DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6432

УДК 517.5

**Ф. Г. Абдуллаєв** (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек, Киргизстан; Мерсін. ун-т, Туреччина),
**А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПОПЕРЕЧНИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ КЛАСІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МАЖОРАНТАМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОДУЛІВ ГЛАДКОСТІ У ПРОСТОРАХ $\mathcal{S}^p$ *

We obtain exact Jackson-type inequalities in terms of best approximations and averaged values of generalized moduli of smoothness in spaces $\mathcal{S}^p$. For classes of periodic functions defined by certain conditions on the averaged values of the generalized moduli of smoothness, the Kolmogorov, Bernstein, linear, and projective widths in the spaces $\mathcal{S}^p$ are found.

Отримано точні нерівності типу Джексона в термінах найкращих наближень функцій та усереднених значень їхніх узагальнених модулів гладкості у просторах $\mathcal{S}^p$. Знайдено точні значення колмогоровських, бернштейнівських, лінійних і проєктивних поперечників у просторах $\mathcal{S}^p$ класів періодичних функцій, визначених деякими умовами на усереднені значення їхніх узагальнених модулів гладкості.

**1. Вступ.** Нехай $\mathcal{S}^p$, $1 \le p < \infty$ (див., наприклад, [17], [18], гл. 11) — простір визначених на дійсній осі $2\pi$-періодичних комплекснозначних інтегровних за Лебегом на $[0, 2\pi]$ функцій $f$ $(f \in L)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{\mathcal{S}^p} := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

де $\widehat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$.

У випадку $p = 2$ простори $\mathcal{S}^2$ є звичайними просторами $L_2$ сумовних із квадратом функцій із нормою

$$\|f\|_{L_2} = \|f\|_{\mathcal{S}^2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

При довільному $1 \le p < \infty$ ці простори наслідують деякі важливі властивості гільбертових просторів, зокрема мінімальну властивість сум Фур'є (див. співвідношення (2.8)).

Активне вивчення апроксимативних властивостей просторів $\mathcal{S}^p$ бере свій початок від робіт О. І. Степанця (див., наприклад, [17], [18] (гл. 11), [19]). О. І. Степанець і А. С. Сердюк [20] ввели поняття $k$-го модуля гладкості в $\mathcal{S}^p$ і довели прямі та обернені теореми наближення в термінах цих модулів гладкості та найкращих наближень функцій. Ця тематика також активно розвивалась у багатьох роботах (див., наприклад, [2, 7, 8, 11, 15, 16], [18] (гл. 11), [21], [25]

* Виконано за часткової підтримки Киргизько-Турецького університету „Манас” (проєкт № KTMÜ-BAP-2019.FBE.02) та Фонду Фолькцваген (проєкт “From Modeling and Analysis to Approximation”).

(гл. 3)). В даній роботі ми продовжуємо такі дослідження. Зокрема, отримано точні нерівності типу Джексона в термінах найкращих наближень функцій та усереднених значень їхніх узагальнених модулів гладкості у просторах $\mathcal{S}^p$. Знайдено точні значення колмогоровських, бернштейнівських, лінійних і проєктивних поперечників у просторах $\mathcal{S}^p$ класів періодичних функцій, визначених деякими умовами на усереднені значення їхніх узагальнених модулів гладкості.

**2. Попередні відомості та позначення.** ***2.1. Узагальнені модулі гладкості та їхні усереднені значення.*** Нехай $\Phi$ — множина всіх неперервних обмежених невід'ємних парних функцій $\varphi(t)$ таких, що $\varphi(0)=0$ і міра Лебега множини $\{t\in\mathbb{R}\colon \varphi(t)=0\}$ дорівнює нулю.

Розвиваючи ідеї робіт [5, 6, 28], для фіксованої функції $\varphi\in\Phi$ означимо узагальнений модуль гладкості функції $f\in\mathcal{S}^p$ рівністю

$$\omega_\varphi(f,t)_{\mathcal{S}^p} := \sup_{|h|\le t}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^p(kh)|\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p}, \qquad t\ge 0. \tag{2.1}$$

Нехай $\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p}$ — класичний модуль гладкості функції $f\in\mathcal{S}^p$ порядку $\alpha>0$, тобто

$$\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p} := \sup_{|h|\le t}\|\Delta_h^\alpha f\|_{\mathcal{S}^p} = \sup_{|h|\le t}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(\cdot - jh)\right\|_{\mathcal{S}^p}, \tag{2.2}$$

де $\binom{\alpha}{j}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!}$ при $j\in\mathbb{N}$ і $\binom{\alpha}{j}=1$ при $j=0$.

Оскільки для коефіцієнтів Фур'є функції $\Delta_h^\alpha f$ справджуються рівності

$$|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(k)| = |1-e^{-\mathrm{i}kh}|^\alpha|\widehat{f}(k)| = 2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos kh)^{\frac{\alpha}{2}}|\widehat{f}(k)|, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

то з огляду на (1.1) і (2.1) маємо

$$\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p} = \sup_{|h|\le t}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{\frac{\alpha p}{2}}(1-\cos kh)^{\frac{\alpha p}{2}}|\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p} = \omega_{\varphi_\alpha}(f,\delta)_{\mathcal{S}^p},$$

де $\varphi_\alpha(t)=2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$. Іншими словами, класичні модулі гладкості $\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p}$ є частинним випадком модулів (2.1). У загальному випадку подібні модулі розглядались, наприклад, у [4, 9, 10, 13].

Далі, нехай $M(\tau)$, $\tau>0$, — множина всіх функцій $\mu$, обмежених неспадних і відмінних від сталої на відрізку $[0,\tau]$. Через $\Omega_\varphi(f,\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p}$, $u>0$, позначимо усереднене значення узагальненого модуля гладкості $\omega_\varphi$ функції $f$ з вагою $\mu\in M(\tau)$, тобто величину вигляду

$$\Omega_\varphi(f,\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p} := \left(\frac{1}{\mu(\tau)-\mu(0)}\int_0^u \omega_\varphi^p(f,t)_{\mathcal{S}^p}\,d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right)\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Зокрема, $\Omega_\alpha(f,\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p}$ позначає усереднене значення класичного модуля гладкості порядку $\alpha$ функції $f$ з вагою $\mu\in M(\tau)$, тобто $\Omega_\alpha(f,\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p} := \Omega_\varphi(f,\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p}$ при $\varphi(t)=\varphi_\alpha(t)= 2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Зазначимо, що для довільних $f \in \mathcal{S}^p$, $\tau > 0$, $\mu \in M(\tau)$ та $u > 0$ функціонали $\Omega_\varphi(f, \tau, \mu, u)_{\mathcal{S}^p}$ не перевищують значення $\omega_\varphi(f, u)_{\mathcal{S}^p}$, і тому в деяких випадках вони можуть бути більш ефективними для характеризації структурних та апроксимативних властивостей функції $f$.

