К проективно-диференциальной геометрии неголономных поверхностей в трехмерном пространстве

М. Р. Роговой

Вопросы метрической диференциальной геометрии являются предметом исследования многих советских ученых.

Начиная с 1926 г. появился ряд статей акад. Д. М. Синцова, который изучал диференциальную геометрию системы интегральных кривых уравнений в полных диференциалах как линейных, так и нелинейных относительно диференциалов.

В работах С. С. Бюшгенса по геометрии векторного поля эти вопросы трактуются методом внешних форм и находят применение к задачам гидродинамики.

Теорию m-мерных неголономных поверхностей в n-мерном пространстве исследовал В. В. Вагнер.

В связи с развитием проективно-диференциальной геометрии естественно было распространить на неголономные поверхности результаты, полученные для обычных поверхностей.

Начиная с 1929 г. появились работы Я. П. Бланка, а через несколько лет, начиная с 1935 г. — статьи иностранных авторов, в которых рассматриваются вопросы проективно-диференциальной геометрии неголономных поверхностей. В этой статье вопросы проективно-диференциальной геометрии неголономных поверхностей трактуются методом подвижного тетраэдра и помещены некоторые новые результаты относительно инвариантов, связанных с проективной характеристикой неголономности.

I. Канонический тетраэдр неголономной поверхности

1. Точечно-плоскостная система и неголономные поверхности

Каждой точке $M_0(u^1, u^2, u^3)$ трехмерного пространства присоединим по определенному закону плоскость μ, инцидентную этой точке. Плоскость μ может быть определена заданием еще двух точек M_1 и M_2, которые не лежат на одной прямой с точкой M_0. Таким образом, мы получим точечно-плоскостную систему, в которой каждой точке M_0 пространства соответствует определенная плоскость $(M_0M_1M_2)$. Присоединим к точкам M_0, M_1, M_2 еще одну точку M_3, которая лежит в плоскости μ и пусть линейные диференциальные формы

$$\omega_i^k(u^1, u^2, u^3;\ du^1, du^2, du^3) \qquad (i,\ k=0, 1, 2, 3).$$

от du^1, du^2, du^3 с коэфициентами, зависящими от u^1, u^2, u^3, являются компонентами бесконечно-малого перемещения тетраэдра $T(M_0M_1M_2M_3)$

$$dM_i = \omega_i^\alpha M_\alpha; \qquad (i, \alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{I.1}$$

Диференциальные формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры проективной группы

$$(\omega_i^k)' = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k]. \tag{I.2}$$

Для бесконечно-малых перемещений точки M_0 в плоскости μ

$$\omega_0^3 = 0. \tag{I.3}$$

В случае, когда уравнение (1,3) является вполне интегрируемым, все его интегральные кривые, инцидентные данной точке M_0, расположены на одной поверхности. Если же уравнение (1,3) не является вполне интегрируемым, тогда совокупность интегральных кривых этого уравнения, инцидентных точке M_0, не будет расположена на одной поверхности. Эта совокупность интегральных кривых имеет общую касательную плоскость μ в точке M_0 и образует неголономную поверхность, отнесенную к точке M_0.

Итак, каждой точечно-плоскостной системе в пространстве отвечает вполне определенное уравнение $\omega_0^3 = 0$, все интегральные кривые которого касаются плоскостей системы. Совокупность интегральных кривых, инцидентных данной точке, образует неголономную поверхность.

Напишем для удобства компоненты бесконечно-малого перемещения для вершин тетраэдра $T(M_0M_1M_2M_3)$ в виде таблицы:

	M_0	M_1	M_2	M_3
dM_0	ω_0^0	ω_0^1	ω_0^2	ω_0^3
dM_1	ω_1^0	ω_1^1	ω_1^2	ω_1^3
dM_2	ω_2^0	ω_2^1	ω_2^2	ω_2^3
dM_3	ω_3^0	ω_3^1	ω_3^2	ω_3^3

(A)

Нам нужны будут также компоненты бесконечно-малого перемещения для тангенциальных координат граней и для плюккеровых координат ребер тетраэдра $T(M_0M_1M_2M_3)$. Мы их напишем в виде таких таблиц:

	$(M_0M_1M_2)$	$(M_0M_1M_3)$	$(M_0M_2M_3)$	$(M_1M_2M_3)$
$d(M_0M_1M_2)$	$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2$	ω_2^3	$-\omega_1^3$	ω_0^3
$d(M_0M_1M_3)$	ω_3^2	$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_3^3$	ω_1^2	$-\omega_0^2$
$d(M_0M_2M_3)$	$-\omega_3^1$	ω_2^1	$\omega_0^0+\omega_2^2+\omega_3^3$	ω_0^1
$d(M_1M_2M_3)$	ω_3^0	$-\omega_2^0$	ω_1^0	$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3$

(B)

	(M_0M_1)	(M_0M_2)	(M_0M_3)	(M_1M_2)	(M_1M_3)	(M_2M_3)
$d(M_0M_1)$	$\omega_0^0+\omega_1^1$	ω_1^2	ω_1^3	$-\omega_0^2$	$-\omega_0^3$	0
$d(M_0M_2)$	ω_2^1	$\omega_0^0+\omega_2^2$	ω_2^3	ω_0^1	0	$-\omega_0^3$
$d(M_0M_3)$	ω_3^1	ω_3^2	$\omega_0^0+\omega_3^3$	0	ω_0^1	ω_0^2
$d(M_1M_2)$	$-\omega_2^0$	ω_1^0	0	$\omega_1^1+\omega_2^2$	ω_2^3	$-\omega_1^3$
$d(M_1M_3)$	$-\omega_3^0$	0	ω_1^0	ω_3^2	$\omega_1^1+\omega_3^3$	ω_1^2
$d(M_2M_3)$	0	$-\omega_3^0$	ω_2^0	$-\omega_3^1$	ω_2^1	$\omega_2^2+\omega_3^3$

