1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II. № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К теории неотрицательных и осциляционных матриц

Д. М. Котелянский

В книге „Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем" [1] Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн рассмотрели важные для приложения классы вполне неотрицательных и осциляционных матриц. Первый из этих классов состоит из матриц, все миноры которых неотрицательны; второй является частью первого, включая те вполне неотрицательные матрицы, некоторая степень которых вполне положительна.

В настоящей заметке мы применяем методы, развитые в указанной книге к исследованию иных типов матриц, а также для установления некоторых свойств вполне неотрицательных матриц.

В § 1 мы рассматриваем матрицы, у которых неотрицательны все элементы, главные и их окаймляющие миноры. Для этого класса матриц мы доказываем неравенство

$$\det A = A\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, n\\ 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix} \leqslant$$

$$\leqslant A\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, p\\ 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1, \ldots, n\\ p+1, \ldots, n\end{pmatrix}, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1),$$

доказанное Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном для вполне неотрицательных матриц, а также его обобщение, из которого вытекает неравенство, принадлежащее М. К. Фаге и доказанное им для определителей Грамма.

$$A\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, n\\ 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix} \leqslant \Pi\, A\begin{pmatrix}s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_r\\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_r\end{pmatrix}^{\frac{1}{C_{n-1}^{n-r}}} {}^{*)}$$
$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_r \leqslant n.$$

В § 2 рассматриваются вполне неотрицательные неособенные матрицы и доказывается, что всякая матрица этого типа имеет специальную структуру, а в случае симметричности есть прямая сумма осцилляционных матриц.

---

*) Здесь и в дальнейшем $A\begin{pmatrix}i_1, \ldots, i_k\\ j_1, \ldots, j_k\end{pmatrix}$ означает детерминант $|a_{ij}|$, где $i = i_1 \ldots i_k$; $j = j_1, j_2 \ldots j_k$.

Дисперсией детерминанта

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n) \\ (1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n) \end{matrix} \tag{1}$$

мы назовем разность $k-\nu$, где ν — число пар горизонталей и вертикалей с одинаковыми индексами, входящих в детерминант (1). По этому определению дисперсию 0 имеют только главные миноры, дисперсию 1 — элементы детерминанта, не лежащие на главной диагонали, а также миноры, полученные из главных присоединением горизонталей и вертикалей с разными индексами.

Лемма 1. *Если в матрице A все миноры с дисперсиями* 0,1 *неотрицательны и главный минор k-ого порядка*

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots i_k \\ i_1, i_2, \ldots i_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен 0, *то из двух матриц, полученных продолжением минора* (2) *в сторону больших индексов*

$$\begin{matrix} \|a_{r,s}\| & r=i_1, i_2, \ldots i_k; & s=i_1, i_2, \ldots i_k, i_k+1, \ldots n \\ \|a_{r,s}\| & s=i_1, i_2, \ldots i_k; & r=i_1, i_2, \ldots i_k, i_k+1, \ldots n, \end{matrix} \tag{3}$$

хотя бы одна имеет ранг $<k$.

Точно так же из двух матриц, полученных путем продолжения минора (2) *в сторону меньших индексов*

$$\begin{matrix} \|a_{r,s}\| & r=1, 2, \ldots i_1, i_2, \ldots i_k; & s=i_1, i_2, \ldots i_k \\ \|a_{r,s}\| & r=i_1, i_2, \ldots i_k; & S=1, 2, \ldots i_1, i_2, \ldots i_k \end{matrix} \tag{4}$$

по крайней мере одна имеет ранг $<k$.

Ввиду полной аналогии достаточно провести доказательство для матрицы (3). Рассмотрим сперва случай $k=1$, то есть, когда существует элемент $a_{ii}=0$. Имеем

$$a_{ri} \geqslant 0, \quad a_{is} \geqslant 0 \quad A\begin{pmatrix} i & r \\ i & s \end{pmatrix} \geqslant 0 \qquad (r, s > i,$$

как миноры с дисперсией $\leqslant 1$.

Отсюда следует альтернатива: либо $a_{is} > 0$ при $s > i$ и тогда первая из матриц (3) имеет ранг $<k$, либо $a_{ri} > 0$ при $r > i$ и тогда вторая из матриц (3) имеет ранг $<k$.

