1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об общем случае симметрического движения системы трех материальных точек

Ю. Д. Соколов

§ 1. Вступление

Симметрическое движение трех материальных точек P_0, P_1, P_2, при котором треугольник $P_2P_0P_1$ остается равнобедренным, впервые рассматривалось, насколько нам известно, Д. Н. Горячевым[1] (для плоского движения двух точек, с равными массами, притягивающихся к неподвижному центру) и Франсеном[2] в 1895 г. для случая взаимодействия по закону Ньютона. Позднее оно послужило предметом исследований для Е. Вильчинского[3], Ж. Шази[4] и П. В. Воронца[5], причем последний трактовал задачу также для случая взаимного притяжения с силами, обратно пропорциональными кубам расстояний. В ряде наших мемуаров, посвященных этой задаче[6], подробно исследовались случаи интегрируемости и особые траектории при плоском движении как для случая Ньютонового закона, так и для законов сил значительно более общего характера.

В настоящей работе рассматривается случай пространственного симметрического движения трех материальных точек, взаимно притягивающихся или отталкивающихся с силами прямо пропорциональными произведению масс и некоторой функции $f(r)$ взаимного расстояния. После рассмотрения прямолинейного (§ 3) и *гомографического* (§ 4) движения устанавливается, что в общем случае негомографического движения и произвольной функции $f(r)$ треугольник $P_2P_0P_1$ может вращаться только около своей высоты или около оси, параллельной основанию, про-

---

[1] Известия имп. Об-ва люб. Е., А. и Э. Отд. физ. наук, VII и VIII. См. также Стеклов, Об одном преобразовании диф. ур-ий движ. своб. мат. точки в плоскости и его приложения (ibid., IX, 1897).

[2] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akadem. Förhandl., Arg. 52, n° 10.

[3] Annali di Math., 3-e série, t. XXI, 1913.

[4] Bull. Astr., 2-e série, t. I, 1920.

[5] Унив. известия № 1-2, Киев, 1907.

[6] Журнал Інституту математики Академії наук УРСР № 1 (1934). Збірник праць Інституту математики АН УРСР № 3 (1939), № 5 (1940), № 6 (1941). Последние два мемуара цитируются в дальнейшем, как „мемуар 1“ и „мемуар 2“.

ходящей через центр инерции системы (§ 2, 6). Далее (§ 5, 9, 10) указываются случаи интегрируемости уравнений движения в элементарных и эллиптических функциях.

Вторая половина работы посвящена исследованию траекторий парного (§ 7) и общего соударения (§ 8, 11—15) и траекторий неограниченного расхождения точек в конечный промежуток времени (§ 8, 16, 17). При этом, после наложения некоторых ограничений на функцию $f(r)$, дается характеристика поведения и аналитического представления искомых функций в окрестности $r=0$ и $r=+\infty$. Методы настоящего исследования совершенно аналогичны тем, которые были применены в статье „О движении системы трех материальных точек по одной прямой“ 1).

§ 2. Диференциальные уравнения движения относительно вращающихся осей

Рассмотрим движение трех материальных точек P_0, P_1, P_2, с массами m_0, m_1, m_2, взаимно притягивающихся (при $f(\Delta_{ij})<0$) или отталкивающихся (при $f(\Delta_{ij})>0$) с силами, равными по модулю

$$m_i m_j |f(\Delta_{ij})| \qquad (i, j=0, 1, 2;\ \ i \neq j), \tag{1}$$

где Δ_{ij} — взаимное расстояние точек P_i и P_j, а $f(r)=\dfrac{dF(r)}{dr}$ — функция действительная и аналитическая при всяком действительном, положительном значении аргумента.

Отнесем движение материальных точек к подвижной прямоугольной системе координатных осей $O\Xi HZ$, имеющей начало в центре инерции системы (0), который, не нарушая общности, будем считать неподвижным.

Обозначим радиус-вектор, относительные скорость и ускорение точки P_i и мгновенную угловую скорость осей $O\Xi HZ$ соответственно через

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_i &= \xi_i\bar{\xi}^0+\eta_i\bar{\eta}^0+\zeta_i\bar{\zeta}^0 \\ \bar{v}_i &= \xi_i'\bar{\xi}^0+\eta_i'\bar{\eta}^0+\zeta_i'\bar{\zeta}^0 \\ \bar{w}_i &= \xi_i''\bar{\xi}^0+\eta_i''\bar{\eta}^0+\zeta_i''\bar{\zeta}^0 \\ \bar{\omega} &= \omega_\xi\bar{\xi}^0+\omega_\eta\bar{\eta}^0+\omega_\zeta\bar{\zeta}^0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где штрихами обозначены производные по времени (t).

Уравнения движения системы в векторной форме будут иметь вид

$$\bar{w}_i+\bar{\omega}'\times\bar{r}_i+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)+2\bar{\omega}\times\bar{v}_i=\frac{1}{m_i}\operatorname{grad}_i U \qquad (i=0, 1, 2), \tag{3}$$

---

1) Украинский математический журнал № 3 (1949).

где

$$U = m_0 m_1 F(\Delta_{01}) + m_1 m_2 F(\Delta_{12}) + m_2 m_0 F(\Delta_{20}). \tag{4}$$

Пусть $m_1 = m_2$ и начальные данные в момент $t=0$ выбраны так, что во все время движения $\Delta_{01} = \Delta_{20}$, то есть треугольник $P_2P_0P_1$ остается равнобедренным.

Направим ось $O\Xi$ по оси симметрии треугольника, ось OH — параллельно его основанию $\overline{P_2P_1}$ и ось OZ — перпендикулярно к плоскости треугольника $P_2P_0P_1$.

Полагая тогда в (3):

$$m_1 = m_2 = m, \quad m_0 + 2m = M, \quad \frac{2m}{M} = \nu^2 = \frac{1}{\mu^2} < 1,$$

$$\xi_0 = -\nu^2 x,\ \xi_1 = \xi_2 = (1-\nu^2)\,x,\ \eta_0 = 0,\ \eta_1 = -\eta_2 = y > 0,\ \zeta_i = \zeta_i' = \zeta_i'' = 0\ (i = 0, 1, 2),$$

$$\Delta_{12} = 2y, \quad \Delta_{01} = \Delta_{20} = +\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho, \tag{5}$$

получим шесть уравнений:

$$x'' - (\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2)\,x = Mx\,\frac{f(\varrho)}{\varrho},$$

$$2\omega_\zeta x' + (\omega_\zeta' + \omega_\xi\omega_\eta)\,x = 0,$$

$$2\omega_\eta x' + (\omega_\eta' - \omega_\zeta\omega_\xi)\,x = 0,$$

$$x'' - \frac{2\omega_\zeta}{1-\nu^2}\,y' - (\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2)\,x - \frac{\omega_\zeta' - \omega_\xi\omega_\eta}{1-\nu^2}\,y = Mx\,\frac{f(\varrho)}{\varrho},$$

$$y'' + 2\omega_\zeta(1-\nu^2)\,x' + (1-\nu^2)(\omega_\zeta' + \omega_\xi\omega_\eta)\,x - (\omega_\zeta^2 + \omega_\xi^2)\,y = m_0 y\,\frac{f(\varrho)}{\varrho} + mf(2y),$$

$$-(1-\nu^2)(2\omega_\eta x' + \omega_\eta' x - \omega_\zeta\omega_\xi x) + 2\omega_\xi y' + \omega_\xi' y + \omega_\eta\omega_\zeta y = 0$$

или

$$x'' - (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)\,x = Mx\,\frac{f(\varrho)}{\varrho}, \tag{6_1}$$

$$y'' - (\omega_\zeta^2 + \omega_\xi^2)\,y = m_0 y\,\frac{f(\varrho)}{\varrho} + mf(2y), \tag{6_2}$$

$$2\omega_\zeta x' + (\omega_\zeta' + \omega_\xi\omega_\eta)\,x = 0, \tag{6_3}$$

$$2\omega_\eta x' + (\omega_\eta' - \omega_\zeta\omega_\xi)\,x = 0, \tag{6_4}$$

$$2\omega_\xi y' + (\omega_\xi' + \omega_\eta\omega_\zeta)\,y = 0, \tag{6_5}$$

$$2\omega_\zeta y' + (\omega_\zeta' - \omega_\xi\omega_\eta)\,y = 0. \tag{6_6}$$

Из уравнений (6_3), (6_6) найдем:

$$\begin{aligned} &\omega_\zeta(xy' - yx') = \omega_\xi\omega_\eta xy, \\ &\omega_\zeta'(xy' - yx') + \omega_\zeta\omega_\eta(xy' + yx') = 0. \end{aligned} \tag{$6_3'$}$$

Комбинация (6_4) и (6_5) дает

$$(\omega_\xi \omega'_\eta + \omega_\eta \omega'_\xi)\, xy + 2\omega_\xi \omega_\eta (xy' + yx') + \omega_\zeta (\omega_\eta^2 - \omega_\xi^2)\, xy = 0.$$

Диференцируя по t первое из этих уравнений, получим

$$\omega_\zeta (xy'' - yx'') + \omega'_\zeta (xy' - yx') = \omega_\xi \omega_\eta (xy' + yx') + (\omega_\xi \omega'_\eta + \omega_\eta \omega'_\xi)\, xy,$$

что на основании двух последних приводится к

$$\omega_\zeta [xy'' - yx'' - (\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2)\, xy] = 0. \tag{6'}$$

С другой стороны, из (6_1), (6_2) найдем

$$xy'' - yx'' - (\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2)\, xy = 2mxy \left[\frac{f(2y)}{2y} - \frac{f(\varrho)}{\varrho} \right]. \tag{$6'_1$}$$

Если $\omega_\zeta \neq 0$, то по $(6')$, $(6'_1)$, так как $y > 0$:

$$x \left[\frac{f(2y)}{2y} - \frac{f(\varrho)}{\varrho} \right] = 0,$$

откуда

$$x = 0 \tag{7_1}$$

или

$$\frac{f(2y)}{2y} - \frac{f(\varrho)}{\varrho} = 0;$$

последнее тождество возможно при произвольной функции $f(\varrho)$ и

$$2y = \varrho \tag{7_2}$$

или при

$$f(\varrho) = A\varrho. \tag{7_3}$$

Наконец, при $\omega_\zeta = 0$ из (6_6) найдем

$$\omega_\xi \omega_\eta = 0. \tag{7_4}$$

Рассмотрим последовательно случаи (7_1)—(7_4).