(C)

Формы ω_i^k можно выразить через линейно-независимые формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3; будем всегда считать, что

$$\omega_i^k = \Gamma_{i\alpha}^k \omega_0^\alpha; \tag{I,4}$$

Обозначим еще однородные проективные координаты произвольной точки P пространства относительно тетраэдра T через x, y, z, t; тогда

$$P = tM_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3.$$

2. Условие интегрируемости уравнения $\omega_0^3 = 0$

С помощью внешних производных и внешних произведений условие интегрируемости уравнения $\omega_0^3 = 0$ запишется так:

$$[(\omega_0^3)' \omega_0^3] = 0;$$

или, заменив $(\omega_0^3)'$ по формулам (I,2)

$$[\omega_0^1 \omega_1^3 \omega_0^3] + [\omega_0^2 \omega_2^3 \omega_0^3] = 0;$$

и, воспользовавшись формулами (I,4) и тем обстоятельством, что внешнее произведение $[\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3]$, не равно нулю, получим:

$$\Gamma_{12}^3 - \Gamma_{21}^3 = 0. \tag{I,5}$$

Если это условие выполнено, неголономная поверхность превращается в обычную поверхность, а плоскости системы огибают однопараметрическое семейство поверхностей.

3. Асимптотические линии

Среди всех кривых неголономной поверхности есть две такие кривые, для которых плоскости системы являются соприкасающимися плоскостями. Эти кривые называются асимптотическими линиями неголономной поверхности. Их уравнение, как обычно, можно записать в виде [1]:

$$\omega_0^3 = 0; \quad (M_0 M_1 M_2\, d^2 M_0) = 0; \tag{I,6}$$

Подставляя в (I,6) выражения

$$d^2 M_0 = M_\alpha d\omega_0^\alpha + \omega_0^\alpha \omega_\alpha^\beta M_\beta; \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

получим уравнение асимптотических линий в виде

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0; \\ \omega_0^1\omega_1^3 + \omega_0^2\omega_2^3 = 0. \end{cases} \tag{I,7}$$

Выберем точки M_1 и M_2 на асимптотических касательных; тогда $\omega_0^1=0$ и $\omega_0^2=0$, каждое в отдельности, должны удовлетворять уравнению (I,7); это дает следующие условия:

$$\Gamma_{11}^3=0; \quad \Gamma_{22}^3=0. \tag{I,8}$$

4. Проективное соответствие Бомпиани [3]

Можно установить проективное соответствие между прямыми связки с центром в точке M_0 и полем прямых в плоскости $(M_0M_1M_2)$ системы следующим образом: переместимся из точки M_0 в бесконечно близкую точку $M_0^*=M_0+dM_0$ и прямой

$$(M_0M_0^*)=(M_0\,dM_0)=\omega_0^1\,(M_0M_1)+\omega_0^2\,(M_0M_2)+\omega_0^3\,(M_0M_3); \tag{I,9}$$

поставим в соответствие прямую пересечения соответствующих плоскостей системы $(M_0M_1M_2)$ и $(M_0^*M_1^*M_2^*)=(M_0M_1M_2)+d\,(M_0M_1M_2)$:

$$\begin{cases} (M_0M_1M_2) \\ -\omega_1^3\,(M_0M_2M_3)+\omega_2^3\,(M_0M_1M_3)+\omega_1^3\,(M_1M_2M_3). \end{cases} \tag{I,10}$$

В координатах относительно тетраэдра T, если принять во внимание (I,8), прямой

$$\frac{x}{\omega_0^1}=\frac{y}{\omega_0^2}=\frac{z}{\omega_0^3}; \tag{I,9'}$$

будет соответствовать прямая

$$\begin{cases} z=0; \\ (\Gamma_{12}^3\,\omega_0^2+\Gamma_{13}^3\,\omega_0^3)\,x+(\Gamma_{21}^3\,\omega_0^1+\Gamma_{23}^3\,\omega_0^3)\,y+\omega_0^3\,t=0. \end{cases} \tag{I,10'}$$

Если потребовать, чтобы прямой (M_0M_3) соответствовала прямая (M_1M_2), тогда будет

$$\Gamma_{13}^3=0; \quad \Gamma_{23}^3=0. \tag{I,11}$$

В том случае, когда условие интегрируемости (I,5) выполнено, это соответствие будет полярным относительно пучка поверхностей:

$$z+\Gamma_{12}^3\,xy+\tau z^2=0,$$

где τ — параметр пучка.

5. Проективная характеристика неголономности [3]

Формулы (I,9') и (I,10') устанавливают также проективное соответствие в пучке касательных к кривым неголономной поверхности в точке M_0: прямой

$$\omega_0^2\,x-\omega_0^1\,y=0; \quad z=0; \tag{I,9''}$$

соответствует прямая

$$\Gamma_{12}^3\,\omega_0^2\,x+\Gamma_{21}^3\,\omega_0^1\,y=0; \quad z=0. \tag{I,10''}$$

Асимптотические касательные являются двойными элементами этого соответствия. Абсолютный проективный инвариант этого соответствия— ангармоническое отношение асимптотических касательных и двух каких-нибудь соответствующих — равен,

$$J = -\frac{\Gamma_{12}^{3}}{\Gamma_{21}^{3}}. \tag{I,12}$$

Если условие интегрируемости выполнено, тогда $J=-1$ и проективное соответствие в пучке касательных будет инволюционным.

J — называют проективной характеристикой неголономности.