Пусть теперь $a_{i_1, i_1} > 0$. Тогда существует $1 < p \leqslant k$, так что

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots i_{p-1} \\ i_1, \ldots i_{p-1} \end{pmatrix} > 0 \qquad A\begin{pmatrix} i_1, \ldots i_{p-1}, i_p \\ i_1, \ldots i_{p-1}, i_p \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Положим

$$b_{r,s} = A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_{p-1}, r \\ i_1, \dots i_{p-1}, s \end{pmatrix} \qquad (r, s \geqslant i_p)$$

и рассмотрим матрицу $B = \| b_{r,s} \|$; $(r, s \geqslant i_p)$.

Дисперсия любого $b_{r,s}$, рассматриваемого как минор A не больше 1 и, следовательно, элементы матрицы B неотрицательны. Кроме того, по известному тождеству Сильвестра

$$B\begin{pmatrix} i_p & r \\ i_p & s \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_{p-1} \\ i_1, \dots i_{p-1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_{p-1} & r \\ i_1, \dots i_{p-1} & s \end{pmatrix}$$

оба множителя правой части неотрицательны, как миноры A с дисперсиями $\leqslant 1$ и, следовательно, $B\begin{pmatrix} i_p & r \\ i_p & s \end{pmatrix} \geqslant 0$ при $r, s > i_p$.

Так как согласно формуле (5)

$$b_{i_p, i_p} = A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix} = 0,$$

то легко получить, как и выше, что либо $b_{i_p s} = 0$ при $s > i_p$, либо $b_{r, i_p} = 0$ при $r > i_p$. Отсюда, учитывая (5), получим, что либо первая, либо вторая из матриц (3) имеет ранг $< k$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если в матрице A все миноры с дисперсиями 0.1 неотрицательны и какой-либо главный минор $A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_k \\ i_1, \dots i_k \end{pmatrix}$ равен нулю, то равны нулю все окаймляющие его миноры, то есть все миноры вида*

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots \alpha_\nu, i_1, \dots i_k \\ \beta_1, \dots \beta_\nu, i_1, \dots i_k \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\nu < i_1 < \dots < i_k \\ \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_\nu < i_1 < \dots < i_k \end{matrix}$$

и вида

$$A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_k, \alpha_1, \dots \alpha_\nu \\ i_1, \dots i_k, \beta_1, \dots \beta_\nu \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i_1 < \dots < i_k < \alpha_1 < \dots < \alpha_\nu \\ i_1 < \dots < i_k < \beta_1 < \dots < \beta_\nu \end{matrix}$$

Теорема 1. *Если в матрице A все миноры с дисперсиями $\leqslant 1$ неотрицательны, то выполняется неравенство*

$$A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix} \leqslant A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p \\ i_1 \dots i_p \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{p+1} \dots i_k \\ i_{p+1} \dots i_k \end{pmatrix} {}^{*)}, \tag{6}$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n \quad 1 \leqslant p < k$.

При доказательстве мы можем принять, что ни один главный минор детерминанта $A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}$ не равен нулю, ибо в противном случае,

---

*) См. [1], стр. 113. Неравенство (6) доказано для вполне неотрицательных матриц.

по следствию леммы 1, и этот детерминант равен 0, то есть неравенство (6) выполняется.

При $k=2$ теорема очевидна, а потому можем доказывать ее с помощью индукции по k.

Обозначим c_{ij} минор элемента a_{ij} в детерминанте

$$A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}.$$

Согласно известной формуле

$$C\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots \alpha_r \\ \beta_1, \dots \beta_r \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \dots i_k \\ i_1, \dots i_k \end{pmatrix}^{r-1} A\begin{pmatrix} \alpha'_1 \dots \alpha'_{k-r} \\ \beta_1 \dots \beta'_{k-r} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\alpha'_1 \dots \alpha'_{k-r}$ и $\beta'_1 \dots \beta'_{k-r}$ дополняют, соответственно $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ и β_1, $\beta_2, \dots \beta_r$ до $i_1, i_2, \dots i_k$. Так как дисперсия $C\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix}$ равна дисперсии

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha'_{k-r} \\ \beta_1 \dots \beta'_{k-r} \end{pmatrix},$$

то все миноры C с дисперсиями $\leqslant 1$ неотрицательны, то есть матрица C удовлетворяет условиям теоремы.