***2.2. Означення $\psi$-похідних і функціональних класів.*** Нехай $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — довільна послідовність комплексних чисел. Якщо для даної функції $f \in L$ з рядом Фур'є $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx}$ ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k)\widehat{f}(k)e^{ikx}$ є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$, то $F$ називається (див., наприклад, [18], гл. 11) $\psi$-інтегралом функції $f$ і позначається $F = \mathcal{J}^\psi(f, \cdot)$. В свою чергу функція $f$ називається $\psi$-похідною функції $F$ і позначається $f = F^\psi$. У цьому випадку коефіцієнти Фур'є функцій $f$ і $f^\psi$ пов'язані рівностями

$$\widehat{f}(k) = \psi(k)\widehat{f}^\psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Множина $\psi$-інтегралів функцій $f$ із $L$ позначається $L^\psi$. Якщо $\mathfrak{N} \subset L$, то через $L^\psi\mathfrak{N}$ позначають множину $\psi$-інтегралів функцій $f \in \mathfrak{N}$. Зокрема, $L^\psi\mathcal{S}^p$ — множина $\psi$-інтегралів функцій $f \in \mathcal{S}^p$.

У випадку, коли $\psi(k) = (\mathrm{i}k)^{-r}$, $r = 0, 1, \ldots$, будемо позначати $L^\psi =: L^r$ і $L^\psi\mathfrak{N} =: L^r\mathfrak{N}$.

Для довільних фіксованих $\varphi \in \Phi$, $\tau > 0$ та $\mu \in M(\tau)$ розглянемо такі фунціональні класи:

$$L^\psi(\varphi, \tau, \mu, n)_{\mathcal{S}^p} := \left\{ f \in L^\psi\mathcal{S}^p : \Omega_\varphi\left(f^\psi, \tau, \mu, \frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p} \le 1, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{2.5}$$

$$L^\psi(\varphi, \tau, \mu, \Omega)_{\mathcal{S}^p} := \left\{ f \in L^\psi\mathcal{S}^p : \Omega_\varphi(f^\psi, \tau, \mu, u)_{\mathcal{S}^p} \le \Omega(u), \quad 0 \le u \le \tau \right\}, \tag{2.6}$$

де $\Omega(u)$ — фіксована неперервна монотонно зростаюча функція змінної $u \ge 0$ така, що $\Omega(0) = 0$. Також ми позначаємо $L^\psi(\alpha, \tau, \mu, n)_{\mathcal{S}^p} := L^\psi(\varphi, \tau, \mu, n)_{\mathcal{S}^p}$ і $L^\psi(\alpha, \tau, \mu, \Omega)_{\mathcal{S}^p} := L^\psi(\varphi, \tau, \mu, \Omega)_{\mathcal{S}^p}$ при $\varphi(t) = \varphi_\alpha(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}}(1 - \cos kh)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Зазначимо, що у випадку, коли $p = 2$, $\psi(k) = k^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$ і вагова функція $\mu(t) = t$, класи, подібні до класів $L^\psi(\alpha, \tau, \mu, n)_{\mathcal{S}^p}$ та $L^\psi(\alpha, \tau, \mu, \Omega)_{\mathcal{S}^p}$, вперше розглянув Л. В. Тайков [22, 23]. Він знайшов точні значення деяких поперечників таких класів у просторах $L_2$ у випадку, коли мажоранти $\Omega$ усереднених значень модулів гладкості задовольняють певні умови. Згодом питання знаходження точних значень поперечників у просторах $L_2$ та $\mathcal{S}^p$ аналогічних функціональних класів, породжених різними ваговими функціями $\mu$, вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [3, 7, 9, 12], [14] (гл. 4), [16, 27, 29, 30]).

***2.3. Найкращі наближення та поперечники функціональних класів.*** Нехай $\mathcal{T}_{2n+1}$, $n = 0, 1, \ldots,$ — множина всіх тригонометричних поліномів $T_n(x) = \sum_{|k|\le n} c_k e^{\mathrm{i}kx}$ порядку $n$, де $c_k$ — довільні комплексні числа.

Для будь-якої функції $f \in \mathcal{S}^p$ позначимо через $E_n(f)_{\mathcal{S}^p}$ її найкраще наближення тригонометричними поліномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ у просторі $\mathcal{S}^p$, тобто

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} := \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{\mathcal{S}^p}. \tag{2.7}$$

Із співвідношення (1.1) випливає (див., наприклад, [18], гл. 11, формула (11.4)), що для будь-якої функції $f \in \mathcal{S}^p$ при всіх $n = 0, 1, \ldots$

$$E_n^p(f)_{\mathcal{S}^p} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{\mathcal{S}^p}^p = \sum_{|k|\ge n} |\widehat{f}(k)|^p, \tag{2.8}$$

де $S_{n-1}(f) = S_{n-1}(f,\cdot) = \sum_{|k|\le n-1} \widehat{f}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot}$ — частинна сума Фур'є порядку $n-1$ функції $f$.

Далі, нехай $K$ — опукла центрально-симетрична підмножина простору $\mathcal{S}^p$ і $B$ — одинична куля простору $\mathcal{S}^p$. Нехай також $F_N$ — довільний $N$-вимірний підпростір простору $\mathcal{S}^p$, $N\in\mathbb{N}$, і $\mathcal{L}(\mathcal{S}^p,F_N)$ — множина лінійних операторів з $\mathcal{S}^p$ в $F_N$. Через $\mathcal{P}(\mathcal{S}^p,F_N)$ позначимо підмножину проєктивних операторів із множини $\mathcal{L}(\mathcal{S}^p,F_N)$, тобто множину операторів $A$ лінійного проєктування на множину $F_N$ таких, що $Af=f$ при $f\in F_N$. Величини

$$b_N(K,\mathcal{S}^p) = \sup_{F_{N+1}} \sup\{\varepsilon>0 : \varepsilon B\cap F_{N+1}\subset K\},$$

$$d_N(K,\mathcal{S}^p) = \inf_{F_N}\sup_{f\in K}\inf_{u\in F_N}\|f-u\|_{\mathcal{S}^p},$$

$$\lambda_N(K,\mathcal{S}^p) = \inf_{F_N}\inf_{A\in\mathcal{L}(\mathcal{S}^p,F_N)}\sup_{f\in K}\|f-Af\|_{\mathcal{S}^p},$$

$$\pi_N(K,\mathcal{S}^p) = \inf_{F_N}\inf_{A\in\mathcal{P}(\mathcal{S}^p,F_N)}\sup_{f\in K}\|f-Af\|_{\mathcal{S}^p}$$

називаються відповідно бернштейнівським, колмогоровським, лінійним і проєктивним $N$-поперечниками множини $K$ у просторі $\mathcal{S}^p$.