6. Конусы Бомпиани [3]

Пусть M_0^* — бесконечно близкая к M_0 точка пространства. Будем искать те направления $M_0M_0^*$, для которых асимптотическая касательная $(M_0^*M_1^*)$, с точностью до бесконечно-малых третьего порядка, пересекает асимптотическую касательную (M_0M_1); условие пересечения:

$$\sum (M_0M_1)(M_0^*M_1^*) = \sum (M_0M_1)\left\{(M_0M_1) + d(M_0M_1) + \frac{1}{2}d^2(M_0M_1)\right\} = 0.$$

но

$$\Sigma(M_0M_1)(M_0M_1)=0; \quad \Sigma(M_0M_1)\,d(M_0M_1)=0,$$

а потому

$$\Sigma(M_0M_1)\,d^2(M_0M_1)=0.$$

Из последнего равенства выходит, что коэфициент при (M_0M_3) в выражении для $d^2(M_0M_1)$ равен нулю; мы получаем следующее условие:

$$\omega_1^3\omega_0^2 - \omega_1^2\omega_0^3 = 0. \tag{I,13}$$

Аналогично, для асимптотической касательной (M_0M_2) имеем

$$\sum(M_0M_2)\,d^2(M_0M_2)$$

или

$$\omega_2^1\omega_0^3 - \omega_2^3\omega_0^1 = 0. \tag{I,14}$$

В координатах относительно тетраэдра T уравнения инвариантных конусов (I,13) и (I,14) запишутся так:

$$(\Gamma_{11}^2 x + \Gamma_{12}^2 y + \Gamma_{13}^2 z)z - \Gamma_{12}^3 y^2 = 0; \tag{I,13'}$$

$$(\Gamma_{21}^1 x + \Gamma_{22}^1 y + \Gamma_{23}^1 z)z - \Gamma_{21}^3 x^2 = 0. \tag{I14'}$$

Они пересекаются по четырем инвариантным образующим. Полярная плоскость, соответствующая асимптотической касательной (M_0M_2) относительно конуса (I,13'), имеет уравнение

$$\Gamma_{12}^2 z - 2\Gamma_{12}^3 y = 0.$$

А полярная плоскость, соответствующая асимптотической касательной (M_0M_1) относительно конуса (I,14'),

$$\Gamma_{21}^1 z - 2\Gamma_{21}^3 z = 0.$$

Примем прямую пересечения этих полярных плоскостей за ось z, то есть за прямую (M_0M_3) тетраэдра T; тогда

$$\Gamma_{12}^{2}=0; \quad \Gamma_{21}^{1}=0; \tag{I,15}$$

7. Канонический тетраэдр

Условия (I,8), (I,11) и (I,15) фиксируют вершины M_0, M_1, M_2 и ось (M_0M_3) тетраэдра T; произвольным еще остается выбор точки M_3 и нормирование всех вершин. Если все это сделать и задать формы

$$\begin{gathered} \omega_0^1,\ \omega_0^2,\ \omega_0^3; \quad \omega_1^3=\Gamma_{12}^3\omega_0^2; \quad \omega_2^3=\Gamma_{21}^3\omega_0^1; \\ \omega_1^2=\Gamma_{11}^2\omega_0^1+\Gamma_{13}^2\omega_0^3; \quad \omega_2^1=\Gamma_{22}^1\omega_0^2+\Gamma_{23}^1\omega_0^3; \end{gathered} \tag{I,16}$$

тогда тетраэдр закреплен и все другие формы ω_i^k определяются из формул структуры (I,2). В частности, воспользовавшись ими для вычисления внешних производных форм ω_1^3, ω_2^3, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{12}^3)_1+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{01}^0+\Gamma_{31}^3-\Gamma_{11}^1-\Gamma_{21}^2)=0; \\ &(\Gamma_{21}^3)_2+\Gamma_{21}^3(\Gamma_{02}^0+\Gamma_{32}^3-\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2)=0; \\ &(\Gamma_{12}^3)_3+\Gamma_{12}^0+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{03}^0+\Gamma_{33}^3+\Gamma_{32}^2-\Gamma_{23}^3-\Gamma_{13}^1)=0; \\ &(\Gamma_{21}^3)_3+\Gamma_{21}^0+\Gamma_{21}^3(\Gamma_{03}^0+\Gamma_{33}^3+\Gamma_{31}^1-\Gamma_{23}^2-\Gamma_{13}^1)=0; \\ &\Gamma_{11}^0+\Gamma_{12}^3\Gamma_{31}^2-\Gamma_{13}^2(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3)=0; \\ &\Gamma_{22}^0+\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1-\Gamma_{23}^1(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3)=0. \end{aligned} \tag{I,17}$$

(Здесь и в дальнейшем мы пользуемся обозначением:

$$d\Gamma=(\Gamma)_1\,\omega_0^1+(\Gamma)_2\,\omega_0^2+(\Gamma)_3\,\omega_0^3).$$

С помощью выбора вершины M_3 и нормирования вершин M_1 и M_2 можно сделать

$$\Gamma_{33}^0=0; \quad \Gamma_{31}^1=1; \quad \Gamma_{32}^2=1. \tag{I,18}$$

Нормированием вершины M_3 можно детерминант $(M_0M_1M_2M_3)$ сделать равным единице [1]:

$$(M_0M_1M_2M_3)=1; \tag{I,19}$$

диференцируя (I,19) и воспользовавшись таблицей (A), получим

$$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{I,20}$$

Если ограничиться только рассмотрением отдельных кривых неголономной поверхности, то надлежащим нормированием вершины M_0 можно сделать

$$\omega_0^0=0. \tag{I,21}$$

Многие авторы, пользуясь неоднородными проективными координатами x, y, z, задают неголономную поверхность диференциальным уравнением

$$dz=p\,dx+q\,dy.$$

Для того чтобы установить связь между формулами этих двух методов, положим

$$\omega_0^1 = dx; \quad \omega_0^2 = dy; \quad \omega_0^3 = dz - p\,dx - q\,dy,$$