§ 3. Случай $x=0$

В случае $x=0$ $(\varrho = y)$ уравнения (6_1), (6_3), (6_4) удовлетворяются тождественно и во все время движения точки P_2, P_0, P_1 располагаются по прямой (оси $\overline{OY}$). В этом случае можно положить $\omega_\eta = 0$ и, так как по (6_5), (6_6) $\omega_\zeta \omega'_\xi - \omega_\xi \omega'_\zeta = 0$, $\dfrac{\omega_\xi}{\omega_\zeta} = \mathrm{const}$, то примем также, что $\omega_\xi = 0$, прямая $P_2 P_0 P_1$ вращается около неподвижной оси OZ с угловой скоростью ω_ζ, определяемой из (6_6):

$$\omega_\zeta = \frac{c}{y^2}, \tag{8_1}$$

где $c = y_0^2 \omega_{\zeta 0}$ — произвольная постоянная.

Уравнение (6_2) примет по (8_1) вид:

$$y'' = m_0 f(y) + mf(2y) + \frac{c^2}{y^3}. \tag{8_2}$$

Это уравнение удовлетворяется при $y=\text{const}=y_0$ (прямолинейная конфигурация относительного равновесия), если

$$m_0 f(y_0) + mf(2y_0) = -\frac{c^2}{y_0^3} = -y_0\omega_{\zeta 0}^2;$$

абсолютной траекторией точек P_1, P_2 является окружность радиуса y^0 с центром в неподвижной точке P_0 (совпадающей с 0), описываемая с постоянной угловой скоростью $\omega_{\zeta 0}$. Прямолинейная конфигурация абсолютного равновесия ($c=0$, $\omega_\zeta=0$) возможна при условии

$$m_0 f(y_0) + mf(2y_0) = 0.$$

Если y' не обращается в нуль тождественно, то, интегрируя (8_2), получим

$$y'^2 = 2m_0F(y) + mF(2y) - \frac{c^2}{y^2} + 2h, \tag{$8_2'$}$$

где $2h$ — постоянная интегрирования и, наконец

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\pm\sqrt{2m_0F(y) + mF(2y) - \frac{c^2}{y^2} + 2h}}. \tag{$8_2''$}$$

Следовательно, для того чтобы при данных h и c можно было выбрать такое начальное значение $y=y_0$, что при $t=t_1 \gtreqless 0$ $y=0$, необходимо (а при знаке $>$ и достаточно), чтобы в окрестности $y=0$ было

$$\inf\{[2m_0F(y) + mF(2y) + 2h]\,y^2 - c^2\} \geqslant 0,$$

причем t_1 может обращаться в ∞ только в случае знака равенства. Если при $y\to+0$ $y^2F(y)$ ограничено сверху, то при $t\to t_1$ ($c\neq 0$) угол прямой $P_2P_0P_1$ с неподвижным направлением неограниченно возрастает. Если же при $y=0$ $y^2F(y)$ обращается в $+\infty$ определенного порядка (соответствующий выбор y_0 возможен при любой начальной скорости), то прямая $P_2P_0P_1$ стремится при $t\to t_1$ к определенной предельной ориентации. Для того чтобы возможно было неограниченное расхождение материальных точек в течение конечного промежутка времени, необходимо, чтобы при достаточно больших y было $F(y)>0$ и чтобы $\frac{F(y)}{y^3}$ при $y\to+\infty$ было неограничено.

§ 4. Случай $2y=\varrho$

Если $2y=\varrho$ (9_1), то есть $\Delta_{01}=\Delta_{12}=\Delta_{20}$, то $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $xy'-yx'=0$ и по $(6'_3)$, $(6'_1)$

$$\omega_\xi=\omega_\eta=0.$$

В этом случае имеем плоское движение системы, причем треугольник $P_2P_0P_1$ во все время движения остается равносторонним, вращаясь около неподвижной оси OZ с угловой скоростью

$$\omega_\zeta=\frac{c}{y^2}=\frac{4c}{\varrho^2}. \tag{8_1}$$

Уравнение (6_2) [или (6_1)] по (8_1) и (9_1) примет вид

$$\varrho''=Mf(\varrho)+\frac{16c^2}{\varrho^3}. \tag{9_2}$$

Отсюда или

$$\varrho'=0,\quad \varrho=\mathrm{const}=\varrho_0,\quad \text{причем}\ \varrho_0\omega_{\zeta 0}^2+Mf(\varrho_0)=0\ \ [f(\varrho_0)<0]$$

(эквидистантная конфигурация относительного равновесия, а при $\omega_{\zeta 0}=0$ $f(\varrho_0)=0$ — абсолютного), или

$$\varrho'^2=2MF(\varrho)-\frac{16c^2}{\varrho^2}+2h \tag{$9'_2$}$$

и

$$t=\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{d\varrho_0}{\pm\sqrt{2\left[MF(\varrho)-\dfrac{8c^2}{\varrho^2}+h\right]}}. \tag{$9''_2$}$$

Относительно общего соударения материальных точек и их неограниченного расхождения в течение конечного промежутка времени можно сделать замечания вполне аналогичные § 3.

§ 5. Случай $f(\varrho)=A\varrho$

Из уравнений (6_3)—(6_6) легко получаем простые интегрируемые комбинации, дающие

$$(\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2)\,x^4=c_1^2,\quad (\omega_\zeta^2+\omega_\xi^2)\,y^4=c_2^2,\quad \omega_\zeta xy=c_3, \tag{10_1}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования; отсюда

$$\omega_\xi^2=\frac{c_2^2x^2-c_3^2y^2}{x^2y^4},\quad \omega_\eta^2=\frac{c_1^2y^2-c_3^2x^2}{x^4y^2},\quad \omega_\zeta=\frac{c_3}{xy}. \tag{$10'_1$}$$

В случае взаимного притяжения или отталкивания прямо пропорционально расстоянию, то есть при

$$f(\varrho) = A\varrho \qquad (A \gtreqless 0)^{1}), \tag{10}$$

уравнения (6_1), (6_2) будут

$$\left.\begin{aligned} x'' &= MAx + \frac{c_1^2}{x^3} \\ y'' &= MAy + \frac{c_2^2}{y^3} \end{aligned}\right\}, \tag{10_2}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x'^2 &= MAx^2 - \frac{c_1^2}{x^2} + 2h_1, \quad 2h_1 = x_0'^2 - MAx_0^2 + \frac{c_1^2}{x_0^2} \\ y'^2 &= MAy^2 - \frac{c_2^2}{y^2} + 2h_2, \quad 2h_2 = y_0'^2 - MAy_0^2 + \frac{c_2^2}{y_0^2} \end{aligned}\right\}, \tag{$10_2'$}$$

или

$$dt = \frac{1}{2}\frac{d(x^2)}{\sqrt{MAx^4 + 2h_1x^2 - c_1^2}} = \frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{\sqrt{MAy^4 + 2h_2y^2 - c_2^2}}. \tag{$10_2''$}$$

Полагая при $A > 0$

$$\tau = \frac{\operatorname{th}\sqrt{MA}t}{\sqrt{MA}}, \quad dt = \frac{d\tau}{1 - MA\tau^2} \qquad (\tau = 0 \text{ при } t = 0), \tag{10_3}$$

получим из $(10_2'')$

$$\frac{1 + \sqrt{MA}\tau}{1 - \sqrt{MA}\tau} = \frac{x^2 + \dfrac{h_1}{MA} \pm \sqrt{x^4 + \dfrac{2h_1x^2 - c_1^2}{MA}}}{x_0^2 + \dfrac{h_1}{MA} + \dfrac{x_0x_0'}{\sqrt{MA}}},$$

откуда

$$x^2 + \frac{h_1}{MA} \pm \sqrt{x^4 + \frac{2h_1x^2 - c_1^2}{MA}} = \left(x_0^2 + \frac{h_1}{MA} + \frac{x_0x_0'}{\sqrt{MA}}\right)\frac{1 + \sqrt{MA}\tau}{1 - \sqrt{MA}\tau}$$

и

$$x^2 + \frac{h_1}{MA} \mp \sqrt{x^4 + \frac{2h_1x^2 - c_1^2}{MA}} = \left(x_0^2 + \frac{h_1}{MA} - \frac{x_0x_0'}{\sqrt{MA}}\right)\frac{1 - \sqrt{MA}\tau}{1 + \sqrt{MA}\tau};$$

складывая, найдем

$$x^2 = \frac{(MAx_0^2 + 2h_1)\tau^2 + 2x_0x_0\tau + x_0^2}{1 - MA\tau^2} = \frac{(x_0'\tau + x_0)^2 + \dfrac{c_1^2}{x_0^2}\tau^2}{1 - MA\tau^2}. \tag{10_4}$$

---

[1] В этом случае уравнения абсолютного движения — линейны, однородны и имеют постоянные коэфициенты.

и, аналогично

$$y^2 = \frac{(y_0'\tau + y_0)^2 + \frac{c_2^2}{y_0^2}\tau^2}{1 - MA\tau^2} = \frac{\left(\frac{y_0}{\tau} + y_0'\right)^2 + \frac{c_2^2}{y_0^2}}{\frac{1}{\tau^2} - MA}. \tag{10_4}$$

При $A < 0$ снова получим формулы (10_4), полагая

$$\tau = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{-MA}\,t}{\sqrt{-MA}}. \tag{$10_3'$}$$

В абсолютном движении точки описывают, как известно, конические сечения с центром в 0 (эллипсы при $A < 0$ и гиперболы при $A > 0$) или прямые, проходящие через центр масс.