**3. Основні результати.** ***3.1. Нерівності типу Джексона.*** У цьому підпункті отримано нерівності типу Джексона в термінах найкращих наближень функцій та усереднених значень їхніх узагальнених модулів гладкості у просторах $\mathcal{S}^p$.

**Теорема 3.1.** *Нехай $f\in L^\psi\mathcal{S}^p$, $1\le p<\infty$, $\varphi\in\Phi$, $\tau>0$, $\mu\in M(\tau)$ і $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — довільна послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi(k)|\le K<\infty$. Тоді для довільного $n\in\mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \le \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}\nu(n)\,\Omega_\varphi\left(f^\psi,\tau,\mu,\frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}, \tag{3.1}$$

*де* $\nu(n) := \nu(n,\psi) = \sup_{|k|\ge n}|\psi(n)|$,

$$I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu) := \inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}}\int\limits_0^\tau \varphi^p\left(\frac{kt}{n}\right)d\mu(t). \tag{3.2}$$

*Якщо при цьому функція $\varphi$ є неспадною на проміжку $[0,\tau]$, $\nu(n)=\max\{|\psi(n)|,|\psi(-n)|\}$ і виконується умова*

$$I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu) = \int\limits_0^\tau \varphi^p(t)d\mu(t), \tag{3.3}$$

*то нерівність* (3.1) *не може бути покращена, тобто*

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi\mathcal{S}^p\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_\varphi\Big(f^\psi,\tau,\mu,\dfrac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} = \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^\tau\varphi^p(t)d\mu(t)}\right)^{1/p}\nu(n). \tag{3.4}$$

***Доведення.*** Нехай $f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p,\ 1 \leq p < \infty$. Внаслідок (2.4) і (2.8) маємо

$$E_n^p(f)_{\mathcal{S}^p} = \sum_{|k|\geq n} |\widehat{f}(k)|^p \leq \sum_{|k|\geq n} \left|\frac{\nu(n)}{\psi(k)}\right|^p |\widehat{f}(k)|^p =$$

$$= \nu^p(n) \sum_{|k|\geq n} \left|\frac{\widehat{f}(k)}{\psi(k)}\right|^p = \nu^p(n) E_n^p(f^{\psi})_{\mathcal{S}^p}. \tag{3.5}$$

Як показано при доведенні теореми 2 в роботі [1], для довільної $g \in \mathcal{S}^p,\ 1 \leq p < \infty,\ \tau > 0$, $\varphi \in \Phi,\ \mu \in M(\tau)$ і $n \in \mathbb{N}$

$$E_n^p(g)_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{1}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)} \int\limits_0^{\tau} \omega_{\varphi}^p \left(g, \frac{t}{n}\right)_{\mathcal{S}^p} d\mu(t). \tag{3.6}$$

Покладаючи в (3.6) $g = f^{\psi}$, одержуємо

$$E_n^p(f^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)} \frac{\int_0^{\tau} \omega_{\varphi}^p\Big(f^{\psi}, \dfrac{t}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} d\mu(t)}{\mu(\tau)-\mu(0)} \leq$$

$$\leq \frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)} \Omega_{\varphi}^p \left(f^{\psi}, \tau, \mu, \frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}. \tag{3.7}$$

Об'єднуючи нерівності (3.5) і (3.7), отримуємо (3.1).

Нехай тепер функція $\varphi$ є неспадною на $[0,\tau]$, виконується нерівність (3.3) і $\nu(n) = \max\{|\psi(n)|, |\psi(-n)|\}$. Тоді на підставі (3.1) маємо

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_{\varphi}\Big(f^{\psi}, \tau, \mu, \dfrac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau} \varphi^p(u) d\mu(u)}\right)^{1/p} \nu(n). \tag{3.8}$$

Для доведення непокращуваності нерівності (3.8) розглянемо функцію

$$f_n(x) = \gamma + \varepsilon_{-n}\delta e^{-\mathrm{i}nx} + \varepsilon_n \delta e^{\mathrm{i}nx},$$

де $\gamma$ і $\delta$ — будь-які комплексні числа, а величина $\varepsilon_k,\ k \in \{-n, n\}$, дорівнює 1 при $\nu(n) = |\psi(k)|$ і 0 при $\nu(n) > |\psi(k)|$.

Оскільки функція $\varphi(nt)$ є неспадною на $\left[0, \dfrac{\tau}{n}\right]$, то внаслідок (2.1) і (2.4) маємо

$$\omega_{\varphi}(f_n^{\psi}, t) = |\delta|(\varepsilon_{-n} + \varepsilon_n)^{1/p}\, \frac{\varphi(nt)}{\nu(n)}. \tag{3.9}$$

Враховуючи (2.3), (3.9) і рівність $E_n(f_n)_{\mathcal{S}^p} = |\delta|(\varepsilon_{-n} + \varepsilon_n)^{1/p}$, бачимо, що

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_{\varphi}\Big(f^{\psi}, \tau, \mu, \dfrac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} \geq \frac{E_n(f_n)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_{\varphi}\Big(f_n^{\psi}, \tau, \mu, \dfrac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} =$$

$$= \frac{|\delta|(\varepsilon_{-n}+\varepsilon_n)^{1/p}(\mu(\tau)-\mu(0))^{1/p}\nu(n)}{\left(\displaystyle\int_0^{\tau/n}|\delta|^p(\varepsilon_{-n}+\varepsilon_n)\varphi^p(nt)d\mu(nt)\right)^{1/p}} = \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi^p(u)d\mu(u)}\right)^{1/p}\nu(n). \qquad (3.10)$$

Із співвідношень (3.8) і (3.10) отримуємо (3.4).

Теорему 3.1 доведено.

Об'єднуючи співвідношення (3.5) і (3.6), у яких $g = f^{\psi}$, і враховуючи неспадання модуля $\omega_{\varphi}(f,t)_{\mathcal{S}^p}$ при $t \geq 0$, робимо висновок, що має місце таке твердження.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай $f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \Phi$, $\tau > 0$, $\mu \in M(\tau)$ і $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi(k)| \leq K < \infty$. Тоді при будь-якому $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}\nu(n)\,\omega_{\varphi}\left(f,\frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}, \qquad (3.11)$$

*де $\nu(n) = \sup_{|k|\geq n}|\psi(n)|$, а величина $I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)$ визначається рівністю* (3.2).