тогда найдем

$$\omega_1^3 = q_x\,dy; \quad \omega_2^3 = p_y\,dx,$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{p_y + q_x}\{p_{xx}dx + p_{xz}dz\}; \quad \omega_2^1 = -\frac{1}{p_y + q_x}\{q_{yy}dy + q_{yz}dz\}.$$

Здесь тетраэдр T принят за координатный, поэтому в точке M_0 имеем:

$$x = y = z = 0; \quad p = q = p_x = q_y = p_z = q_z = p_{xy} = q_{xy} = 0.$$

II. Инварианты, связанные с характеристикой неголономности

1. Диференциальная форма D_2

Рассмотрим ангармоническое отношение четырех точек пересечения асимптотических касательных в точке M_0 и в бесконечно-близкой точке M_0^* с прямой пересечения соответствующих плоскостей $(M_0M_1M_2)$ и $(M_0^*M_1^*M_2^*)$ системы. В точке M_0 асимптотическими касательными являются ребра (M_0M_1) и (M_0M_2) канонического тетраэдра; в точке M_0^* с точностью до бесконечно-малых третьего порядка —

$$(M_0^*M_1^*) = (M_0M_1) + d(M_0M_1) + \frac{1}{2}d^2(M_0M_1) =$$

$$+ a_{01}(M_0M_1) + a_{02}(M_0M_2) + a_{03}(M_0M_3) +$$
$$+ a_{12}(M_1M_2) + a_{13}(M_1M_3) + a_{23}(M_2M_3); \tag{II,1}$$

$$(M_0^*M_2^*) = (M_0M_2) + d(M_0M_2) + \frac{1}{2}d^2(M_0M_2) =$$

$$= b_{01}(M_0M_1) + b_{02}(M_0M_2) + b_{03}(M_0M_3) +$$
$$+ b_{12}(M_1M_2) + b_{13}(M_1M_3) + b_{23}(M_2M_3),$$

где коэфициенты a_{13}, a_{23}, b_{13}, b_{23} имеют следующие значения:

$$a_{13} = -\omega_0^3 - \frac{1}{2}(d\omega_0^3 + \omega_0^2\omega_2^3 - \omega_0^1\omega_1^3);$$

$$a_{23} = \omega_0^2\omega_1^3 - \omega_0^3\omega_1^2;$$

$$b_{13} = \omega_0^1\omega_2^3 - \omega_0^3\omega_2^1; \tag{II,2}$$

$$b_{23} = -\omega_0^3 - \frac{1}{2}(d\omega_0^3 + \omega_0^1\omega_1^3 - \omega_0^2\omega_2^3).$$

Соединим вышеуказанные точки с вершиной M_0 и рассмотрим четыре луча

$$(M_0M_1),\ (M_0M_2),\ (M_0M_1) + \lambda(M_0M_2),\ (M_0M_1) + \mu(M_0M_2) \tag{II,3}$$

λ и μ определяются из условий пересечения:

$$\Sigma\{(M_0M_1)+\lambda(M_0M_2)\}(M_0^*M_1^*)=0; \quad \Sigma\{(M_0M_1)+\mu(M_0M_2)\}(M_0^*M_2^*)=0;$$

откуда, принимая во внимание (II,1) и (II,2), находим:

$$\lambda=-\frac{a_{23}}{a_{13}}=-\frac{\omega_0^3\omega_1^2-\omega_0^2\omega_1^3}{\omega_0^3+\frac{1}{2}(d\omega_0^3+\omega_0^2\omega_2^3-\omega_0^1\omega_1^3)};$$

$$\mu=-\frac{b_{13}}{b_{23}}=-\frac{\omega_0^3\omega_2^1-\omega_0^1\omega_2^3}{\omega_0^3+\frac{1}{2}(d\omega_0^3+\omega_0^1\omega_1^3-\omega_0^2\omega_2^3)}. \tag{II,4}$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

а) $\omega_0^3=0$, то есть перемещение происходит вдоль кривой неголономной поверхности; ангармоническое отношение четырех лучей (II,3), как показал Бланк [2], имеет своим пределом величину

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{(\Gamma_{12}^3-\Gamma_{21}^3)^2}{4\Gamma_{21}^3\,\Gamma_{12}^3}=\frac{(J+1)^2}{4J}. \tag{II,5}$$

Это дает нам геометрическую интерпретацию условия интегрируемости уравнения $\omega_0^3=0$. В случае интегрируемости этот предел равен нулю.

б) $\omega_0^3\neq 0$, то есть перемещение происходит не вдоль кривой неголономной поверхности; главная часть ангармонического отношения лучей (II,3), как показал Ванг [4], равна

$$D_2=\frac{\{\omega_0^1\omega_1^3-\omega_0^3\omega_1^1\}\,\{\omega_0^3\omega_2^1-\omega_0^1\omega_2^3\}}{(\omega_0^3)^2}. \tag{II,6}$$

Инвариантная диференциальная форма D_2 обращается в нуль, когда перемещение происходит вдоль образующей одного из инвариантных конусов (I.13) или (I.14); вдоль направлений образующих этих конусов асимптотическая касательная точки M_0^* пересекает соответствующую асимптотическую касательную точки M_0.

