общий прием исследования, годный и в разобранных выше случаях.

Уравнения сводятся к двум

$$A\frac{1}{ak-1}+B\frac{1}{bk-1}=-\frac{3}{2},$$

$$A\frac{1}{(ak-1)^2}+B\frac{1}{(bk-1)^2}=M_1,$$

где $M_1=\frac{M}{4}\cdot$

Положим

$$\frac{1}{ak-1} = X; \quad \frac{1}{bk-1} = Y.$$

Тогда уравнения для определения a и b примут вид

$$AX + BY = -\frac{3}{2},$$

$$AX^2 + BY^2 = M_1,$$

откуда

$$X = \frac{-3A \pm \sqrt{9A^2-(9-4BM_1)(AB+A^2)}}{2(AB+A^2)}.$$

Положим

$$R = \sqrt{9A^2-(9-4BM_1)(AB+A^2)}.$$

Получим

$$X = \frac{R-3A}{2(AB+A^2)},$$

$$Y = -\frac{R+3B}{2(AB+B^2)}.$$

Отсюда

$$ak = 1 + \frac{2(AB+A^2)}{R-3A},$$

$$bk = 1 - \frac{2(AB+B^2)}{R+3B}.$$

Следовательно, подставляя k_1 и k_2 и соответственно M_1 и M_2 и R_1 и R_2, получим

$$ak_1 = 1 + \frac{2(AB+A^2)}{R_1-3A} \qquad bk_1 = 1 - \frac{2(AB+B^2)}{R_1+3B},$$

$$ak_2 = 1 + \frac{2(AB+A^2)}{R_2-3A} \qquad bk_2 = 1 - \frac{2(AB+B^2)}{R_2+3B}.$$

Из полученных равенств вытекает

$$abk_1k_2 = \left(1 + \frac{2A(A+B)}{R_1-3A}\right)\left(1 - \frac{2B(A+B)}{3B+R_2}\right),$$

но

$$ab = \frac{1}{3} \text{ и } k_1k_2 = 3-2(A+B),$$

и, следовательно,

$$-1 = \frac{3A}{R_1-3A} - \frac{3B}{3B+R_2} - \frac{6AB(A+B)}{(R_1-3A)(R_2+3B)}$$

или

$$R_1^2 R_2^2 = A^2 B^2 [6(A+B) - 9]^2.$$

Но

$$R_1^2 = AB[4M_1(A+B) - 9],$$

$$R_2^2 = AB[4N_1(A+B) - 9];$$

отсюда, заменяя M_1 и N_1, получим основное уравнение

$$\left[\frac{25-u^2}{4}(A+B)-9\right]\left[\frac{25-v^2}{4}(A+B)-9\right] = [6(A+B)-9]^2.$$

Частные случаи

1. $A=B=\frac{1}{2}$,

   $u=v=1.$

2. $A=B=\frac{2}{3}$,

   $u=v=1.$

3. $A=B=\frac{3}{4}$,

или $\begin{cases} u=1, \\ v \text{ — произвольно} \end{cases}$ или $\begin{cases} v=1 \\ u \text{ — произвольно} \end{cases}$

4. $A=1$ $\quad B=\frac{1}{2}$.

Рассмотренный случай (3)

5. $A=\frac{3}{4}$ $\quad B=\frac{1}{2}$,

   $n=v=1.$

6. $A=\frac{5}{6}$ $\quad B=\frac{2}{3}$.

   Рассмотренный случай (3)

7. $A=\frac{2}{3}$ $\quad B=\frac{1}{2}$.