Соударение точек P_1 и P_2 возможно только при $c_2 = 0$ ($\omega_\xi = \omega_\zeta = 0$), $y_0' \neq 0$ в момент, соответствующий значению $\tau = -\frac{y_0}{y_0'}$ $\Bigl($так, что при $A > 0$ необходимо еще, чтобы было $\left|\frac{y_0}{y_0'}\right| < \frac{1}{\sqrt{MA}}$; при $\frac{y_0}{y_0'} = \pm\frac{1}{\sqrt{MA}}$ — соударения при $t = \pm\infty\Bigr)$. Общее соударение возможно только при $c_1 = c_2 = 0$ ($\omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = 0$), $x_0 y_0' - y_0 x_0' = 0$ (прямолинейное движение) в момент t_1, соответствующий значению $\tau_1 = -\frac{x_0}{x_0'} = -\frac{y_0}{y_0'}$ $\Bigl(t_1 = \pm\infty$ при $A > 0$ и $\frac{y_0}{y_0'} = \frac{x_0}{x_0'} = \mp\frac{1}{\sqrt{MA}}\Bigr)$. При $x_0 = x_0' = c_1 = 0$ имеем частный случай § 3. При $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$, $x_0 y_0' - y_0 x_0' = 0$ ($x_0 \neq 0$) имеем $\frac{y}{x} = \text{const} = \frac{y_0}{x_0}$ и при $\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — частный случай § 4.

§ 6. Общий случай

В общем случае негомографического движения и произвольной функции $f(\varrho)$ должно быть $\omega_\zeta = 0$ и по (7_4) $\omega_\xi \omega_\eta = 0$, так что $\omega_\xi = 0$ или $\omega_\eta = 0$. В первом случае, по (6_4) или (10_1):

$$\omega_\xi = \omega_\zeta = 0, \quad \omega_\eta = \frac{c_1}{x^2}. \tag{11_1}$$

а во втором, принимая во внимание (6_5) или (10_1),

$$\omega_\eta = \omega_\zeta = 0, \quad \omega_\xi = \frac{c_2}{y^2}, \tag{11_2}$$

Уравнения (6_1), (6_2) в случае (11_1) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x'' &= Mx\frac{f(\varrho)}{\varrho} + \frac{c_1^2}{x^2} = \frac{1}{2m_0}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \\ y'' &= m_0 y\frac{f(\varrho)}{\varrho} + mf(2y) = \frac{1}{2M}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y} \end{aligned}\right\}, \tag{12_1}$$

где

$$U^{(1)}=M[2m_0F(\varrho)+mF(2y)]-\frac{m_0c_1^2}{x^2}; \tag{12'_1}$$

в случае же (11_2) эти уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} x''&=Mx\frac{f(\varrho)}{\varrho}=\frac{1}{2m_0}\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} \\ y''&=m_0y\frac{f(\varrho)}{\varrho}+mf(2y)+\frac{c_2^2}{y^3}=\frac{1}{2M}\frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} \end{aligned}\right\}, \tag{12_2}$$

где

$$U^{(2)}=M[2m_0F(\varrho)+mF(2y)]-\frac{Mc_2^2}{y^2}. \tag{12'_2}$$

Система уравнений (12_1) или (12_2) имеет интеграл

$$m_0x'^2+My'^2=U^{(i)}+h^{(i)} \qquad (i=1, 2), \tag{13}$$

где $h^{(i)}$ — постоянная интегрирования.

Вводя функцию

$$r^2=m_0\varrho^2+2my^2=m_0x^2+My^2\,^{1)}, \tag{14}$$

найдем по (12) и (13)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2}=Mm_0F_1(\varrho)+\frac{Mm}{2}F_1(2y)+h^{(i)}, \tag{14'}$$

где

$$F_1(\varrho)=2F(\varrho)+\varrho f(\varrho)=\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}[\varrho^2F(\varrho)]. \tag{14'_1}$$

§ 7. Траектории парного соударения

Пусть в интервале $0\leqslant t<t_1$ между точками не происходит соударений и движение продолжается регулярно[2]), а в момент t_1 перестает быть таким. Тогда из уравнений движения, на основании известной теоремы Пенлеве[3]), легко усмотреть, что $\min\left(\frac{1}{r}, y\right)\to 0$ при $t\to t_1$. Если при $t\to t_1$ величина r стремится к определенному пре-

---

[1]) Так, что момент инерции системы относительно полюса 0 отличается от r^2 только множителем $\frac{2m}{M}=\nu^2$.

[2]) Так, что в интервале $0\leqslant t<t_1$ координата $y>0$, а в случае $c_1\neq 0$ и $x\neq 0$.

[3]) Leçons de Stockholm, p. 571.

делу или неограниченно возрастает[1]), то возможны три случая: 1) $\lim\limits_{t\to t_1} r^2 = r_1^2 > 0$, $\lim\limits_{t\to t_1} y=0$, $\lim\limits_{t\to t_1} x = x_1 \neq 0$, 2) $r_1^2=0$, 3) $\lim\limits_{t\to t_1} r^2 = +\infty$.

В первом случае $\lim\limits_{t\to t_1} \varrho = \varrho_1 = |x_1| > 0$ и в момент t_1 происходит соударение точек P_1 и P_2 на конечном расстоянии от P_0; при этом, по первому из уравнений (12_1) или (12_2) x' стремится, при $t \to t_1$, к определенному конечному пределу x'_1.

Из (13) и $(12'_2)$ следует, что если в окрестности $\varrho=0$ $\inf \varrho^2 F(\varrho) \leqslant 0$, то в случае (11_2) соударение точек P_1 и P_2 возможно только при плоском движении ($c_2=0$, $\omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = 0$).

Если $F(2y)$ непрерывна (справа) при $y=0$, так что можно принять $F(0)=0$, то

$$\lim_{t\to t_1} U^{(1)} = U_1^{(1)} = 2Mm_0 F(\varrho_1) - \frac{m_0 c_1^2}{\varrho_1^2}, \quad \lim_{t\to t_1} U^{(2)} = U_1^{(2)} = 2Mm_0 F(\varrho_1) \quad (c_2=0)$$

и по (13) y' стремится также к определенному конечному пределу

$$y'_1 = -\sqrt{\frac{U_1^{(i)} + h^{(i)} - m_0 x_1'^2}{M}}.$$

Если $y'_1 \neq 0$[2]), то в некотором интервале (t_0, t_1) y убывает монотонно. Приняв y за независимую переменную, а x, x', t — за искомые функции, получим для их определения систему уравнений:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'}, \quad \frac{dx'}{dy} = \frac{1}{2m_0 y'} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'}, \tag{15}$$

где

$$y' = -\sqrt{\frac{U^{(i)} + h^{(i)} - m_0 x'^2}{M}}, \tag{15'}$$

правые части которых и их частные производные по x, x' — непрерывны в некоторой области около точки

$$y=0, \quad x=x_1, \quad x'=x'_1$$

при всяких действительных конечных значениях $x_1 \neq 0$, x'_1, при которых подкоренное выражение в формуле для y'_1 будет положительным. Следовательно, существует единственная система функций $x(y)$, $x'(y)$, $t(y)$, непрерывных в некотором интервале $0 \leqslant y \leqslant y^*$, удовлетворяющих уравнениям (15) и принимающих при $y=0$ значения x_1, x'_1, t_1.

---

[1]) Это обстоятельство всегда будет иметь место, если функция $F_1(\varrho)$ ограничена сверху или снизу при изменении ϱ от 0 до $+\infty$, а также при условии $\varrho f(\varrho) > -A$, где $A>0$. Это непосредственно следует из уравнения (14′), которое можно также записать в виде: $\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} = m_0 x'^2 + My'^2 + \Omega^2 + M\Big[m_0 \varrho f(\varrho) + m y f(2y)\Big]$, где $\Omega^2 = \frac{m_0 c_1^2}{x^2}$ или $\Omega^2 = \frac{Mc_2^2}{y^2}$.

[2]) Случай $y'_1=0$ будет рассмотрен в отдельной статье.

Если $\lim\limits_{y\to+0} F(2y) = +\infty$ (а в случае (11_2) при $c_2 \neq 0$ $\lim\limits_{y\to+0} y^2F(2y) = +\infty$)1), то $\lim\limits_{t\to t_1} y' = -\infty$ и y в некотором интервале (t_0, t_1) убывает монотонно. Принимая y за независимую переменную, снова придем к предыдущим заключениям. Положив

$$\overline{Y} = \frac{y'}{\sqrt{F(2y)}} = y'\sqrt{F^*(y)} = -\sqrt{\frac{U^{(i)} + h^{(i)} - m_0 x'^2}{M}}\sqrt{F^*(y)}$$

$$\left[F^*(0) = \lim_{y\to+0} F^*(y) = 0,\ \ \lim \overline{Y} = -\sqrt{m}\right],$$

сможем записать уравнения (15) в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{F^*(y)}}{\overline{Y}}x', \quad \frac{dx'}{dy} = \frac{\sqrt{F^*(y)}}{2m_0\overline{Y}}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{\sqrt{F^*(y)}}{\overline{Y}}.$$

§ 8. Преобразование уравнений движения

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{m_0}x = r\cos\varphi, \quad \sqrt{M}y = r\sin\varphi, \qquad \left(\pi > \varphi = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{m_0}}\frac{y}{x} > 0\right) \\ &(m_0xx' + Myy')\,r^{\alpha-1} = r^{\alpha}\frac{dr}{dt} = R \\ &\sqrt{Mm_0}(xy' - yx')\,r^{\alpha-1} = r^{\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt} = \Phi \\ &r^{2\alpha}U^{(i)} = 2V^{(i)}(r, \varphi) \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

где α — некоторое действительное число.