2. Инвариантная плоскость и инвариантная касательная [3]

Рассмотрим совокупность точек пространства, в которых характеристика неголономности J сохраняет постоянное значение, равное ее значению J_0 в точке M_0. Эти точки расположены на поверхности

$$J(u^1, u^2, u^3) = J_0. \tag{II,7}$$

Касательная плоскость к этой поверхности в точке M_0

$$J_1x+J_2y+J_3z=0; \tag{II,8}$$

проективно-инвариантна (здесь обозначено $dJ=J_1\omega_0^1+J_2\omega_0^2+J_3\omega_0^3$). Эта плоскость пересекает плоскость $(M_0M_1M_2)$ системы по инвариантной касательной:

$$J_1x+J_2y=0; \quad z=0. \tag{II,9}$$

3. Присоединенная точечно-плоскостная система

Поставим каждой точке пространство M_0 в соответствие инцидентную ей инвариантную плоскость (II,8). Эту точечно-плоскостную систему условимся называть присоединенной к данной.

Инвариантная плоскость (II,8) может быть определена тремя точками

$$M_0,\ J_2M_1 - J_1M_2,\ J_3M_1 - J_1M_3$$

или тангенциальными координатами

$$J_3(M_0M_1M_2) - J_2(M_0M_1M_3) + J_1(M_0M_2M_3). \tag{II.10}$$

Присоединенная точечно-плоскостная система определяет в каждой точке пространства проективное соответствие между прямыми связки и полем прямых в инвариантной плоскости (§ 4, гл. 1); прямой

$$(M_0\,dM_0) = \omega_0^1(M_0M_1) + \omega_0^2(M_0M_2) + \omega_0^3(M_0M_3); \tag{II,11}$$

соответствует прямая пересечения плоскости (II,10) с плоскостью

$$dJ_3(M_0M_1M_2) - dJ_2(M_0M_1M_3) + dJ_1(M_0M_2M_3) + J_3d(M_0M_1M_2) - \\ - J_2d(M_0M_1M_3) + J_1d(M_0M_2M_3).$$

или, воспользовавшись таблицей (В) и соотношениями (I,20), получим эту прямую как пересечение двух плоскостей:

$$\left\{\begin{array}{l} J_3(M_0M_1M_2) - J_2(M_0M_1M_3) + J_1(M_0M_2M_3) \\ {[dJ_3 - \Sigma J_\alpha\omega_3^\alpha](M_0M_1M_2) + [-dJ_2 + \Sigma J_\alpha\omega_2^\alpha](M_0M_1M_3) +} \\ \quad + [dJ_1 - \Sigma J_\alpha\omega_1^\alpha](M_0M_2M_3) + \Sigma J_\alpha\omega_0^\alpha(M_1M_2M_3). \end{array}\right. \tag{II,12}$$

4. Конус второго порядка

а) Точечно-плоскостная система определяет в каждой точке пространства проективное соответствие между прямыми связки с центром в M_0 и полем прямых в плоскости $(M_0M_1M_2)$ системы (§ 4 гл. 1). Присоединенная система определяет аналогичное соответствие между прямыми этой же связки и полем прямых в инвариантной плоскости (§ 3 гл. II).

В первом случае, прямой

$$(M_0\,dM_0) = \omega_0^1(M_0M_1) + \omega_0^2(M_0M_2) + \omega_0^3(M_0M_3); \tag{II,13}$$

соответствует прямая

$$\left\{\begin{array}{l} (M_0M_1M_2) \\ \omega_2^3(M_0M_1M_3) - \omega_1^3(M_0M_2M_3) + \omega_0^3(M_1M_2M_3). \end{array}\right. \tag{II,14}$$

Во втором случае, той же прямой (II,13) соответствует прямая

$$\left\{\begin{array}{l} J_3(M_0M_1M_2) - J_2(M_0M_1M_3) + J_1(M_0M_2M_3) \\ {[dJ_3 - \Sigma J_\alpha\omega_3^\alpha](M_0M_1M_2) + [-dJ_2 + \Sigma J_\alpha\omega_2^\alpha](M_0M_1M_3) +} \\ \quad + [dJ_1 - \Sigma J_\alpha\omega_1^\alpha](M_0M_2M_3) + \Sigma J_\alpha\omega_0^\alpha(M_1M_2M_3). \end{array}\right. \tag{II,15}$$

Будем искать те направления (II.13), для которых соответствующие прямые (II.14) и (II.15) пересекаются. Условия их пересечения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \omega_2^3 & -\omega_1^3 & \omega_0^3 \\ * & -J_2 & J_1 & 0 \\ * & -dJ_2+\Sigma J_\alpha\omega_2^\alpha & dJ_1-\Sigma J_\alpha\omega_1^\alpha & \Sigma J_\alpha\omega_0^\alpha \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{(II,16)}$$

дает уравнение инвариантного конуса второго порядка:

$$(J_1\omega_0^1+J_2\omega_0^2)(J_2\omega_1^3-J_1\omega_2^3)+[J_2\,dJ_1-J_1\,dJ_2+ \\ +J_1^2\omega_2^1+J_1J_2(\omega_2^2-\omega_1^1)-J_2^2\omega_1^2]\omega_0^3=0, \qquad \text{(II,17)}$$

или в координатах относительно тетраэдра T

$$(J_1x+J_2y)(\Gamma_{12}^3J_2y-\Gamma_{21}^3J_1x)+[(J_2J_{11}-J_1J_{21}-J_1J_2(\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^1)-J_2^2\Gamma_{11}^2)\,x+ \\ +((J_2J_{12}-J_1J_{22}+J_1^2\Gamma_{22}^1+J_1J_2(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1))\,y+ \qquad \text{(II,17')} \\ +(J_2J_{13}-J_1J_{23}+J_1^2\Gamma_{23}^1-J_1J_2(\Gamma_{23}^2-\Gamma_{13}^1)-J_2^2\Gamma_{13}^2)\,z]\,z=0.$$