Функція $\varphi_{\alpha}(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, є неспадною на відрізку $[0,\pi]$. Тому в цьому випадку справджується таке твердження.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай $f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$, $\tau > 0$, $\mu \in M(\tau)$ і $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi(k)| \leq K < \infty$. Тоді для довільних чисел $\alpha > 0$ і $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}\nu(n)\,\Omega_{\varphi}\left(f^{\psi},\tau,\mu,\frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}, \qquad (3.1')$$

*де $\nu(n) = \sup_{|k|\geq n}|\psi(n)|$, величина $I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)$ визначається рівністю* (3.2) *з $\varphi(t) = \varphi_{\alpha}(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$.*

*Якщо при цьому $\nu(n) = \max\{|\psi(n)|,|\psi(-n)|\}$ і*

$$I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu) = 2^{\frac{\alpha p}{2}}\int_0^{\tau}(1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}}d\mu(t), \qquad (3.3')$$

*то при $\tau \in (0,\pi]$ нерівність* (3.1′) *не може бути покращена, тобто*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}\mathcal{S}^p\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_{\alpha}\left(f^{\psi},\tau,\mu,\frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}} = \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\frac{\alpha p}{2}}\displaystyle\int_0^{\tau}(1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}}d\mu(t)}\right)^{1/p}\nu(n) =$$

$$= \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\alpha p}\displaystyle\int_0^{\tau}\sin^{\alpha p}\frac{t}{2}d\mu(t)}\right)^{1/p}\nu(n)\,. \qquad (3.4')$$

Розглянемо деякі наслідки з цього твердження для конкретних вагових функцій $\mu_1(t) = 1-\cos t$ і $\mu_2(t) = t$.

***Наслідок* 3.3.** *Нехай* $f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p$, $1 \le p < \infty$, *і* $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — *послідовність комплексних чисел таких, що* $|\psi(k)| \le K < \infty$. *Тоді для довільних* $\alpha > 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \le \left(\frac{2}{I_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1)}\right)^{1/p} \Omega_\alpha\left(f^{\psi},\pi,\mu_1,\frac{\pi}{n}\right)_{\mathcal{S}^p} \nu(n)\,, \tag{3.12}$$

*де* $\nu(n) = \sup_{|k|\ge n} |\psi(n)|$,

$$I_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1) = 2^{\frac{\alpha p}{2}} \inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}} \int_0^{\pi} \left(1-\cos\frac{kt}{n}\right)^{\frac{\alpha p}{2}} \sin t\, dt. \tag{3.13}$$

*Якщо при цьому* $\nu(n) = \max\{|\psi(n)|,|\psi(-n)|\}$ *і* $\dfrac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то нерівність* (3.12) *на множині* $L^{\psi}\mathcal{S}^p$ *не може бути покращена і*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}\mathcal{S}^p\\ f\ne \mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_\alpha\Big(f^{\psi},\pi,\mu_1,\dfrac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} = \frac{\left(\dfrac{\alpha p}{2}+1\right)^{1/p}}{2^{\alpha}}\,\nu(n). \tag{3.14}$$

***Доведення.*** Справді, якщо в наслідку 3.2 покласти $\tau = \pi$ і $\mu(t) = 1-\cos t$, то співвідношення (3.12) випливатиме з нерівності $(3.1')$. Якщо число $\dfrac{\alpha p}{2}$ є натуральним, то використаємо формулу (див. [20], формула (52))

$$\inf_{\theta\ge 1} \int_0^{\pi} (1-\cos\theta t)^{\lambda} \sin t\, dt = \frac{2^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \qquad \lambda\in\mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Покладаючи $\lambda = \dfrac{\alpha p}{2}$ і $\theta = \dfrac{k}{n}$, $k = n, n+1, n+2, \ldots$, бачимо, що $\theta \ge 1$. Тому

$$\inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}} \int_0^{\tau} \left(1-\cos\frac{kt}{n}\right)^{\frac{\alpha p}{2}} \sin t\, dt = \int_0^{\tau} (1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}} \sin t\, dt = \frac{2^{\frac{\alpha p}{2}+1}}{\dfrac{\alpha p}{2}+1}, \tag{3.16}$$

і рівність (3.14) випливає із співвідношення $(3.4')$, в якому $\mu(t) = 1-\cos t$ і $\tau = \pi$.

Наслідок 3.3 доведено.

У випадку, коли $p = 2$, $\mu_1(t) = 1-\cos t$, $\tau = \pi$ і $\varphi(t) = 2^{\frac12}(1-\cos t)^{\frac12}$, тобто коли $\omega_\varphi$ — звичайний модуль неперервності (модуль гладкості порядку 1), нерівність вигляду (3.11) отримав О. І. Степанець [18] (гл. 8). Як випливає з формули (3.16), у цьому випадку

$$\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p} = 2^{-1/2}.$$

***Зауваження* 3.1.** У випадку, коли $p = 2$ і $\psi(k) = (\mathrm{i}k)^{-r}$, $r = 0,1,\ldots$, рівність (3.14) можна записати у вигляді

$$\sup_{\substack{f\in L^{r}\mathcal{S}^2\\ f\ne \mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^2}}{\Omega_\alpha\Big(f^{(r)},\pi,\mu_1,\dfrac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^2}} = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{2^{\alpha}}\,n^{-r}, \qquad \alpha>0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.14'}$$

При $\alpha = 1$ це співвідношення випливає з результату М. І. Черних [26]. При довільних $\alpha = k \in \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$ точні значення величин у лівій частині $(3.14')$ отримали С. М. Васильєв [10], а також Х. Юссеф [29] у дещо іншій формі.