Тогда система (12_1) или (12_2) заменится системой 4 уравнений 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} &r^{\alpha}\frac{dr}{dt} = R, \quad r^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = \alpha R^2 + \Phi^2 - 2\alpha V^{(i)} + r\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r} \\ &r^{\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt} = \Phi, \quad r^{\alpha+1}\frac{d\Phi}{dt} = (\alpha-1)R\Phi + \frac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi} \end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

где

$$V^{(i)} = Mr^{2\alpha}\left[m_0F(\varrho) + \frac{m}{2}F(2y)\right] - \Omega_i^2 = V - \Omega_i^2, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} r\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r} = r\frac{\partial V}{\partial r} + 2(1-\alpha)\Omega_i^2 = Mr^{2\alpha}\{m_0[2\alpha F(\varrho) + \varrho f(\varrho)] + \\ + m[\alpha F(2y) + yf(2y)]\} - r\frac{\partial\Omega_i^2}{\partial r}, \end{aligned} \tag{18'}$$

$$\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi} = \frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Omega_i^2}{\partial\varphi} = mr^{2\alpha+2}\sin 2\varphi\left[\frac{f(2y)}{2y} - \frac{f(\varrho)}{\varrho}\right] - \frac{\partial\Omega_i^2}{\partial\varphi}, \tag{18''}$$

---

1) При $\lim\limits_{y\to+0} F(y) = -\infty$ соударение, очевидно, невозможно.

$$\begin{gathered}\Omega_1^2=\frac{m_0^2c_1^2}{2\cos^2\varphi}r^{2(\alpha-1)\,1)},\quad \Omega_2^2=\frac{M^2c_2^2}{2\sin^2\varphi}r^{2(\alpha-1)},\\ \varrho=+r\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{m_0}+\frac{\sin^2\varphi}{M}},\quad y=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{M}}.\end{gathered}\tag{19}$$

Интеграл (13) приводится к виду

$$R^2+\Phi^2=2V^{(i)}+h^{(i)}r^{2\alpha}\tag{20_1}$$

или

$$R^2+\Phi^2+2\Omega_1^2=2V+h^{(i)}r^{2\alpha}.\tag{20_2}$$

§ 9. Случаи интегрируемости: $f(\varrho)=A\varrho$

Уравнения (17) интегрируются в эллиптических функциях при $f(\varrho)=A\varrho+\frac{B}{\varrho^3}\left[F(\varrho)=\frac{A}{2}\varrho^2-\frac{B}{2}\varrho^{-2}\right]$, где A и B — произвольные действительные числа. При $A=B=0$ имеем тривиальный случай прямолинейного и равномерного (абсолютного) движения точек или покоя; случай $B\neq 0$ будет рассмотрен в особом мемуаре. При $B=0$, $A\gtreqless 0$, полагая $\alpha=1$, будем иметь

$$2V^{(i)}=MAr^4-2\Omega_i^2(\varphi),\quad r\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r}=2MAr^4,\quad \frac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi}=-\frac{d\Omega_1^2}{d\varphi},\tag{21}$$

где

$$2\Omega_1^2=\frac{m_0^2c_1^2}{\cos^2\varphi},\quad 2\Omega_2^2=\frac{M^2c_2^2}{\sin^2\varphi}.\tag{21'}$$

Третье и четвертое из уравнений (17) при $\alpha=1$ дают по (21)

$$\Phi\,d\Phi=-\frac{d\Omega_i^2}{d\varphi}d\varphi,$$

откуда

$$\Phi^2=-2\Omega_i^2+c^{(i)},\tag{22}$$

где $c^{(i)}>0$ ²) постоянная интегрирования.

Интеграл (20), на основании (21) и (22), примет вид

$$R^2=MAr^4+h^{(i)}r^2-c^{(i)};\tag{23}$$

тогда, по первому из уравнений (17)

$$dt=\frac{1}{2}\frac{dr^2}{\sqrt{MAr^4+h^{(i)}r^2-c^{(i)}}};$$

---

1) В интервале регулярного движения, при $c_1\neq 0$: $\frac{\pi}{2}>\varphi>0$.

2) $c^{(i)}$ может обращаться в нуль только при $c_i=0$. В последнем случае $\Omega_i^2=0$, $\Phi=\pm\sqrt{c^{(i)}}$ и $\varphi=\varphi_0+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{c^{(i)}}\,\tau}{r_0^2+R_0\tau}$. Следовательно, при $c^{(i)}=0$: $\varphi=\varphi_0=\mathrm{const}$ (см. § 10).

откуда подобно § 5

$$r^2 = \frac{(r_0'\tau + r_0)^2 + \frac{c^{(i)}}{r_0^2}\tau^2}{1 - MA\tau^2}, \tag{24}$$

причем $\tau = \frac{\operatorname{th}\sqrt{MA}\,t}{\sqrt{MA}}$ при $A > 0$ и $\tau = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{-MA}\,t}{\sqrt{-MA}}$ при $A < 0$.

Третье уравнение (17), на основании (22) и (24) даст

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\frac{\Omega_1^2}{c^{(i)}}}} = \sqrt{c^{(i)}} \int\limits_0^t \frac{dt}{r^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{c^{(i)}}\,\tau}{r_0^2 + R_0\tau},$$

откуда получим в случае (11_1)

$$\sin\varphi = \frac{(r_0\cos\varphi_0\varphi_0' + r_0'\sin\varphi_0)\,\tau + r_0\sin\varphi_0}{\sqrt{(r_0'\tau + r_0)^2 + \frac{c^{(1)}}{r_0^2}\tau^2}}, \tag{25_1}$$

и в случае (11_2)

$$\cos\varphi = \frac{(-r_0\sin\varphi_0\varphi_0' + r_0'\cos\varphi_0)\,\tau + r_0\cos\varphi_0}{\sqrt{(r_0'\tau + r_0)^2 + \frac{c^{(2)}}{r_0^2}\tau^2}}, \tag{25_2}$$

то есть частные случаи формулы (10_4) § 5.

§ 10. Случаи интегрируемости

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ [1] $\left(x = 0,\ \varrho = y = \frac{r}{\sqrt{M}}\right)$, $\Phi = 0$ придем к случаю § 3.

Полагая в уравнениях (17)

$$r = \text{const} = r_0 > 0, \quad \varphi = \text{const} = \varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right), \quad c_i \neq 0, \quad R = 0, \quad \Phi = 0,$$

или в уравнениях (12_1), (12_2):

$x = x_0 > 0$, $y = y_0 > 0$, $c_i \neq 0$ (равнобедренная конфигурация относительного равновесия),

удовлетворим этим уравнениям при условиях:

$$\frac{f(2y_0)}{2y_0} : \frac{f(\varrho_0)}{\varrho_0} = -m_0 : 2m \left[\omega_\eta^2 = -M\frac{f(\varrho_0)}{\varrho_0}\text{[2]}\right] \quad \text{для } (12_1) \tag{26_1}$$

и

$$f(\varrho_0) = 0 \quad \left[\omega_\xi^2 = -m\frac{f(2y_0)}{y_0}\text{[3]}\right] \quad \text{для } (12_2) \tag{26_2}$$

---

[1] При этом в системе (17) $c_1 = 0$.

[2] То есть $f(\varrho_0) < 0$ и точки P_0, P_1 и P_0, P_2 взаимно притягиваются, а P_1 и P_2 — взаимно отталкиваются.

[3] То есть точка P_0 с P_1 и P_2 на расстоянии ϱ_0 не взаимодействует, а P_1 и P_0 взаимно притягиваются $[f(2y_0) < 0]$.

очевидно, не выполнимых для функции $f(\varrho)$, сохраняющей постоянный знак и в нуль не обращающейся при $0 < \varrho < +\infty$. При $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $c_i \neq 0$ должно быть $f(\varrho_0) = 0$, $f(2y_0) = 0$ (треугольная конфигурация абсолютного равновесия).

Если φ — переменная, а $r = r_0 > 0$ $(R = 0)$, то, полагая $\alpha = 1$, по второму из уравнений (17) должны иметь тождественно относительно φ:

$$\Phi^2 = 2V^{(i)} - r\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r}.$$

Диференцируя по φ и пользуясь третьим и четвертым из уравнений (17), придем к равенству

$$\frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial r\,\partial\varphi} = 0,$$

что по (18′) или (18″) даст

$$\frac{\varrho f'(\varrho) + 3f(\varrho)}{\varrho} = \frac{2yf'(2y) + 3f(2y)\,^{1)}}{2y} = \text{const} = 4A,$$

откуда получаем единственно возможный вид функции $f(\varrho)$:

$$f(\varrho) = A\varrho + \frac{B}{\varrho^3} \tag{27}$$

с произвольными коэфициентами A, B, которая допускает эллиптическую траекторию

$$r^2 = m_0 x^2 + My^2 = r_0^2. \tag{28}$$

При условии (27) и $\alpha = 1$ будем иметь формулы (21), где Ω_i^2 заменится на $\psi^{(i)}$, причем

$$2\psi^{(1)} = -BM^2\left(\frac{m_0^2}{M\cos^2\varphi + m_0\sin^2\varphi} + \frac{m}{8\sin^2\varphi} + \frac{m_0^2 c_1^2}{BM^2\cos^2\varphi}\right), \tag{29$_1$}$$

$$2\psi^{(2)} = -BM^2\left(\frac{m_0^2}{M\cos^2\varphi + m_0\sin^2\varphi} + \frac{m}{8\sin^2\varphi} + \frac{c_2^2}{B\sin^2\varphi}\right) \tag{29$_2$}$$

и

$$\Phi^2 = 2\psi^{(i)} - MAr_0^4,$$

$$t = r_0^2\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{2\psi^{(i)} - MAr_0^4}}.$$

При переменном r и $\varphi = \text{const} = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ $(\Phi = 0)$, $c_i = 0$ из последнего уравнения (17) и (18″) получим условие

$$\frac{f(2y)}{2y} - \frac{f(\varrho)}{\varrho} = 0,$$

---

[1] Здесь штрихом обозначена производная функции f по своему аргументу.