Плоскость $(M_0M_1M_2)$ системы содержит две образующие этого конуса: инвариантную касательную (II,9) и соответствующую ей прямую $\Gamma_{21}^3J_1x-\Gamma_{12}^3J_2y=0$; $z=0$; в проективном соответствии пучка касательных неголономной поверхности. Инвариантная плоскость, кроме инвариантной касательной, содержит еще одну образующую конуса — прямую, которая соответствует инвариантной касательной (II,9) в пучке касательных к поверхности $J=J_0$:

$$\left\{ \begin{aligned} & J_1x+J_2y+J_3z=0; \\ & (J_2J_{11}-J_1J_{21}-J_1J_2(\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^1)-J_2^2\Gamma_{11}^2+\Gamma_{21}^3J_1J_3)\,x+ \\ & +(J_2J_{12}-J_1J_{22}+J_1J_2(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)+J_1^2\Gamma_{22}^1-\Gamma_{12}^3J_2J_3)\,y+ \\ & +(J_2J_{13}-J_1J_{23}+J_1J_2(\Gamma_{23}^2-\Gamma_{13}^1)+J_1^2\Gamma_{23}^1-J_2\Gamma_{13}^2)\,z=0. \end{aligned} \right. \qquad \text{(II,18)}$$

Точку L пересечения прямых (II,14) и (II,15), при условии (II,17), можно определить из трех уравнений:

$$z=0; \quad \omega_1^3x+\omega_2^3y+\omega_0^3t=0; \quad J_1x+J_2y+J_3z=0. \qquad \text{(II,19)}$$

Точка L лежит на инвариантной касательной; ее координаты такие:

$$x=J_2\omega_0^3; \quad y=-J_1\omega_1^3; \quad z=0; \quad t=J_1\Gamma_{21}^3\omega_0^1-J_2\Gamma_{12}^3\omega_0^2. \qquad \text{(II,20)}$$

Здесь ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 связаны соотношением (II,17).

б) К этому конусу (II,17) можно прийти, исходя из других соображений. Инвариантную касательную (II,9) можно задать двумя точками

$$M_0 \text{ и } P=J_2M_1-J_1M_2;$$

таким образом, ее плюккеровы координаты будут

$$(M_0P)=J_2(M_0M_1)-J_1(M_0M_2). \qquad \text{(II,21)}$$

Инвариантная касательная в бесконечно близкой точке M_0^* с точностью до бесконечно-малых третьего порядка будет

$$
\begin{aligned}
(M_0^*P^*) &= (M_0P) + d(M_0P) + \frac{1}{2}d^2(M_0P) = \\
&= f_{01}(M_0M_1) + f_{02}(M_0M_2) + f_{03}(M_0M_3) + \\
&\quad + f_{12}(M_1M_2) + f_{13}(M_1M_3) + f_{23}(M_2M_3),
\end{aligned}
\tag{II,22}
$$

где коэфициенты f_{13} и f_{23}, которые нас интересуют, имеют следующие значения:

$$
\begin{aligned}
f_{13} &= (-J_2 - dJ_2 + J_1\omega_2^1 + J_2\omega_2^2)\,\omega_0^3 - J_1\omega_2^3\omega_0^1 + \frac{1}{2}J_2(\omega_1^3\omega_0^1 - \omega_2^2\omega_0^2 - d\omega_0^3); \\
f_{23} &= (J_1 + dJ_1 + J_2\omega_1^2 - J_1\omega_1^1)\,\omega_0^3 + J_2\omega_1^3\omega_0^2 + \frac{1}{2}J_1(\omega_1^3\omega_0^1 - \omega_2^3\omega_0^2 + d\omega_0^3).
\end{aligned}
\tag{II,23}
$$

Будем теперь искать те направления $(\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3)$, для которых прямые (II,21) и (II,22) пересекаются; условие их пересечения

$$\sum(M_0P)\left\{(M_0P) + d(M_0P) + \frac{1}{2}d^2(M_0P)\right\} = 0,$$

или

$$J_1f_{13} - J_2f_{23} = 0$$

приводит к тому же конусу (II,17).

в) Таким образом образующими конуса (II.17) являются те прямые связки с центром в M_0 при перемещении вдоль которых инвариантная касательная в бесконечно близкой точке M_0^* пересекает инвариантную касательную точки M_0. Покажем, что точка их пересечения есть точка L (II,20) пересечения прямых (II,14) и (II,15). Действительно, точку L, как это видно из уравнений (II,19), мы определили как точку пересечения прямой (II,14) с инвариантной касательной точки M_0. Инвариантная касательная в бесконечно близкой точке M_0^* лежит в соответствующей бесконечно близкой плоскости $(M_0^*M_1^*M_2^*)$ системы. Эта плоскость, как мы видели (§ 4 гл. 1) пересекает плоскость $(M_0M_1M_2)$ по прямой (II,14); таким образом, инвариантная касательная в M_0^* пересекает инвариантную касательную точки M_0 в той же точке L, что и прямая (II, 14).