   $u=\nu=1$

Определение a и b

Так как при $u^2=v^2=1$

$$R_1^2 = R_2^2 = -9AB + 4A^2BM + 4AB^2M$$

или

$$R_1^2 = R_2^2 = AB\left[4\,\frac{25-u^2}{16}(A+B)-9\right] = AB[6(A+B)-9],$$

то

$$ak_1 = 1 + 2A\frac{R_1 + 3A}{6AB - 9A} \qquad ak_1 = 1 + 2\frac{R_1 + 3A}{6B - 9},$$

$$bk_2 = 1 - 2B\frac{R_1 - 3B}{R_1^2 - 9B^2}(A + B) \quad bk_2 = 1 - 2\frac{R_1 - 3B}{6A - 9}$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\,\frac{R_1 + 3A}{6B - 9},$$

$$k_2 = \frac{1}{b} - \frac{2}{b}\,\frac{R_1 - 3B}{6A - 9},$$

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{3}\left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b}\right)$$

или

$$3b\frac{R + 3A}{6B - 9} - 3a\frac{R - 3B}{6A - 9} = -Ab - Ba;$$

откуда

$$\frac{2AB + R}{2B - 3}\,b = \frac{R - 2AB}{2A - 3}\,a,$$

$$b = \frac{R - 2AB}{2A - 3}\,t,$$

$$a = \frac{2AB + R}{2B - 3}\,t,$$

где $t = \varphi(x)$ — произвольная функция.

Пример

I. $A = B = \frac{2}{3}$, $R^2 = \frac{4}{9}\left[6 \cdot \frac{4}{3} - 9\right]$, $R = \frac{2i}{3}$;

$$a = -\frac{8 + 6i}{15}\,t, \quad b = \frac{8 - 6i}{15}\,t, \quad \text{при} \quad t = \varphi(x) = i \quad a = \frac{6 - 8i}{15}, \quad b = \frac{6 + 8i}{15}.$$

II. $A = \frac{2}{3}$ $B = \frac{1}{2}$, $R = i\frac{\sqrt{6}}{3}$;

$$a = -\frac{2 + i\sqrt{6}}{6}, \quad b = \frac{2 - i\sqrt{6}}{5}.$$

В результате проведенного исследования мы имеем следующие уравнения, удовлетворяющие необходимым условиям отсутствия в интегралах подвижных критических точек.

1. $$y'''=\frac{2}{3}y''^2\left[\frac{1}{y'\pm\frac{6+8i}{15}y^2}+\frac{1}{y'\pm\frac{6-8i}{15}y^2}\right].$$

2. $$y'''=\frac{1}{2}y''^2\left[\frac{1}{y'+\frac{3+i\sqrt{3}}{6}y^2}+\frac{1}{y'+\frac{3-i\sqrt{3}}{6}y^2}\right].$$

3. $$y'''=\frac{3}{4}y''^2\left[\frac{1}{y'+\dfrac{\frac{\sqrt{1-u^2}}{24}}{\frac{\sqrt{1-u^2}}{24}-1}y^2}+\frac{1}{y'+\dfrac{\frac{\sqrt{1-u^2}}{24}}{\frac{\sqrt{1-u^2}}{24}+1}y^2}\right].$$

4. $$y'''=y''^2\left[\frac{\frac{2}{3}}{y'-\frac{2+i\sqrt{6}}{6}y^2}+\frac{\frac{1}{2}}{y'+\frac{2-i\sqrt{6}}{6}y^2}\right].$$

5. $$y'''=y''^2\left[\frac{\frac{3}{4}}{y'-\frac{1+i}{2}y^2}+\frac{\frac{1}{2}}{y'+\frac{1-i}{2}y^2}\right].$$

6. $$y'''=y''^2\left[\frac{\frac{1}{2}}{y'-\frac{5+i\sqrt{15}}{8}y^2}+\frac{\frac{5}{6}}{y'-\frac{i\sqrt{15}-5}{12}y^2}\right].$$

7. $$y'''=y''^2\left[\frac{1}{y'+\frac{\sqrt{3-3u^2}}{\sqrt{3-3u^2}-18}y^2}+\frac{\frac{1}{2}}{y'-\frac{\sqrt{3-3u^2}}{\sqrt{3-3u^2}-12}y^2}\right].$$

В заключение считаю своим долгом выразить мою искреннюю признательность проф. В. В. Голубеву за советы и указания, которыми я пользовался при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории диференциальных уравнений, М., 1941.

2. Айнс, Обыкновенные диференциальные уравнения, Х., 1939.

3. J. Chazy, Sur les équations differentielles du troisième ordre et d'ordre superieur, dont l'integrale a ses points critiques fixes, Acta Mathematica, t. 34, 1911.

Поступило 18.XI 1949.