откуда: $2y=\varrho$, $\varphi_0=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{M}{3m_0}}$ (частный случай § 4 при ($c=0$)) или $f(\varrho)=A\varrho$ и φ_0 — произвольно (частный случай § 5 при $c_1=c_2=c_3=0$, $x_0y'_0-y_0x'_0=0$).

Наконец, при переменном r, $\varphi=\varphi_0$ $\left(0<\varphi_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\Phi=0$ и $c_1\neq0$, последнее из уравнений (17) даст $\left(\dfrac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}=0$, что, после умножения на ϱ^4, приведет к условию:

$$\frac{\varrho^3 f(g\varrho)}{g}-\varrho^3 f(\varrho)=\mathrm{const}=B\left(\frac{1}{g^4}-1\right)^{1)}\quad\left(g=\frac{2y}{\varrho}=\mathrm{const}\neq1,\ B\neq0\right);$$

отсюда снова придем к виду (27) для функции $f(\varrho)$.

Значения φ_0 найдутся из уравнения $\left(\dfrac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}=\left(\dfrac{d\psi^{(i)}}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}=0$, где $\psi^{(i)}$ имеет выражение (29_1), (29_2).

При $i=2$ по (29_2) получим

$$\frac{1}{\left(\dfrac{\cos^2\varphi_0}{m_0}+\dfrac{\sin^2\varphi_0}{M}\right)^2}-\frac{M^2\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{c_2^2}{2Bm}\right)}{\sin^4\varphi_0}=0.$$

Введя вместо φ полярный угол $\vartheta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{m_0}{M}}\operatorname{tg}\varphi\right)$, так что

$$\cos^2\varphi=\frac{m_0\cos^2\vartheta}{m_0\cos^2\vartheta+M\sin^2\vartheta},\quad \sin^2\varphi=\frac{M\sin^2\vartheta}{m_0\cos^2\vartheta+M\sin^2\vartheta},$$

приведем последнее уравнение к виду

$$(m_0\cos^2\vartheta_0+M\sin^2\vartheta_0)^2\left(1-\frac{\dfrac{1}{16}+\dfrac{c_2^2}{2Bm}}{\sin^4\vartheta_0}\right)=0,$$

откуда

$$\sin\vartheta_0=\sqrt[4]{\frac{1}{16}+\frac{c_2^2}{2Bm}},\tag{30}$$

так что $\vartheta_0\gtreqless\dfrac{\pi}{6}$ при $B\gtreqless0$ и $\vartheta_0=\dfrac{\pi}{6}$ при $c_2=0$.

Следовательно, рассматриваемое решение возможно при $i=2$, если при $B>0: c_2^2<\dfrac{15}{8}Bm$, а при $B<0: c_2^2<-\dfrac{1}{8}Bm$.

---

[1] Эта константа положительна в случае $(18_1'')$ и отрицательна в случае $(18_2'')$, так что в первом случае, при $B<0$, $g>1$ и при $B>0$, $g<1$; наоборот, во втором случае $g<1$ при $B<0$ и $g>1$ при $B>0$.

При $i=1$ по (29_1) найдем:

$$\frac{1}{\left(\frac{\cos^2\varphi_0}{m_0}+\frac{\sin^2\varphi_0}{M}\right)^2}-\frac{M^2}{16\sin^4\varphi_0}+\frac{m_0^2c_1^2}{2Bm\cos^4\varphi_0}=0,$$

откуда, переходя к углу ϑ_0

$$(m_0\cos^2\vartheta_0+M\sin^2\vartheta_0)^2\left(1-\frac{1}{16\sin^4\vartheta_0}+\frac{c_1^2}{2Bm\cos^4\vartheta_0}\right)=0.$$

Полагая здесь $\cos^2\vartheta_0=s$, $\frac{c_1^2}{2Bm}=\bar{c}$, получим для определения s уравнение

$$S(s,\bar{c})=s^2(1-s)^2-\frac{1}{16}s^2+\bar{c}(1-s)^2=\left(s-\frac{3}{4}\right)\left(s-\frac{5}{4}\right)s^2+\bar{c}(1-s)^2=0, \quad (31)$$

имеющее при $B>0$ $(\bar{c}>0)$ один положительный корень, больший $\frac{3}{4}$ и меньший 1. При $B<0$ $(\bar{c}<0)$ уравнение (31) будет иметь два корня $s_0^{(1)}$, $s_0^{(2)}$, лежащих между 0 и $\frac{3}{4}$ только при условии:

$$c_1^2\leqslant-2Bm\left(1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^3. \quad (32)$$

При знаке равенства в (32) оба корня становятся равными между собою

$$s_0^{(1)}=s_0^{(2)}=1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}. \quad (33)$$

§ 11. Движение с общим соударением; случай $\beta>0$, $y_1'<0$

Рассмотрим теперь второй из случаев, установленных в § 7.

Пусть в интервале $0\leqslant t<t_1$ движение происходит регулярно, так что $y>0$, $r>0$[1]), а при $t\to t_1$ $r\to+0$; тогда $y\to+0$, $\varrho\to+0$, и в момент t_1 происходит общее соударение всех трех точек.

Пусть

$$\lim_{r\to+0}\frac{f(r)}{r^{2\beta-1}}=\mp2\beta\,^{2)}\quad\left[\lim_{r\to+0}\frac{F(r)}{r^{2\beta}}=\mp1;\ \beta>0\right]. \quad (34)$$

Тогда по (13), $(12'_1)$, $(12'_2)$ должно быть $c_1=c_2=0$ и движение происходит в одной плоскости. Так как случаи (11_1), (11_2) сливаются в один, то можем опустить индексы у U и h и при $t\to t_1$ будем иметь $U\to\mp0$, так что по (13) в случае верхнего знака должно быть $h>0$, а в случае нижнего $h\geqslant0$.

---

[1]) А в случае (11_1) и $x>0$ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

[2]) Предельное значение $r^{1-2\beta}f(r)$ обозначено через $\mp2\beta$, чтобы не увеличивать числа обозначений.

Ввиду того, что правая часть второго из уравнений (12) в окрестности $t = t_1$ сохраняет постоянно свой знак, ограниченная по (13) переменная y' изменяется в этой окрестности монотонно и стремится к некоторому предельному значению $y'_1 \leqslant 0$; тогда y убывает монотонно, а на основании того же уравнения (13) и $x' \to x'_1$1). При этом, в случае верхнего знака, должно быть $y'_1 < 0$ (если $y \neq 0$), так как y' стремится в этом случае к своему предельному значению y'_1, убывая.

В настоящем параграфе рассмотрим случай $h > 0$, так что x'_1, y'_1 одновременно в нуль не обращаются и φ стремится к определенному предельному значению φ_1, причем можно считать $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $\frac{f(r)}{r}$ — непрерывна справа при $r=0$ (что возможно только при $\beta \geqslant 1$) и $f'(r)$ ограничена в интервале $0 < r \leqslant r^*$, то правые части уравнений (12) удовлетворяют условию Липшица в некоторой области и, следовательно, существует одинственное, непрерывное в некотором интервале решение, такое, что при $t \to t_1 - 0$:

$$x \to 0, \quad y \to +0, \quad x' \to x'_1, \quad y' \to y'_1 \leqslant 0.$$

В частности, при $x'_1 = 0$, $y'_1 < 0$:

$$x=0, \quad x'=0 \qquad \text{(прямолинейное движение)},$$

при $x'_1 \neq 0$, $y'_1 = 0$:

$$y=0, \quad y'=0 \qquad \text{(задача двух тел на одной прямой)},$$

при $x'_1=0$, $y'_1=0$ $(h=0)$:

$$x=0, \quad x'=0, \quad y=0, \quad y'=0 \qquad \text{(совпадение всех трех точек)}.$$

Положив в формулах § 8 $\alpha=0$, $c_i=0$, найдем, что при $t \to t_1$

$$\Phi = \sqrt{Mm_0}\,\frac{xy'-yx'}{r} \to 0, \quad R = \frac{m_0xx' + Myy'}{r} = \frac{dr}{dt} \to -\sqrt{h}\ {}^{2)};$$

---

1) При $2\beta \geqslant 1$ эти результаты получаем прямо из уравнений (12) ввиду ограниченности их правых частей.

2) Эти же заключения получим непосредственно из уравнений (14′) и (20). В самом деле, уравнение (14′) имеет вид: $\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2h + r^{2\beta}F_2$, где $F_2 = M\left[2m_0\frac{F_1(\varrho)}{\varrho^{2\beta}}K_0^{2\beta} + m\frac{F_1(2y)}{(2y)^{2\beta}}K^{2\beta}\right]$ — функция, ограниченная в окрестности $r=0$. Отсюда видим, что $\frac{dr^2}{dt}$ в некотором интервале монотонно возрастает, стремясь к -0 и, следовательно, r^2 в некотором интервале убывает монотонно. Из этого уравнения $R^2 - h = \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r r^{2\beta+1}F_2\,dr$ и $R \to -\sqrt{h}$, а по (20) $(\alpha=0)$: $\Phi \to 0$.

следовательно, r в некотором интервале убывает монотонно. Четвертое и первое из уравнений (17) дадут

$$\frac{d(\Phi r)}{dr}=\frac{1}{2R}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=\frac{Mr^{2\beta}}{R}\left[\frac{m}{2}\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}K^{2\beta-1}\frac{dK}{d\varphi}+m_0\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}K_0^{2\beta-1}\frac{dK_0}{d\varphi}\right],$$

где

$$K=\frac{2y}{r}=\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{M}},\quad K_0=\frac{\varrho}{r}=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{m_0}+\frac{\sin^2\varphi}{M}}.$$

Отсюда заключаем, что Φ — бесконечно малая, порядка не ниже 2β относительно r, исключая случай $y'_1=0$ при $2\beta<1$.