***Наслідок* 3.4.** *Нехай* $0 < \tau \le \dfrac{3\pi}{4}$, $\mu_2(t) = t$, *числа* $1 \le p < \infty$ *і* $\alpha > 0$ *такі, що* $\alpha p \ge 1$. *Нехай також* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *— послідовність комплексних чисел таких, що* $\nu(n) = \sup_{|k|\ge n} |\psi(n)| = \max\{|\psi(n)|, |\psi(-n)|\}$. *Тоді*

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi\mathcal{S}^p\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{\mathcal{S}^p}}{\Omega_\alpha\Big(f^\psi, \tau, \mu_2, \dfrac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}} = \left(\frac{\tau}{2^{\alpha p}\displaystyle\int_0^\tau \sin^{\alpha p}\frac{t}{2}dt}\right)^{1/p} \nu(n). \qquad (3.17)$$

***Доведення.*** Як показано в [11], при довільних $\tau \in \Big(0, \dfrac{3\pi}{4}\Big]$ і $\gamma \ge 1$

$$\inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}} \int\limits_0^\tau \Big|\sin\frac{\nu t}{2n}\Big|^\gamma dt = \int\limits_0^\tau \sin^\gamma\frac{t}{2}dt.$$

Тому при $\gamma = \alpha p$ і $\tau \in \Big(0, \dfrac{3\pi}{4}\Big]$ маємо

$$I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu_2) = 2^{\frac{\alpha p}{2}} \inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}} \int\limits_0^\tau \left(1-\cos\frac{kt}{n}\right)^{\frac{\alpha p}{2}} dt = 2^{\alpha p} \inf_{\substack{k\ge n\\ k\in\mathbb{N}}} \int\limits_0^\tau \Big|\sin\frac{kt}{2n}\Big|^{\alpha p} dt =$$

$$= 2^{\alpha p} \int\limits_0^\tau \Big|\sin\frac{t}{2}\Big|^{\alpha p} dt = 2^{\frac{\alpha p}{2}} \int\limits_0^\tau (1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}} dt.$$

Отже, співвідношення (3.17) випливає з рівності $(3.4')$, де $\mu(t) = t$ і $\tau \in \Big(0, \dfrac{3\pi}{4}\Big]$.

Наслідок 3.4 доведено.

Зазначимо, що у випадку, коли $p = 2$, $\psi(k) = (\mathrm{i}k)^{-r}$, $r \ge 0$ і $k = 1$ або $r \ge 1/2$ і $k \in \mathbb{N}$, рівність (3.17) випливає з результатів Л. В. Тайкова [22, 23].

***3.2. Поперечники класів* $L^\psi(\varphi,\mu,\tau,n)_{\mathcal{S}^p}$.** У цьому підпункті знайдено значення колмогоровських, бернштейнівських, лінійних і проєктивних поперечників означених формулою (2.5) класів $L^\psi(\varphi,\mu,\tau,n)_{\mathcal{S}^p}$ у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ задовольняють деякі природні умови. Для формулювання цих результатів позначимо через $\Psi$ множину всіх послідовностей $\{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ комплексних чисел таких, що $|\psi(k)| = |\psi(-k)| \ge |\psi(k+1)|$ при $k \in \mathbb{N}$.

**Теорема 3.2.** *Нехай* $1 \le p < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\tau > 0$, *функція* $\varphi \in \Phi$ *є неспадною на відрізку* $[0,\tau]$ *і* $\mu \in M(\tau)$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $N \in \{2n-1, 2n\}$ *справджуються нерівності*

$$\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^\tau \varphi^p(t)d\mu(t)}\right)^{1/p} |\psi(n)| \le P_N(L^\psi(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p}, \mathcal{S}^p) \le$$

$$\leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|, \tag{3.18}$$

*де величина* $I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)$ *визначається рівністю* (3.2) *і* $P_N$ *— будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

*Якщо при цьому виконується умова* (3.3), *то*

$$P_N(L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi^p(t)d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|. \tag{3.19}$$

***Доведення.*** Використовуючи теорему 3.1, з огляду на означення множини $\Psi$ для довільної функції $f\in L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p}$ маємо

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}\Omega_{\varphi}\left(f^{\psi},\tau,\mu,\frac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}|\psi(n)| \leq$$

$$\leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|. \tag{3.20}$$

Тоді, враховуючи означення проєктивного поперечника $\pi_N$, а також співвідношення (2.8), (3.20), робимо висновок, що

$$\pi_{2n-1}(L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) \leq E_n(L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p})_{\mathcal{S}^p} =$$

$$= \sup_{f\in L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p}} E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|. \tag{3.21}$$

Оскільки поперечники $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ і $\pi_N$ не зростають із зростанням $N$ і

$$b_N(K,X)\leq d_N(K,X)\leq \lambda_N(K,X)\leq \pi_N(K,X) \tag{3.22}$$

(див., наприклад, [24], гл. 4), то на підставі (3.21) отримуємо оцінку зверху для $P_N$ у (3.18).

Для встановлення необхідної оцінки знизу достатньо показати, що

$$b_{2n}(L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) \geq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi^p(u)d\mu(u)}\right)^{1/p}|\psi(n)| =: R_n. \tag{3.23}$$

У $(2n+1)$-вимірному просторі $\mathcal{T}_{2n+1}$ тригонометричних поліномів порядку $n$ розглянемо кулю $B_{2n+1}$, радіус якої дорівнює визначеній у (3.23) величині $R_n$,

$$B_{2n+1} = \left\{t_n\in\mathcal{T}_{2n+1}\colon \|t_n\|_{\mathcal{S}^p}\leq R_n\right\},$$

і покажемо виконання вкладення $B_{2n+1}\subset L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p}$.

Для довільного полінома $T_n \in B_{2n+1}$ внаслідок (2.1) і парності функції $\varphi$ з $\Phi$ маємо

$$\omega_\varphi^p(T_n^\psi, t)_{\mathcal{S}^p} = \sup_{0\le v\le t} \sum_{|k|\le n} \varphi^p(kv)|\widehat{T}_n^\psi(k)|^p.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (2.4) і неспадання на $[0,a]$ функції $\varphi$, при $\tau\in(0,a]$ отримуємо

$$(\mu(\tau)-\mu(0))\Omega_\varphi^p\Big(T_n^\psi,\tau,\mu,\frac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} = \int\limits_0^\tau \omega_\varphi^p\left(T_n^\psi,\frac{t}{n}\right)_{\mathcal{S}^p} d\mu(t) =$$

$$=\int\limits_0^\tau \sup_{0\le v\le \frac{t}{n}} \sum_{|k|\le n} \varphi^p(kv)|\widehat{T}_n^\psi(k)|^p d\mu(t) = \int\limits_0^\tau \sup_{0\le v\le t} \sum_{|k|\le n} \varphi^p\left(\frac{kv}{n}\right)\left|\frac{\widehat{T}_n(k)}{\psi(k)}\right|^p d\mu(t) \le$$

$$\le \frac{1}{|\psi(n)|^p}\int\limits_0^\tau \sum_{|k|\le n}\varphi^p(t)|\widehat{T}_n(k)|^p d\mu(t) \le \frac{\|T_n\|_{\mathcal{S}^p}^p}{|\psi(n)|^p}\int\limits_0^\tau \varphi^p(t)d\mu(t).$$

Тому з включення $T_n\in B_{2n+1}$ випливає нерівність $\Omega_\varphi\left(T_n^\psi,\tau,\mu,\dfrac{\tau}{n}\right)_{\mathcal{S}^p}\le 1$. Таким чином, $T_n\in$ $\in L^\psi(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p}$ і виконується вкладення $B_{2n+1}\subset L^\psi(\varphi,\mu,\tau,n)_{\mathcal{S}^p}$. На підставі означення бернштейнівського поперечника справджується нерівність (3.23). Отже, співвідношення (3.18) доведено. Легко бачити з умови (3.3), що оцінки зверху і знизу для величин $P_N(L^\psi(\varphi,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)$ збігаються і тому має місце рівність (3.19).