При $k \geqslant 3$ один из детерминантов в правой части (6), например второй, имеет порядок $\geqslant 2$. В этом случае $p+1<k$, и мы можем по допущению индукции, применить неравенство (6) к $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p, i_{p+1} \\ i_1 \dots i_p, i_{p+1} \end{pmatrix}$.

Имеем

$$C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p, i_{p+1} \\ i_1 \dots i_p, i_{p+1} \end{pmatrix} \leqslant C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p \\ i_1 \dots i_p \end{pmatrix} C_{i_{p+1}, i_{p+1}}$$

или (см. (7))

$$\left[A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}\right]^p A\begin{pmatrix} i_{p+2} \dots i_k \\ i_{p+2} \dots i_k \end{pmatrix} \leqslant \left[A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix}\right]^{p-1} \times$$

$$\times A\begin{pmatrix} i_{p+1} \dots i_k \\ i_{p+1} \dots i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p, i_{p+2} \dots i_k \\ i_1 \dots i_p, i_{p+2} \dots i_k \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Так как последний множитель справа имеет порядок $<k$, то по допущению индукции

$$A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p, i_{p+2} \dots i_k \\ i_1 \dots i_p, i_{p+2} \dots i_k \end{pmatrix} \leqslant A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p \\ i_1 \dots i_p \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{p+2} \dots i_k \\ i_{p+2} \dots i_k \end{pmatrix}, \tag{9}$$

что вместе с (8) доказывает теорему.

Следствие. При условиях теоремы 1 выполняется также обобщенное неравенство (6)*)

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\\ \alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r, \, \alpha_1\ldots\alpha'_s\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}i_1\ldots i_r\\ i_1\ldots i_r\end{pmatrix} \leqslant \leqslant A\begin{pmatrix}\alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r\\ \alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}i_1\ldots i_r, \, \alpha'_1\ldots\alpha'\\ i_1\ldots i_r, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $1\leqslant\alpha_1<\ldots<\alpha_k<i_1<\ldots<i_r<\alpha'_1<\ldots<\alpha'_s\leqslant n$.

Так же, как и в теореме, можем считать, что ни один из детерминантов (10) или их главных миноров не равен нулю.

Обозначив c_{ij} минор элемента a_{ij} в детерминанте

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\\ \alpha_1\ldots\alpha_k, \, i_1\ldots i_r, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\end{pmatrix},$$

будем иметь согласно (6)

$$C\begin{pmatrix}\alpha_1\ldots\alpha_k, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\\ \alpha_1\ldots\alpha_k, \, \alpha'_1\ldots\alpha'_s\end{pmatrix} \leqslant C\begin{pmatrix}\alpha_1\ldots\alpha_k\\ \alpha_1\ldots\alpha_k\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}\alpha'_1\ldots\alpha'_s\\ \alpha'_1\ldots\alpha'_s\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражение для миноров C из формулы (7), мы легко получим формулу (10).

В своей статье М. К. Фаге [2] доказал неравенство (10) для случая определителей Грамма и, пользуясь им, получил следующее обобщение неравенства **Адамара**:

$$A\begin{pmatrix}1, 2, \ldots n\\ 1, 2, \ldots n\end{pmatrix} \leqslant \prod A\begin{pmatrix}1, 2\ldots k-1, \, k+1, \ldots n\\ 1, 2\ldots k-1, \, k+1, \ldots n\end{pmatrix}^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \leqslant \left(\prod A\begin{pmatrix}s_1\ldots s_r\\ s_1\ldots s_r\end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{C_{n-1}^{n-r}}} \leqslant \ldots \leqslant \prod_1^n a_{ii} \qquad 1\leqslant s_1<\ldots<s_r\leqslant n. \tag{12}$$

Так как неравенство (10) доказано нами для матриц, у которых неотрицательны миноры с дисперсиями 0, 1, то для этих матриц выполняется также и неравенство (12).

§ 2

Лемма II. *Если матрица A вполне неотрицательна и какой-либо минор порядка* $m+1$,

$$A\begin{pmatrix}k, \, k+1, \ldots k+m\\ l, \, l+1, \ldots l+m\end{pmatrix} \tag{13}$$

---

*) Для вполне неотрицательных и знакосимметричных матриц доказано в [1], стр. 202.