Из третьего и первого уравнения (17)

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\Phi}{rR},$$

откуда видим, что $\varphi-\varphi_1$ — бесконечно-малая порядка не ниже 2β относительно r. Если $\frac{f(r)}{r}$ — не непрерывна при $r=0$ или $f'(r)$ — неограничена в окрестности $r=0$, то предположим, что существует такое число $\gamma\leqslant 2$[1], что

$$\lim_{r\to+0} r^{\gamma}f'(r)=l. \tag{35}$$

Положив в уравнениях (17) $\alpha=0$ и приняв r за аргумент, заменим (17) системой двух уравнений первого порядка

$$r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\Phi}{R},\quad r\frac{d\Phi}{dr}=-\Phi+\frac{1}{2R}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \tag{36}$$

уравнением

$$R=-\sqrt{h+U-\Phi^2} \tag{37}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dr}=\frac{1}{R}, \tag{38}$$

из которого, после интегрирования системы (36), t определится при помощи квадратуры.

Введя теперь новые переменные:

$$\psi=\frac{\varphi-\varphi_1}{r^{2\beta}},\quad \Psi=\frac{\Phi}{r^{2\beta}}, \tag{39}$$

---

[1] Если $\gamma\leqslant 0$, то правые части уравнений удовлетворяют условию Липшица. При условии (34) и $\beta\neq\frac{1}{2}:\gamma\geqslant 2(1-\beta)$; если $\gamma>2(1-\beta)$, то $l=0$, если $\gamma=2(1-\beta)$, то $l=\mp 2\beta(2\beta-1)\neq 0$ и наоборот. Следовательно, в данном случае, при $\beta\geqslant 1:0<\gamma\leqslant 2$ и $l=0$, при $\beta<1$ и $\beta\neq\frac{1}{2}:\gamma=2(1-\beta)$ и $l=\mp 2\beta(2\beta-1)$ или $2(1-\beta)<\gamma\leqslant 2$ и $l=0$. Наконец, при $\beta=\frac{1}{2}:2\geqslant\gamma\geqslant 1$, $l=0$, а при $0<\gamma<1$ l может быть каким угодно числом.

придем к рассмотрению системы

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d\psi}{dr} &= -2\beta(\psi-\psi_1)+\frac{\Psi-\Psi_1}{R_1}+\Psi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right) \\ r\frac{d\Psi}{dr} &= -(2\beta+1)(\Psi-\Psi_1)+\frac{W}{R}-\frac{W_1}{R_1} \end{aligned}\right\}, \tag{A}$$

где

$$R=-\sqrt{h+U-r^{4\beta}\Psi^2}, \tag{A$_1$}$$

$$U=Mr^{2\beta}\left[2m_0K_0^{2\beta}\frac{F(\varrho)}{\varrho^{2\beta}}+mK^{2\beta}\frac{F(2y)}{(2y)^{2\beta}}\right], \tag{A$_2$}$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{\partial(r^{-2\beta}U)}{\partial\varphi}=M\left[m_0K_0^{2\beta-1}\frac{dK_0}{d\varphi}\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}+\frac{m}{2}K^{2\beta-1}\frac{dK}{d\varphi}\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}\right], \tag{A$_3$}$$

$$W_1=\lim_{\substack{r\to+0\\ \varphi\to\varphi_1}}W,\quad R_1=-\sqrt{h},\quad \psi_1=\frac{W_1}{2\beta(2\beta+1)R_1^2},\quad \Psi_1=\frac{W_1}{(2\beta+1)R_1},$$

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi}=Mr^{2-\gamma}\Bigl[m_0\left(\frac{dK_0}{d\varphi}\right)^2\frac{\varrho^\gamma f'(\varrho)}{K_0^\gamma}+\frac{m}{2}\left(\frac{dK}{d\varphi}\right)^2\frac{(2y)^\gamma f'(2y)}{K^\gamma}+$$
$$+Mr^{2\beta}\left[m_0K_0^{2\beta-1}\frac{d^2K_0}{d\varphi^2}\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}+\frac{m}{2}K^{2\beta-1}\frac{d^2K}{d\varphi^2}\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}\right]. \tag{A$_4$}$$

Функции $\Psi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$, $\frac{W}{R}-\frac{W_1}{R_1}$ и их частные производные по ψ, Ψ — непрерывны в окрестности системы значений $r=0$, $\psi=\psi_1$, $\Psi=\Psi_1$ (кроме случая $\psi_1=0$, $\gamma>0$) и стремятся к нулю при $r\to+0$, $\varphi\to\psi_1$, $\Psi\to\Psi_1$, а корни характеристического уравнения системы (A) — оба отрицательны (-2β, $-2\beta-1$). Следовательно, существует единственное такое решение системы (A), что при $r\to+0$: $\psi\to\psi_1$, $\Psi\to\Psi_1$ [1].

В частности $W=0$ тождественно относительно r ($W_1=0$, $\psi_1=\Psi_1=0$) и единственным решением являются $\varphi=\varphi_1$, $\Phi=0$ в случаях:

а) $f(r)=\pm 2r\left(\varphi_1 \text{ — произвольно; } 0\leqslant\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

б) $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ (прямолинейное движение, ср. § 3),

в) $\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ (гомографическое движение, ср. § 4),

г) $\varphi_1=0$ ($\gamma\leqslant 0$, $\beta\geqslant 1$) (задача двух тел).

---

[1] Если условия (34), (35) удовлетворяются при $r\to+\infty$, $\beta<0$, то из уравнений (A) также установим существование таких решений $\left(\beta\neq-\frac{1}{2}\right)$, что ($\gamma\geqslant 2$) при $r\to+\infty$: $\Phi\to 0$, $\varphi\to\varphi_1$ $\left(0<\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $R\to+\sqrt{h}$ ($h>0$), $t\to+\infty$.

§ 12. Движение с общим соударением; случай $0<\beta<1,\ h>0,\ y'_1=0$

Случай $y'_1=0,\ x'_1\neq 0$ ($h>0,\ \varphi_1=0$) согласно § 11 возможен только при нижнем знаке в (34); при этом можно считать, что $x'_1<0$, так что в некотором интервале x по положительным значениям убывает монотонно. Второе из уравнений (12) примет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=m_0\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{2-2\beta}y^{2\beta-1}+m(2y)^{2\beta-1}\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}=y^{2\beta-1}(2^{2\beta}\beta m+\varepsilon),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $t\to t_1$ ($y\to+0,\ x\to+0$).

Отсюда находим

$$y'^2=2^{2\beta}my^{2\beta}+\varepsilon_1 y^{2\beta}\qquad(\varepsilon_1\to 0 \text{ при } y\to+0)$$

и

$$\lim_{t\to t_1}\frac{y'}{y^\beta}=-2^\beta\sqrt{m},$$

так, что y есть бесконечно-малая порядка $\frac{1}{1-\beta}$ относительно t_1-t и x, а y' — порядка $\frac{\beta}{1-\beta}$.

Приняв в уравнениях (12) (при $c_i=0$) x за аргумент, заменим эти уравнения системой

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{mf(2y)+m_0f(\varrho)\frac{y}{\varrho}}{x'},$$

где

$$x'=-\frac{1}{\sqrt{m_0}}\sqrt{h+U-My'^2}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x'}.$$

Введя новые переменные z и Z по формулам

$$y=x^{\frac{1}{1-\beta}}z,\quad y'=x^{\frac{\beta}{1-\beta}}Z,\tag{40}$$

придем к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x\frac{dz}{dx}&=-\frac{1}{1-\beta}(z-z_1)+\frac{1}{x'_1}(Z-Z_1)+Z\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x'_1}\right)\\ x\frac{dZ}{dx}&=\frac{\beta(2\beta-1)}{(1-\beta)^2}x'_1(z-z_1)-\frac{\beta}{1-\beta}(Z-Z_1)+\frac{H}{x'}-\frac{H_1}{x'_1}-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_1}{x'_1}(z-z_1)\end{aligned}\right\},\tag{B}$$

где

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{m_0}}\sqrt{h+U-Mx^{\frac{2\beta}{1-\beta}}Z^2}\,, \qquad (\mathrm{В}_1)$$

$$U = M[2m_0F(\varrho)+mF(2y)], \quad \varrho = x\sqrt{1+x^{\frac{2\beta}{1-\beta}}z^2}\,, \qquad (\mathrm{В}_2)$$

$$H = 2^{2\beta-1}m\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}z^{2\beta-1}+m_0\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}\frac{x^{2\beta}}{\left(1+x^{\frac{2\beta}{1-\beta}}z^2\right)^{1-\beta}}z, \qquad (\mathrm{В}_3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = (2\beta-1)2^{2\beta-1}m\frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}z^{2\beta-2}+2^{2\beta-1}m\frac{2yf'(2y)-(2\beta-1)f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}z^{2\beta-2}+$$

$$+m_0x^2\left[\frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}\varrho^{2\beta-2}+Z\frac{\varrho f'(\varrho)-f(\varrho)}{\varrho^2\varrho^{2\beta-3}}\frac{x^{2\beta-2}x^{\frac{2\beta}{1-\beta}}z}{\left(1+x^{\frac{2\beta}{1-\beta}}z^2\right)^{2-\beta}}\right], \qquad (\mathrm{В}_4)$$

$$x'_1 = -\sqrt{\frac{h}{m_0}}, \quad z_1 = \left[\frac{(\beta-1)2^\beta\sqrt{m}}{x'_1}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad Z_1 = \frac{x'_1}{1-\beta}z_1,$$

$$\frac{H_1}{x'_1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ z\to z_1}}\frac{H}{x'} = \frac{\beta}{1-\beta}Z_1 = \frac{\beta x'_1}{(1-\beta)^2}z_1,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_1}{x'_1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ z\to z_1}}\frac{\frac{\partial H}{\partial z}}{x'_1}\lim_{\substack{x\to 0\\ z\to z_1\\ Z\to Z_1}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H}{x'}\right) = \frac{\beta(2\beta-1)}{(1-\beta)^2}x'_1\left[\lim_{\substack{x\to 0\\ z\to z_1\\ Z\to Z_1}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x'}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ z\to z_1\\ Z\to Z_1}}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{x'}\right) = 0\right].$$

Функции $Z\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x'_1}\right)$ и $\frac{H}{x'}-\frac{H_1}{x'_1}-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_1}{x'_1}(z-z_1)$ и их частные производные по z, Z — непрерывны в окрестности $x=0$, $z=z_1$ $Z=Z_1$ (при $\gamma=2(1-\beta)$) и стремятся к нулю при $x\to+0$, $z\to z_1$, $Z\to Z_1$. Характеристическое уравнение системы (В) имеет два отрицательных корня $\left(-1,\ -\frac{2\beta}{1-\beta}\right)$; следовательно, существует единственное такое решение (В), что при $x\to+0$: $z\to z_1$, $Z\to Z_1$ [1].