Теорему 3.2 доведено.

У випадку, коли $\varphi(t)=2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$, отримуємо таке твердження.

***Наслідок 3.5.*** *Нехай* $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\tau\in(0,\pi]$, $\alpha\in\mathbb{N}$ *і* $\mu\in M(\tau)$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $N\in\{2n-1,2n\}$ *справджуються нерівності*

$$\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\alpha p}\displaystyle\int_0^\tau \sin^{\alpha p}\frac{t}{2}d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\le P_N(L^\psi(\alpha,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)\le\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|,$$

*де величина* $I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)$ *визначається рівністю* (3.2) *з* $\varphi(t)=2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos kh)^{\frac{\alpha}{2}}$ *і* $P_N$ *— будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

*Якщо при цьому виконується умова* (3.3′), *то*

$$P_N(L^\psi(\alpha,\tau,\mu,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)=\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\alpha p}\displaystyle\int_0^\tau \sin^{\alpha p}\frac{t}{2}d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|.$$

Для вагових функцій $\mu_1(t)=1-\cos t$ і $\mu_2(t)=t$ з наслідку 3.5 одержуємо такі твердження.

***Наслідок 3.6.*** *Нехай* $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\alpha\in\mathbb{N}$ *і* $\mu_1(t)=1-\cos t$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $N\in\{2n-1,2n\}$

$$\frac{\left(\dfrac{\alpha p}{2}+1\right)^{1/p}}{2^\alpha}|\psi(n)|\le P_N(L^\psi(\alpha,\pi,\mu_1,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)\le\left(\frac{2}{I_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1)}\right)^{1/p}|\psi(n)|,$$

*де* $I_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1)$ — *величина вигляду* (3.13) *і* $P_N$ — *будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

*Якщо при цьому* $\dfrac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$P_N(L^{\psi}(\alpha,\pi,\mu_1,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \frac{\left(\dfrac{\alpha p}{2}+1\right)^{1/p}}{2^{\alpha}}|\psi(n)|.$$

***Наслідок* 3.7.** *Нехай* $\psi\in\Psi$, $0<\tau\le\dfrac{3\pi}{4}$, $\mu_2(t)=t$, *числа* $\alpha>0$ *і* $1\le p<\infty$ *такі, що* $\alpha p\ge 1$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $N\in\{2n-1,2n\}$

$$P_N(L^{\psi}(\alpha,\tau,\mu_2,n)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \left(\frac{\tau}{2^{\alpha p}\displaystyle\int_0^{\tau}\sin^{\alpha p}\frac{t}{2}dt}\right)^{1/p}|\psi(n)|,$$

*де* $P_N$ — *будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

***3.3. Поперечники класів*** $\boldsymbol{L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}}$**.** Знайдемо також значення поперечників класів $L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}$ вигляду (2.6) при деяких обмеженнях на мажоранти $\Omega$.

**Теорема 3.3.** *Нехай* $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, *функція* $\varphi\in\Phi$ *є неспадною на деякому відрізку* $[0,a]$, $a>0$, *і* $\varphi(a)=\sup\{\varphi(t): t\in\mathbb{R}\}$. *Нехай також* $\tau\in(0,a]$, $\mu\in M(\tau)$ *і при всіх* $\xi>0$ *і* $0<u\le a$ *функція* $\Omega$ *задовольняє умову*

$$\Omega\left(\frac{u}{\xi}\right)\left(\int\limits_0^{\xi\tau}\varphi_*^p(t)d\mu\left(\frac{t}{\xi}\right)\right)^{1/p} \le \Omega(u)\left(\int\limits_0^{\tau}\varphi^p(t)d\mu(t)\right)^{1/p}, \tag{3.24}$$

*де*

$$\varphi_*(t) := \begin{cases}\varphi(t), & 0\le t\le a,\\ \varphi(a), & t\ge a.\end{cases} \tag{3.25}$$

*Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$ *і* $N\in\{2n-1,2n\}$

$$\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi^p(t)d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\,\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right) \le P_N(L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) \le$$

$$\le \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\,\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right), \tag{3.26}$$

*де величина* $I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)$ *означена рівністю* (3.2) *і* $P_N$ — *будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

*Якщо при цьому виконується умова* (3.3), *то*

$$P_N(L^{\psi}(\varphi,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi^p(t)d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\,\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right). \tag{3.27}$$

***Доведення*** даної теореми в основному повторює доведення теореми 3.2. На основі нерівності (3.1) для довільної функції $f \in L^{\psi}(\varphi, \tau, \mu, \Omega)_{\mathcal{S}^p}$

$$E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p} |\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right), \tag{3.28}$$

звідки, враховуючи означення поперечника $\pi_N$ і співвідношення (2.8), отримуємо

$$\pi_{2n-1}(L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}, \mathcal{S}^p) = E_n(L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p})_{\mathcal{S}^p} =$$

$$= \sup_{f\in L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}} E_n(f)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p} |\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right). \tag{3.29}$$

Для отримання необхідної оцінки знизу покажемо, що

$$b_{2n}(L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}, \mathcal{S}^p) \geq \left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\varphi,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p} |\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right) =: R_n^*. \tag{3.30}$$

Для цього в $(2n+1)$-вимірному просторі $\mathfrak{T}_{2n+1}$ тригонометричних поліномів порядку $n$ розглянемо кулю $B_{2n+1}$, радіус якої дорівнює визначеній в (3.30) величині $R_n^*$,

$$B_{2n+1}^* = \left\{T_n \in \mathfrak{T}_{2n+1} : \|T_n\|_{\mathcal{S}^p} \leq R_n^*\right\},$$

і доведемо справедливість вкладення $B_{2n+1}^* \subset L^{\psi}(\varphi,\mu,\tau,\Omega)_{\mathcal{S}^p}$.