г) Каждой образующей l конуса (II, 17′) соответствует определенная точка L на инвариантной касательной, а так как последняя также является образующей конуса, то она вместе с l определяет некоторую плоскость λ. Таким образом, можно установить соответствие между пучком плоскостей, осью которого является инвариантная касательная и рядом точек на оси пучка. Определим это соответствие: плоскость пучка

$$J_1x + J_2y + \lambda z = 0 \tag{II,24}$$

пересекает конус (II,17′) по образующей l

$$\begin{cases} J_1x+J_2y+\lambda z=0; \\ [J_2a_1-J_1b_1+J_1\Gamma^3_{21}(\lambda-J_3)]\,x+[J_2a_2-J_1b_2-J_2\Gamma^3_{12}(\lambda-J_3)]\,y+ \\ \qquad\qquad +(J_2a_3-J_1b_3)=0, \end{cases} \tag{II,25}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ имеют те же значения, что и ниже (гл. II, § 6). Написав ее уравнение (II,25) в виде

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} J_2a_2-J_1b_2-J_2\Gamma^3_{12}(\lambda-J_3) & J_2a_3-J_1b_3 \\ J_2 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} J_2a_3-J_1b_3 & J_2a_1-J_1b_1+J_1\Gamma^3_{21}(\lambda-J_3) \\ \lambda & J_1 \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{z}{\begin{vmatrix} J_2a_1-J_1b_1+J_1\Gamma^3_{21}(\lambda-J_3) & J_2a_2-J_1b_2-J_2\Gamma^3_{12}(\lambda-J_3) \\ J_1 & J_2 \end{vmatrix}}; \tag{II,26}$$

мы получим координаты соответствующей точки L, если в формулы (II,20) вместо $\omega^1_0, \omega^2_0, \omega^3_0$ подставить соответствующие детерминанты из (II,26):

$$\begin{aligned} x&=J_2\,[b_2J_1^2-(a_2+b_1)\,J_1J_2+a_1J_2^2+J_1J_2\,(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{21})\,(\lambda-J_3)]; \\ y&=-J_1\,[b_2J_1^2-(a_2+b_1)\,J_1J_2+a_1J_2^2+J_1J_2\,(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{21})\,(\lambda-J_2)]; \\ z&=0; \\ t&=J_1J_2\,(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{21})\,(J_2a_1-J_1b_3)-[\Gamma^3_{21}J_1\,(J_2a_2-J_1b_2)+\Gamma^3_{12}J_2\,(J_2a_1-J_1b_1)]\,\lambda. \end{aligned} \tag{II,27}$$

Соответствие между пучком плоскостей (II, 24) и рядом точек (II, 27) — проективное.

Образующие конуса, лежащие в плоскости системы и в инвариантной плоскости, а также соответствующие им точки L определяются значениями $\lambda=\infty$ и $\lambda=J_3$.

5. Диференциальная форма D_1

Рассмотрим ангармоническое отношение четырех точек, в которых асимптотические касательные точки M_0 и инвариантные касательные точек M_0 и M^*_0 пересекают прямую пересечения соответствующих плоскостей системы.

Асимптотические касательные в точке M_0 — это прямые (M_0M_1) и (M_0M_2); инвариантная касательная в точке M_0 — это прямая (II,21): $(M_0P)=J_2\,(M_0M_1)-J_1\,(M_0M_2)$; инвариантная касательная в точке M^*_0 — это прямая (II,24):

$$(M^*_0P^*)=f_{01}\,(M_0M_1)+f_{02}\,(M_0M_2)+f_{03}\,(M_0M_3)+$$
$$+f_{12}\,(M_1M_2)+f_{13}\,(M_1M_3)+f_{23}\,(M_2M_3).$$

Соединим эти четыре точки с точкой M_0; получим четыре луча

$$(M_0M_1),\ (M_0M_2),\ J_2(M_0M_1)-J_1(M_0M_2),\ (M_0M_1)-\lambda(M_0M_2),$$

где λ определяется из условия пересечения

$$\sum\{(M_0M_1)-\lambda(M_0M_2)\}(M_0^*P^*)=0;$$

откуда

$$f_{23}+\lambda f_{13}=0,$$

или, подставляя значения f_{13} и f_{23} из (II,23):

$$\lambda=\frac{(J_1+dJ_1+J_2\omega_1^2-J_1\omega_1^1)\,\omega_0^3+J_2\omega_1^3\omega_0^2+\frac{1}{2}J_1(\omega_1^3\omega_0^1-\omega_2^3\omega_0^2+d\omega_0^3)}{(J_2+dJ_2-J_1\omega_2^1-J_2\omega_2^2)\,\omega_0^3+J_1\omega_2^3\omega_0^1-\frac{1}{2}J_2(\omega_1^3\omega_0^1-\omega_2^3\omega_0^2-d\omega_0^3)}. \tag{II,28}$$

Искомое ангармоническое отношение равно

$$D=\lambda:\frac{J_1}{J_2}. \tag{II,29}$$

Рассмотрим два случая:

а) $\omega_0^3=0$, то есть перемещение происходит вдоль кривой неголономной поверхности; искомое ангармоническое отношение имеет своим пределом конечную величину, зависящую от направления касательной

$$D=\frac{J_2\,\omega_0^2}{J_1\,\omega_0^1}\cdot\frac{2J_2\Gamma_{12}^3\omega_0^2+J_1(\Gamma_{12}^3-\Gamma_{21}^3)\,\omega_0^1}{2J_1\Gamma_{21}^3\omega_0^1-J_2(\Gamma_{12}^3-\Gamma_{21}^3)\,\omega_0^2}; \tag{II,30}$$

б) $\omega_0^3\neq 0$, с точностью до бесконечно-малых второго порядка $D=1-D_1$, где

$$D=\frac{(J_1\,\omega_0^1+J_2\,\omega_0^2)\,(J_2\,\omega_1^3-J_1\,\omega_2^3)+((J_1\,dJ_2-J_2\,dJ_1+J_1^2\,\omega_2^1-J_2^2\,\omega_1^2+J_1\,J_2(\omega_1^1-\omega_2^2))\,\omega_0^3}{J_1J_2\omega_0^2}. \tag{II,31}$$

Вдоль образующих конуса (II,17) инвариантная диференциальная форма D_1 обращается в нуль.