---

[1] Если условия (34), (35) удовлетворяются при $r\to+\infty$, $\gamma=2(1-\beta)$, $\beta<0$, то по уравнениям (В) установим существование таких решений, что при $x\to+\infty$; $z\to z_1$ $(\varphi_1\to 0)$, $Z\to Z_1$, причем $x'_1=+\sqrt{\frac{h}{m_0}}$ $t\to+\infty$.

§ 13. Движение с общим соударением; случай $\beta > 0$, $h=0$

В случае $h=0$ $(x_1'=0,\ y_1'=0)$ согласно § 11 в окрестности $\varrho=0$ возможно только отталкивание. Положив в формулах § 8 $\alpha=-\beta$, $c_i=0$, $h=0$, из (17) и (20) найдем, что в окрестности $r=0$ V, R^2, Φ^2 ограничены сверху. По первому из уравнений (17)

$$\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r^{\beta}R}$$

и если $\beta \geqslant 1$, то при $r\to+0$ $t\to+\infty$; следовательно, при конечном t_1 и $h=0$: $0<\beta<1$ 1).

Уравнение (14′) в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2r^2}{dt^2}=r^{2\beta}F_2=Mr^{2\beta}\left[2m_0\,K_0^{2\beta}\frac{F_1(\varrho)}{\varrho^{2\beta}}+mK^{2\beta}\frac{F_1(2y)}{(2y)^{2\beta}}\right]$$

и так как $\lim\limits_{r\to+0}\dfrac{F_1(r)}{r^{2\beta}}=2(1+\beta)$, то в некотором интервале $\dfrac{dr^2}{dt}$ монотонно возрастает, стремясь к -0; следовательно, в некотором интервале r убывает монотонно. Из этого же уравнения легко видеть, что в окрестности $r=0$ R^2 имеет положительную нижнюю границу.

Пусть при $t\to t_1$ $(r\to+0)$ φ стремится к некоторому пределу φ_1 2); тогда $V\to V_1$, $F_2\to 4(1+\beta)V_1$ и, из последнего уравнения: $R^2\to 2V_1$, $R\to-\sqrt{2V_1}$, а тогда $\Phi\to 0$. Из четвертого уравнения (17) найдем, что $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\to 0$, то есть $\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{M}{3m_0}}$ или $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$ 3).

Принимая в (17) r за аргумент, получим систему

$$r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\Phi}{R_1}+\Phi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right),\quad r\frac{d\Phi}{dr}=\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi-\varphi_1)-(\beta+1)\Phi+$$
$$+\left[\frac{V_\varphi}{R}-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi-\varphi_1)\right], \tag{C}$$

---

1) При $\beta\geqslant 1$, $h=0$ соответствующим решением будет только тривиальное решение: $x=0$, $y=0$.

2) Существование определенного предельного значения R^2 можно доказать, пользуясь ограничениями и рассуждениями, аналогичными примененным в § 14. Невозможность существования таких решений, что при $r\to+0$ φ не стремится ни к какому определенному пределу, при $\beta>\frac{1}{2}$ можно показать так, как это сделано в мемуаре, напечатанном в № 3 Украинского математического журнала (1949).

3) Если при $\beta>\frac{1}{2}$ положить $\varphi_1=0$, то, согласно § 12 найдем, что y есть бесконечно-малая порядка $\frac{1}{1-\beta}$ относительно t_1-t. Однако, из 1-го уравнения (17) следует, что r есть также бесконечно-малая такого же порядка, что противоречит условию $\left(\lim\frac{y}{r}=0\right)$. Следовательно, единственным соответствующим решением будет тривиальное решение: $y=0$ $(\varphi=0,\ \Phi=0)$.

где

$$R = -\sqrt{2V - \Phi^2}, \tag{C$_1$}$$

и уравнение

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r^\beta R}, \tag{C$'$}$$

причем согласно формулам (18), (18'')

$$V = M\left[m_0 K_0^{2\beta} \frac{F(\varrho)}{\varrho^{2\beta}} + \frac{m}{2} K^{2\beta} \frac{F(2y)}{(2y)^{2\beta}}\right], \tag{C$_2$}$$

$$V_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = W = M\left[m_0 K_0^{2\beta-1} \frac{dK_0}{d\varphi} \frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}} + \frac{m}{2} K^{2\beta-1} \frac{dK}{d\varphi} \frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}\right], \tag{C$_3$}$$

$$V_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = Mr^{2(1-\beta)-\gamma}\left[m_0 \left(\frac{dK_0}{d\varphi}\right)^2 \frac{\varrho^\gamma f'(\varrho)}{K_0^\gamma} + \frac{m}{2}\left(\frac{dK}{d\varphi}\right)^2 \frac{(2y)^\gamma f'(2y)}{K^\gamma}\right] + \\ + M\left[m_0 K_0^{2\beta-1} \frac{d^2 K_0}{d\varphi^2} \frac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}} + \frac{m}{2} K^{2\beta-1} \frac{d^2 K}{d\varphi^2} \frac{f(2y)}{(2y)^{2\beta-1}}\right]. \tag{C$_4$}$$

Правые части уравнений (C) обращаются в нуль при $\varphi = \varphi_1$, $\Phi = 0$, а характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{1}{R_1} \\ \dfrac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1} & -(\beta+1)-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\beta+1)\lambda - \beta_1 = 0, \tag{41}$$

где

$$\beta_1 = \frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1^2}.$$

При $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{M}{3m_0}}$ из (C$_2$) и (C$_4$), найдем, полагая $\gamma = 2(1-\beta)$ при $\beta \neq \dfrac{1}{2}$ и $\gamma \leqslant 1$ при $\beta = \dfrac{1}{2}$:

$$\beta_1 = -\frac{3}{2}\beta(1-\beta)\nu^2 < 0 \qquad \left(\nu^2 = \frac{2m}{M}\right)$$

и оба корня уравнения (41) — отрицательны; в этом случае имеем единственное решение: $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{M}{3m_0}}$, $\Phi = 0$ (гомографическое движение с эквидистантной конфигурацией).

При $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\beta_1 = -\beta + \frac{\beta}{1 - \nu^2\left(1 - \dfrac{1}{4^{1-\beta}}\right)} > 0$$

и один из корней будет положительным; в этом случае асимптотическое решение $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, $\Phi \to 0$ при $r \to +0$ зависит от одного произвольного параметра [1]).

§ 14. Поведение искомых функций при $r \to +0$; случай $\beta = -\alpha < 0$

Рассмотрим теперь случай $\beta = -\alpha < 0$.

В этом случае движение с общим соударением возможно только тогда, когда в окрестности $\varrho = 0$ имеет место притяжение, то есть если

$$\lim_{r \to +0} r^{2\alpha+1} f(r) = -2\alpha \quad [\lim_{r \to +0} r^{2\alpha} F(r) = 1;\ \alpha > 0]. \tag{34'}$$

Тогда $\lim\limits_{r \to +0} r^{2\alpha} F_1(r) = 2(1-\alpha)$ и непосредственно из уравнения (14′) легко убедимся, что при $\alpha \neq 1$ в некотором интервале (t_0, t_1) $\frac{dr^2}{dt}$ постоянно отрицательна и r^2 убывает монотонно. Последнее останется справедливым и при $\alpha = 1$, если при $r \to +0$ $F_1(r)$ неограниченно возрастает по абсолютному значению или стремится к определенному пределу $\neq -\frac{2h^{(i)}}{M(2m_0 + m)}$ [2]). Из вторых уравнений (12_1), (12_2) следует анало-

---

[1]) Из уравнений (C), (C′) установим также существование таких решений, что $h = 0$, $\varphi \to \varphi_1$ $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\text{ или } \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}\right)$, $\Phi \to 0$, в следующих случаях:

а) $\beta > 1$, $r \to +0$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to +\infty$, $R \to -\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $\varrho = 0$ имеет место отталкивание; при $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ один корень характеристического уравнения положителен и соответствующее решение системы (C) зависит от одного произвольного параметра, при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_1 = 0$ $(\beta_1 = -\beta v^2 < 0)$ — оба корня отрицательны и имеем единственное решение: $\Phi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (прямолинейное движение) или $\varphi = 0$ (задача двух тел ;

б) $\beta = -\alpha < 0$, $r \to +0$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to t_1$, $R \to -\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $\varrho = 0$ имеет место притяжение; при $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ один корень положителен и соответствующее решение зависит от одного произвольного параметра, при $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\beta_1 < 0$ и корни отрицательны (или комплексные, с отрицательной действительной частью) при $\alpha < 1$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ и положительны (или комплексные с положительной частью) при $\alpha > 1$ (соответствующее решение зависит от двух произвольных постоянных). Если в условиях (34), (35) $r \to +\infty$, то соответствующие решения имеем в случаях:

в) $\beta > 0$, $r \to +\infty$, $\gamma = 2(1-\beta)$ при $\beta \neq \frac{1}{2}$ и $\gamma \geqslant 1$ при $\beta = \frac{1}{2}$, причем $t \to +\infty$ $(\beta < 1)$ и $t \to t_1$ $(\beta > 1)$, $R \to +\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r = +\infty$ имеет место отталкивание,

г $\beta < 0$, $r \to +\infty$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to +\infty$, $R \to +\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r = +\infty$ имеет место притяжение.