равен 0, *то хотя бы одна из четырех матриц*

I. $\|a_{ij}\|$ $i=k, k+1, \ldots k+m, \; j=1, 2, \ldots n$

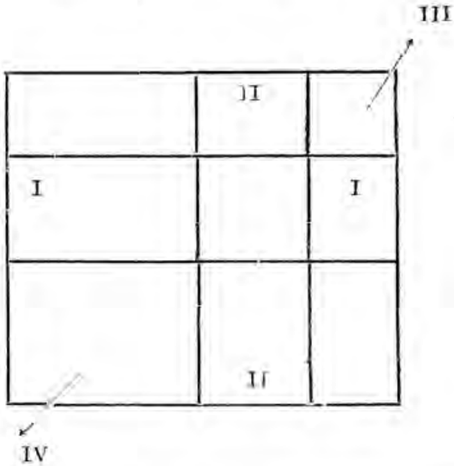
II. $\|a_{ij}\|$ $i=1, 2 \ldots n; \; j=l, l+1, \ldots l+m$

III. $\|a_{ij}\|$ $i=k, k+1, \ldots k+n; \; j=1, 2, \ldots l+m-1, l+m$

IV. $\|a_{ij}\|$ $i=1, 2, \ldots k+m; \; j=l, l+1, \ldots n$

имеет ранг $\leqslant m$.

Доказательство: Рассмотрим сперва случай $m=0$, то есть некоторый элемент $a_{k,l}=0$.



Из неравенства

$$A\begin{pmatrix} k, & l \\ i, & i \end{pmatrix} \geqslant 0, \; a_{k,j} \geqslant 0, \; a_{i,l} \geqslant 0$$

$$(k < i \leqslant n; \; l < j \leqslant n)$$

вытекает, что выполняется одна из систем равенств

$$a_{k,j}=0 \qquad l \leqslant j \leqslant n \qquad (14)$$

$$a_{i,l}=0 \qquad k \leqslant i \leqslant n \qquad (15)$$

Аналогично доказывается, что либо

$$a_{k\,j}=0 \qquad l \geqslant j \geqslant 1, \qquad (16)$$

либо

$$a_{i,l}=0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (17)$$

Докажем теперь, что если ранг матриц I, II больше нуля, то хотя бы одна из матриц III, IV имеет ранг нуль. Действительно, в этом случае не могут одновременно выполняться (14) и (16) или (15) и (17) и остается альтернатива: одновременно выполняется (14) и (17) либо (15) и (16).

Рассмотрим первую из этих возможностей. Возьмем $a_{k\,\nu}=0$, где $\nu < l$ (такой элемент существует, ибо (16) не выполняется) и составим минор $A\begin{pmatrix} i, & k \\ \nu, & j \end{pmatrix} \geqslant 0$, где i произвольно $< k$, а j произвольно $> l$. Так как согласно (14) $a_{k,j}=0$, то и $a_{ij}=0$ при всех $i<k$ и $j>l$, что вместе с (14) и (17) доказывает равенство 0 ранга матрицы III.

Аналогично, приняв справедливость (15) и (16), докажем равенство нулю ранга матрицы IV.

Рассмотрим сейчас случай произвольного $m>0$. Пусть $r \leqslant m$ ранг детерминанта (13) и $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \end{pmatrix}$ его минор не равный 0.

Положим $b_{i,j}=A\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots \alpha_r, i \\ \beta_1, \ldots \beta_r, j \end{pmatrix}_N$, где индекс N означает такое размещение индексов i, j среди α_ν и β_ν, при котором верхние и нижние индексы расположены в порядке возрастания. Матрица $B=\|b_{i,j}\|$ вполне неотрицательна, так как согласно тождеству Сильвестра любой минор

$$B\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\mu \\ j_1 \dots j_\mu \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix}^{\mu-1} \times A\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r, i_1 \dots i_\mu \\ \beta_1 \dots \beta_r, j_1 \dots j_\mu \end{pmatrix}_N.$$

Пусть α не равно $\alpha_1, \dots \alpha_r$ $(k \leqslant \alpha \leqslant k+m)$, а β не равно $\beta_1, \dots \beta_r$ $(l \leqslant \beta \leqslant l+m)$. Тогда $b_{\alpha, \beta}=0$ как минор детерминанта (13) порядка $r+1$. Отсюда следует, как было показано выше, что имеет место одна из четырех систем равенств

$$\text{a) } b_{\alpha, j}=0 \quad j=1, 2, \dots n; \quad \text{b) } b_{i, \beta}=0 \quad i=1, 2, \dots n;$$

$$\text{c) } b_{i, j}=0 \quad 1 \leqslant i \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant j \leqslant n \quad \text{d) } b_{i, j}=0 \quad \alpha \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant \beta.$$