6. Пучок поверхностей второго порядка

Плоскости присоединений системы огибают однопараметрическое семейство поверхностей

$$J(u^1,u^2,u^3)=\text{const}; \tag{II,32}$$

а поэтому (§ 4 гл. I) проективное соответствие, установленное в § 3 гл. II, является полярным относительно пучка поверхностей второго порядка. Определим этот пучок поверхностей:

Уравнение прямой II,11 в координатах относительно T такое

$$\frac{x}{\omega_0^1}=\frac{y}{\omega_0^2}=\frac{z}{\omega_0^3}; \tag{II,11'}$$

а уравнение ей соответствующей прямой (II,12):

$$\begin{cases} J_1 x + J_2 y + J_3 z = 0; \\ [dJ_1 - \Sigma J_\alpha \omega_1^\alpha]\, x + [dJ_2 + \Sigma J_\alpha \omega_2^\alpha]\, y + [dJ_3 - \Sigma J_\alpha \omega_3^\alpha]\, z - \Sigma J_\alpha \omega_0^\alpha\, t = 0. \end{cases} \tag{II,12'}$$

Прибавив ко второму уравнению (II,12′) первое, умноженное на ω_0^0, и введя новые обозначения, получим прямую (II,12′) в виде:

$$\begin{cases} J_1 x + J_2 y + J_3 z = 0 \\ (a_1 x + b_1 y + c_1 z + J_1)\, \omega_0^1 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + J_2)\, \omega_0^2 + \\ \qquad + (a_3 x + b_3 y + c_3 z + J_3)\, \omega_0^3 = 0; \end{cases} \tag{II,12''}$$

где

$$a_1 = J_{11} - J_1 (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{01}^0) - J_2 \Gamma_{11}^2; \quad b_1 = J_{21} - J_2 (\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{01}^0) - J_3 \Gamma_{21}^3;$$
$$c_1 = J_{31} - J_1 \Gamma_{31}^1 - J_2 \Gamma_{31}^2 - J_3 (\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{01}^0);$$

$$a_2 = J_{12} - J_1 (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{02}^0) - J_3 \Gamma_{12}^3; \quad b_2 = J_{22} - J_1 \Gamma_{22}^1 - J_2 (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{02}^0);$$
$$c_2 = J_{32} - J_1 \Gamma_{32}^1 - J_2 \Gamma_{32}^2 - J_3 (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{02}^0); \tag{II,33}$$

$$a_3 = J_{13} - J_1 (\Gamma_{13}^1 \Gamma_{03}^0) - J_2 \Gamma_{12}^3; \quad b_3 = J_{23} - J_1 \Gamma_{32}^1 - J_2 (\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{03}^0);$$
$$c_3 = J_{33} - J_1 \Gamma_{33}^1 - J_2 \Gamma_{33}^2 - J_3 (\Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^0).$$

Так как внешняя производная от полного диференциала равна нулю, то имеем

$$(J_1 \omega_0^1 + J_2 \omega_0^2 + J_3 \omega_0^3)' = 0,$$

или

$$[d_1 J_1 \omega_0^1] + [dJ_2 \omega_0^2] + [dJ_3 \omega_0^3] + J_1 (\omega_0^1)' + J_2 (\omega_0^2)' + J_3 (\omega_0^3)' = 0;$$

откуда, воспользовавшись уравнениями структуры (I,2), получим следующие соотношения

$$b_1 = a_2; \quad c_1 = a_3; \quad c_2 = b_3. \tag{II,34}$$

При их выполнении наше соответствие, в чем нетрудно убедиться, будет полярным относительно пучка поверхностей

$$a_1 x^2 + b_2 y^2 + c_3 z^2 + 2b_1 xy + 2c_1 xz + 2c_2 yz +$$
$$+ 2(J_1 x + J_2 y + J_3 z) + \lambda (J_1 x + J_2 y + J_3 z)^2 = 0. \tag{II,35}$$

Если прямая (I.11′) лежит в инвариантной плоскости, тогда

$$J_1 \omega_0^1 + J_2 \omega_0^2 + J_3 \omega_0^3 = 0,$$

и ей соответствующая прямая (II.12′) проходит через точку M_0. Это соответствие в пучке касательных, в силу условий (II.33), является инволюционным. Двойные элементы этого соответствия — асимптотические касательные поверхности $J=J_0$; их уравнение

$$\begin{cases} J_1x+J_2y+J_3z=0; \\ a_1x^2+b_2y^2+c_3z^2+2b_1xy+2c_1xz+2c_2yz=0. \end{cases} \qquad \text{(II,36)}$$

Поверхности пучка (II.35) касаются друг друга вдоль этих прямых. В точке M_0 они все касаются инвариантной плоскости. Последняя их пересекает по прямым (II.36).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Проективно-диференциальная геометрия, ОНТИ, М., 1937.

2. Я. П. Бланк, О геометрической интерпретации условия интегрируемости Пфаффова диференциального уравнения. Сообщ. Харьк. н.-и. ин-та мат. и мех. т. XIII, 1936.

3. E. Bompiani, Sulle varieta anolonome, Rend. dei Lincei, V. 27, 1938.

4. H. Wang, On the projective linear element of a non-holonomic surface. Acad. Sinica Science Record. V. I, 1942.

Техредактор *Н. И. Мусник.* Корректор *Н. П. Тимошок.*

БФ 01543. Зак. № 448. Тираж 1300. Формат бумаги 70×108/16. Бум. листов 3,625. Печ. листов 9,6. Подписано к печати 31/V 1950 г.

Типография Издательства АН УССР, Львов, ул. Стефаника, 11.