Припустимо, що $T_n \in B_{2n+1}^*$. Враховуючи неспадання функції $\varphi$ на $[0,a]$, а також співвідношення (2.4) і (3.25), маємо

$$(\mu(\tau)-\mu(0))\Omega_{\varphi}^p(T_n^{\psi},\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p} = \int_0^u \omega_{\varphi}^p(T_n^{\psi},t)_{\mathcal{S}^p} d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right) =$$

$$= \int_0^u \sup_{0\leq v\leq t} \sum_{|k|\leq n} \varphi^p(kv)|\widehat{T}_n^{\psi}(k)|^p d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right) = \int_0^u \sup_{0\leq v\leq t} \sum_{|k|\leq n} \varphi^p(kv)\left|\frac{\widehat{T}_n(k)}{\psi(k)}\right|^p d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\psi(n)|^p} \int_0^u \sum_{|k|\leq n} \varphi_*^p(nt)|\widehat{T}_n(k)|^p d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right) \leq \frac{\|T_n\|_{\mathcal{S}^p}^p}{|\psi(n)|^p} \int_0^u \varphi_*^p(nt) d\mu\left(\frac{\tau t}{u}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\|T_n\|_{\mathcal{S}^p}^p}{|\psi(n)|^p} \int_0^{nu} \varphi_*^p(t) d\mu\left(\frac{\tau t}{nu}\right).$$

Із включення $T_n \in B_{2n+1}^*$ і співвідношення (3.24) з $\xi = \dfrac{nu}{\tau}$ випливає, що

$$\Omega_{\varphi}(T_n^{\psi},\tau,\mu,u)_{\mathcal{S}^p} \leq \left(\frac{\int_0^{nu} \varphi_*^p(t) d\mu\left(\frac{\tau t}{nu}\right)}{\int_0^{\tau} \varphi^p(t) d\mu(t)}\right)^{1/p} \Omega\left(\frac{\tau}{n}\right) \leq \Omega(u).$$

Тому $B^*_{2n+1} \subset L^\psi(\varphi,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p}$ i за означенням бернштейнiвського поперечника справджується спiввiдношення (3.30). Об'єднуючи спiввiдношення (3.22), (3.28) i (3.30) та враховуючи монотонне незростання по $N$ кожного з поперечникiв $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ i $\pi_N$, отримуємо (3.26). За умови (3.3) оцiнки зверху i знизу в (3.26) величин $P_N(L^\psi(\varphi,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)$ збiгаються i тому виконуються нерiвностi (3.27).

Теорему 3.3 доведено.

У випадку $\varphi(t)=\varphi_\alpha(t)=2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos t)^{\frac{\alpha}{2}}$ справджується таке твердження.

***Наслiдок 3.8.*** *Нехай $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\tau\in(0,\pi]$, $\alpha>0$ i $\mu\in M(\tau)$. Нехай також при всiх $\xi>0$ i $0<u\le\pi$ функцiя $\Omega$ задовольняє умову*

$$\Omega\left(\frac{u}{\xi}\right)\left(\int\limits_0^{\xi\tau}(1-\cos t)_*^{\frac{\alpha p}{2}}d\mu\left(\frac{t}{\xi}\right)\right)^{1/p}\le\Omega(u)\left(\int\limits_0^{\tau}(1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}}d\mu(t)\right)^{1/p}, \qquad (3.24')$$

*де*

$$(1-\cos t)_*:=\begin{cases}1-\cos t, & 0\le t\le\pi,\\ 2, & t\ge\pi.\end{cases} \qquad (3.25')$$

*Тодi для довiльних $n\in\mathbb{N}$ i $N\in\{2n-1,2n\}$ справджуються нерiвностi*

$$\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\alpha p}\int_0^\tau\sin^{\alpha p}\dfrac{t}{2}d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right)\le P_N(L^\psi(\alpha,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)\le$$

$$\le\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right),$$

*де величина $I_{n,\alpha,p}(\tau,\mu)$ означена рiвнiстю* (3.2) *з $\varphi(t)=2^{\frac{\alpha}{2}}(1-\cos kh)^{\frac{\alpha}{2}}$ i $P_N$ — будь-який iз поперечникiв $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ чи $\pi_N$.*

*Якщо при цьому виконується умова $(3.3')$, то*

$$P_N(L^\psi(\alpha,\tau,\mu,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p)=\left(\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{2^{\alpha p}\int_0^\tau\sin^{\alpha p}\dfrac{t}{2}d\mu(t)}\right)^{1/p}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right).$$

Зазначимо, що для конкретних функцiй $\mu\in M(\tau)$ при певних обмеженнях на тi чи iншi параметри задачi щодо iснування функцiй $\Omega$, якi задовольняють умови вигляду (3.24) i $(3.24')$, дослiджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [3, 22, 23, 30]).

Для вагових функцiй $\mu_1(t)=1-\cos t$ i $\mu_2(t)=t$ з наслiдку 3.8 випливають такi твердження.

***Наслiдок 3.9.*** *Нехай $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\alpha>0$, $\mu_1(t)=1-\cos t$ i при всiх $\xi>0$ i $0<u\le\pi$ функцiя $\Omega$ задовольняє умову*

$$\Omega\left(\frac{u}{\xi}\right)\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\pi\xi}(1-\cos t)_*^{\frac{\alpha p}{2}}\sin\frac{t}{\xi}dt\right)^{1/p}\le\Omega(u)\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}}\sin t dt\right)^{1/p}, \qquad (3.31)$$

*де функція* $(1-\cos t)_*$ *задається співвідношенням* $(3.25')$.

*Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $N \in \{2n-1, 2n\}$

$$\frac{\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)^{1/p}}{2^{\alpha}}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right) \le P_N(L^{\psi}(\alpha,\pi,\mu_1,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) \le \frac{2^{1/p}|\psi(n)|}{I^{1/p}_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1)}\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right),$$

*де* $I_{n,\alpha,p}(\pi,\mu_1)$ — *величина вигляду* $(3.13)$ *і* $P_N$ — *будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

*Якщо при цьому* $\frac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$P_N(L^{\psi}(\alpha,\pi,\mu_1,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \frac{\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)^{1/p}}{2^{\alpha}}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right).$$

У випадку, коли $p=2$, $\psi(k)=(\mathrm{i}k)^{-r}$, $r\in\mathbb{N}$, і $\alpha=1$, наслідок 3.9 отримано в [3], а також доведено існування функцій $\Omega$, які задовольняють (3.31) при наведених вище обмеженнях на параметри $p$ і $\alpha$.