В случае a) имеем

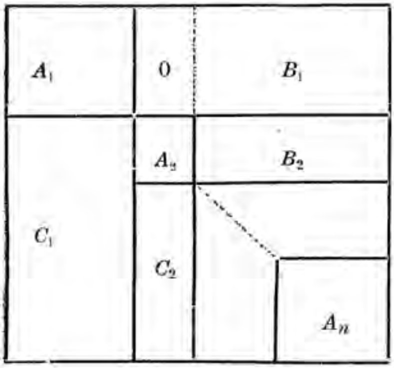
$$A\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots \alpha_r, \alpha \\ \beta_1, \dots \beta_r, j \end{pmatrix} = 0 \qquad (j=1, 2, \dots n),$$

откуда следует, что матрица $\|a_{ij}\|$ $i=\alpha_1 \dots \alpha_r, \alpha$; $1 \leqslant j \leqslant n$ имеет ранг r, а значит, матрица I имеет ранг $\leqslant m$. Аналогично доказывается, что в случае b) матрица II имеет ранг $\leqslant m$.

В случае c) $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r, i \\ \beta_1 \dots \beta_r, j \end{pmatrix} = 0$ при $i \leqslant \alpha$, $j \geqslant \beta$, но так как $k \leqslant \alpha \leqslant k+m$; $l \leqslant \beta \leqslant l+m$, то последнее равенство выполнено при $i \leqslant k$ и $j \geqslant l+m$. Но оно же выполнено при $i=k+1, \dots k+m$ и $j=l$, $l+1, \dots l+m-1$, ибо ранг детерминанта (13) есть r. Отсюда следует, что ранг матрицы III небольше m.

В случае d) аналогично следует, что ранг матрицы IV не превышает m, что заканчивает наше доказательство.

Теорема II. *Всякая неособенная вполне неотрицательная матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ является либо осцилляционной, либо имеет вид (18), где A_i осцилляционные матрицы, а из каждой пары матриц B_i, C_i хотя бы одна имеет ранг 0.*



Доказательство: Как показали Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн*), для того чтобы вполне неотрицательная матрица была осцилляционной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $|A| \neq 0$

2) $a_{i, i+1} \neq 0$, $a_{i+1, i} \neq 0$ $i=1, 2, \dots n-1$.

Так как условие 1 выполняется, то, учтя неравенство Адамара, можем заключить, что все диагональные элементы $a_{i, i}$ положительны.

*) См. [1], стр. 122.

Пусть некоторое $a_{k,\,k+1}=0$. Из четырех матриц, одна из которых (по лемме II) должна иметь нулевой ранг, три матрицы (I, II, IV) содержат диагональные элементы и, следовательно, матрица III имеет ранг 0. Обозначим $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k$ те значения i ($i=1, 2, \ldots n$), при которых хотя бы один из элементов $a_{i,\,i+1}$ и $a_{i+1,\,i}$ равен 0. Тогда метрицы

$$A_1=A\begin{pmatrix}1, 2\ldots\alpha_1\\ 1, 2\ldots\alpha_1\end{pmatrix},\quad A_2=A\begin{pmatrix}\alpha_1+1,\ldots\alpha_2\\ \alpha_1+1,\ldots\alpha_2\end{pmatrix}\ldots A_k=A\begin{pmatrix}\alpha_{k-1}+1\ldots\alpha_k\\ \alpha_{k-1}+1\ldots\alpha_k\end{pmatrix}$$

будут осцилляционными.

Из матриц B_ν, C_ν, являющихся продолжениями A_ν в сторону больших индексов, одна или обе имеют ранг 0, в зависимости от того, один или оба элемента $a_{i,\,i+1}$; $a_{i+1,\,i}$ равны нулю.

В случае симметричности матрицы A элементы $a_{i,\,i+1}$; $a_{i+1,\,i}$ равны нулю одновременно и, следовательно, матрица A есть прямая сумма осцилляционных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, М., 1941.

2. М. К. Фаге, Обобщение неравенства Адамара для определителей, Доклады АН СССР, т. 54, № 9, 1946.

Поступило 25.VI 1949.