***Наслідок* 3.10.** *Нехай* $1\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $0<\tau\le\frac{3\pi}{4}$, $\mu_2=t$ *і при всіх* $\xi>0$ *і* $0<u\le\pi$ *функція* $\Omega$ *задовольняє умову*

$$\Omega\left(\frac{u}{\xi}\right)\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi\tau}(1-\cos t)_*^{\frac{\alpha p}{2}}\,dt\right)^{1/p} \le \Omega(u)\left(\int\limits_0^{\tau}(1-\cos t)^{\frac{\alpha p}{2}}\,dt\right)^{1/p}. \tag{3.32}$$

*Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $N \in \{2n-1, 2n\}$

$$P_N(L^{\psi}(\alpha,\tau,\mu_2,\Omega)_{\mathcal{S}^p},\mathcal{S}^p) = \left(\frac{\tau}{2^{\alpha p}\int_0^{\tau}\sin^{\alpha p}\frac{t}{2}dt}\right)^{1/p}|\psi(n)|\Omega\left(\frac{\tau}{n}\right),$$

*де* $P_N$ — *будь-який із поперечників* $b_N$, $d_N$, $\lambda_N$ *чи* $\pi_N$.

Зазначимо, що для $\alpha\in\mathbb{N}$ наслідки 3.2 і 3.3 (при $\psi\in\Psi$), а також 3.5, 3.8 і 3.9 встановив раніше А. С. Сердюк [16].

У випадку, коли $p=2$, $\psi(k)=(\mathrm{i}k)^{-r}$ і $r\ge 0$, $\alpha=1$ або $r\ge 1/2$, $\alpha\in\mathbb{N}$, наслідок 3.10 випливає з результатів робіт [22, 23] (див. також [14], гл. 4), де також доведено існування функцій $\Omega$, які задовольняють нерівність (3.32) з відповідними обмеженнями на параметри $p$, $\alpha$ і $r$.

Питання отримання нерівностей типу Джексона у просторах $\mathcal{S}^p$, а також знаходження точних значень поперечників класів, породжених обмеженнями на усереднені значення модулів гладкості, аналогічних до (2.3), розглядалися також у багатьох роботах (див., наприклад, [7, 8, 11]).

## Література

1. F. Abdullayev, S. Chaichenko, A. Shidlich, *Direct and inverse approximation theorems of functions in the Musielak-Orlicz type spaces*, Math. Inequal. Appl., **24**, № 2, 323 – 336 (2021).

2. F. G. Abdullayev, P. Özkartepe, V. V. Savchuk, A. L. Shidlich, *Exact constants in direct and inverse approximation theorems for functions of several variables in the spaces* $\mathcal{S}^p$, Filomat, **33**, № 5, 1471 – 1484 (2019).
3. Н. Айнуллоев, *Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в* $L_2$, Докл. АН ТаджССР, **29**, № 8, 415 – 418 (1984).
4. В. Ф. Бабенко, С. В. Конарева, *Неравенства типа Джексона – Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства*, Укр. мат. журн., **70**, № 9, 1155 – 1165 (2018).
5. J. Boman, H. S. Shapiro, *Comparison theorems for a generalized modulus of continuity*, Ark. Mat., **9**, 91 – 116 (1971).
6. J. Boman, *Equivalence of generalized moduli of continuity*, Ark. Mat., **18**, 73 – 100 (1980).
7. С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах* $S^p$, $1 \le p < \infty$, Укр. мат. журн., **56**, № 5. 595 – 605 (2004).
8. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, *О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространствах* $S^p$, $1 \le p < \infty$, Укр. мат. журн., **57**, № 11, 1458 – 1466 (2005).
9. С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения* $n$*-поперечников классов* $(\psi, \beta)$*-дифференцируемых функций в* $L_2$. $I$, Укр. мат. журн., **68**, № 6, 723 – 745 (2016).
10. С. Н. Васильев, *Неравенство Джексона – Стечкина в* $L_2[-\pi, \pi]$, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **7**, № 1, 75 – 84 (2001).
11. В. Р. Войцехівський, *Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору* $S^p$ *сумами Зигмунда*, Праці Ін-ту математики НАН України, **35**, 33 – 46 (2002).
12. М. Г. Есмаганбетов, *Поперечники классов из* $L_2[0, 2\pi]$ *и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона*, Мат. заметки, **66**, № 6, 816 – 820 (1999).
13. А. И. Козко, А. В. Рождественский, *О неравенстве Джексона в* $L_2$ *с обобщенным модулем непрерывности*, Мат. сб., **195**, № 8, 3 – 46 (2004).
14. A. Pinkus, $n$*-Widths in approximation theory*, Springer-Verlag (1985).
15. V. V. Savchuk, A. L. Shidlich, *Approximation of functions of several variables by linear methods in the space* $S^p$, Acta Sci. Math. (Szeged), **80**, № 3-4, 477 – 489 (2014).
16. А. С. Сердюк, *Поперечники в просторі* $S^p$ *класів функцій, що означаються модулями неперервності їх* $\psi$*-похідних*, Праці Ін-ту математики НАН України, **46**, 229 – 248 (2003).
17. А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* $S^p_\varphi$, Укр. мат. журн., **53**, № 3, 392 – 416 (2001).
18. A. I. Stepanets, *Methods of approximation theory*, VSP, Leiden, Boston (2005).
19. А. И. Степанец, *Задачи теории приближений в линейных пространствах*, Укр. мат. журн, **58**, № 1, 47 – 92 (2006).
20. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве* $S^p$, Укр. мат. журн., **54**, №1, 106 – 124 (2002).
21. М. Д. Стерлин, *Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений*, Докл. АН СССР, **202**, № 3, 545 – 547 (1972).
22. Л. В. Тайков, *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из* $L_2$, Мат. заметки, **20**, № 3, 433 – 438 (1976).
23. Л. В. Тайков, *Структурные и конструктивные характеристики функций из* $L_2$, Мат. заметки, **25**, № 2, 217 – 223 (1979).
24. В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. гос. ун-та, Москва (1976).
25. М. Ф. Тиман, *Аппроксимация и свойства периодических функций*, Наук. думка, Киев (2009).
26. Н. И. Черных, *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в* $L_2$, Мат. заметки, **2**, № 2, 513 – 522 (1967).
27. В. В. Шалаев, *О поперечниках в* $L_2$ *классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 125 – 129 (1991).
28. H. S. Shapiro, *A Tauberian theorem related to approximation theory*, Acta Math., **120**, 279 – 292 (1968).
29. Х. Юссеф, *О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в* $L_2$, Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч.тр. Твер. гос. ун-та, 100 – 114 (1988).
30. Х. Юссеф, *Поперечники классов функций в пространстве* $L_2(0, 2\pi)$, Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Калинин. гос. ун-та, 167 – 175 (1990).

Одержано 11.12.20