[2]) Если $F_1(r) = 0$, то $F(r) = \frac{1}{r^2}$, $f(r) = -\frac{2}{r^3}$, уравнение (14′) примет вид $\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2h^{(i)}$ и $r^2 = h^{(i)}t^2 + 2R_0t + r_0^2$, где R_0 и r_0^2 — постоянные интегрирования.

гичное заключение относительно характера убывания y, так как при $\alpha \neq 1$ $y'' \to -\infty$[1]). Убедимся теперь, что φ не может стремиться к нулю при $t \to t_1$. В самом деле, тогда $\frac{y}{x} \to 0$, $\frac{y}{\varrho} \to 0$ и вторые уравнения (12_1), (12_2) принимают вид:

$$y'' = -\frac{\alpha m_3 + \varepsilon}{y^{2\alpha+1}} \quad \left(m_3 = \frac{m}{2^{2\alpha}}\right),$$

где непрерывная функция $\varepsilon(y) \to 0$ при $y \to +0$.

Отсюда, умножая на $2y'\,dt = 2dy$, интегрируя и переходя к пределу, найдем, что

$$y^\alpha y' \to -\sqrt{m_3} \quad \left(\text{или } -\sqrt{\frac{m}{4} - c_2^2} \text{ при } \alpha = 1\right),$$

а тогда, по (13):

$$y^\alpha x' \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{y'}{x'} \to \infty,$$

что противоречит условию.

Следовательно, при $t \to t_1$ $\frac{y}{x}$ не может стремиться к нулю[2]), а тогда из (13) следует, что при $\alpha < 1$ и $c_1 = 0$, иначе правая часть (13) могла бы принимать в окрестности $t = t_1$ отрицательные значения, что невозможно.

Итак, при $\alpha < 1$ траектории общего соударения возможны только при плоском движении ($c_1 = c_2 = 0$); этот случай был исследован в мемуаре I.

Если при $t \to t_1$ φ осциллирует, то в окрестности $t = t_1 : \inf \varphi \geqslant \geqslant \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{M}{3m_0}}$. В самом деле, из выражения (18″) для $\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \varphi}$ следует, что при достаточно малом $r(y)$ и $\varphi < \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{M}{3m_0}} : \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \varphi} < 0$[3]) и для соответствующего минимума φ было бы $\Phi = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0$, что невозможно.

---

[1]) Это очевидно для уравнения (12_1) при всяком α, а также при $\alpha > 1$ и для (12_2); но при $\alpha < 1$ во втором случае должно быть $c_2 = 0$, как это следует из интеграла энергии (13) и (34′). При $\alpha = 1$ утверждение о монотонности убывания y, без дальнейшего уточнения характера функции $f(r)$ сохраняет силу и в случае (11_2), по крайней мере, если $c_2^2 < \frac{m}{4}$; тогда, при $\frac{y}{\varrho} \to 0 : y'' = -\frac{\frac{m}{4} - c_2^2 + \varepsilon}{y^3}$.

[2]) Это справедливо и в случае $\alpha = 1$, (11_2), $c_2^2 > \frac{m}{4}$, как это следует непосредственно из второго уравнения (12_2).

[3]) В случае (11_2) при $\alpha = 1$ предполагаем $c_2^2 < \frac{m}{4}$.

В случае (11_2) при достаточно малом $r(y)$ и $\varphi > \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$: $\frac{\partial V^{(2)}}{\partial\varphi} > 0$ и, следовательно, в этом случае

$$\sup\varphi \leqslant \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}.$$

Таким образом, при $t \to t_1$ $(r \to +0)$, φ стремится к некоторому предельному значению φ_1, отличному от 0 и π или осциллирует между $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ и $\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ в случае (11_2) и между $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$ и $\frac{\pi}{2}$ в случае (11_1); во всех случаях $\frac{y}{r}$ имеет положительную нижнюю границу $\left(\frac{1}{2} \leqslant \frac{y}{\varrho} \leqslant 1\right)$ и в окрестности $t = t_1 : \frac{r}{\varrho} < a$, $\frac{r}{2y} < a$, где a — некоторое положительное число.

Пусть

$$2\alpha F(\Delta) + \Delta f(\Delta) = f_1(\Delta) f_2(\Delta) \qquad (\Delta = \varrho \text{ или } \Delta = 2y). \tag{42}$$

где, при $\Delta < \Delta^* : |f_1(\Delta)| < D(\Delta^*)$ а $\Delta^{2\alpha} f_2(\Delta)$ — положительная, неубывающая функция, такая, что $\int\limits_0^{\Delta} \frac{f_2(\Delta)}{\Delta^{1-2\alpha}} d\Delta$ — существует.

Тогда, при достаточно малом $r'' > r'$:

$$\left|\int\limits_{r'}^{r''} \frac{f_1(\Delta) f_2(\Delta)}{r^{1-2\alpha}} dr\right| < D \int\limits_{r'}^{r''} \frac{f_2(\Delta)}{r^{1-2\alpha}} dr < Da^{2\alpha} \int\limits_{r'}^{r''} \frac{f_2(\Delta)\,\Delta^{2\alpha}}{r} dr <$$

$$< Da^{2\alpha} \int\limits_{br'}^{br''} \frac{f_2(br)\,(br)^{2\alpha}}{br} d(br)$$

$$\left(b = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \text{ при } \Delta = \varrho, \text{ а при } \Delta = 2y : b = \frac{2}{\sqrt{M}}\right),$$

и, так как последний интеграл при надлежащем выборе r'' может быть сделан меньше всякого, наперед данного положительного числа то $\int\limits_0^{r} \frac{2\alpha F(\Delta) + \Delta f(\Delta)}{r^{1-2\alpha}} dr$ — сходится, то есть $\int\limits_0^{r'} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ — сходится [см. ф. (18′)].

Умножив уравнение (20_1) на α и сложив с вторым из уравнений (17), получим

$$r^{\alpha+1} \frac{dR}{dt} - \alpha h^{(i)} r^{2\alpha} = (1-\alpha)\,\Phi^2 + r\,\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r};$$

так как r в некотором интервале (t_0, t_1) убывает монотонно, то приняв его за независимую переменную, найдем

$$\frac{d\left(R^2-h^{(i)}r^{2\alpha}-2\int\limits_0^r\frac{\partial V}{\partial r}\,dr\right)}{dr}=2(1-\alpha)\frac{\Phi^2+2\Omega_i^2}{r}. \tag{43}$$

Правая часть уравнения (43) сохраняет свой знак — положительный при $\alpha<1$ и отрицательный при $\alpha>1$; следовательно, при $r\to+0$ $R^2-h^{(i)}r^{2\alpha}-2\int\limits_0^r\frac{\partial V}{\partial r}\,dr$, а потому и R^2, стремится к определенному пределу R_1^2, убывая при $\alpha<1$ и возрастая при $\alpha>1$ [1]. Если бы при $\alpha>1$ $R_1^2=+\infty$, то по (20_2) V также неограниченно возрастала бы и $\sin\varphi\to0$, что, по доказанному, невозможно.

Так как при $\alpha=1$ существуют такие траектории общего соударения, что при $t\to t_1$ φ не стремится ни к какому определенному пределу [2], а при $\alpha<1$ единственно возможные плоские траектории соударения рассмотрены в вышецитированном мемуаре, то в дальнейшем будем полагать $\alpha>1$, $c_i\neq0$.

В последнем случае, так же как и при $\alpha<1$, из уравнения (43) легко убедимся, что нижняя граница функции $\Phi^2+2\Omega_i^2$, а следовательно, и функций Φ^2 и $2\Omega_i^2$, в окрестности $r=0$, равна нулю. Тогда по (20_2) и определению V найдем, что $R_1^2>0$.

Применяя к рассматриваемому случаю рассуждения аналогичные § 8 мемуара 1, убедимся, что, в случае $\alpha\neq1$, при $t\to t_1$ $\Phi^2+2\Omega_1^2$ не может неограниченно осциллировать между нулем и некоторой верхней границей (или $+\infty$), так что при $t\to t_1$:

$$\lim\Phi^2=\lim\Omega_1^2=0 \tag{44}$$

---

[1] К этому же заключению о существовании предельного значения R_1^2 придем, предположив вместо условий (42) функцию $f(r)$ такою, что при достаточно малых значениях r и $\alpha\neq1$:

$$(1-\alpha)\ [2\alpha F(r)+rf(r)]=\frac{1-\alpha}{r^{2\alpha-1}}\frac{d}{dr}[r^{2\alpha}F(r\,]\geqslant0$$

(что, в случае монотонной функции $2\alpha F(r)+rf(r)$ сводится к условию (42) при $f_1=\pm1$), а при $\alpha=1$ такою, что $2F(r)+rf(r)=F_1(r)$ в окрестности $r=0$ сохраняет постоянный знак. Если при $\alpha=1$ и $r\to+0$ $F_1(r)$ остается ограниченной, то $R^2-h^{(i)}r^2$ стремится к определенному пределу при $t\to t_1$; при $F_1(r)=0$:

$$\frac{\partial V^{(i)}}{\partial r}=0,\quad\frac{d\,(R^2-h^{(i)}r^2)}{dr}=0\ \text{ и }\ R^2-h^{(i)}r^2=R_0^2-h^{(i)}r_0^2=\text{const.}$$

[2] См. например, Ю. Соколов, О симметрическом случае в задаче трех тел, взаимно притягивающихся обратно пропорционально кубам расстояний, Математичний збірн. КДУ № 3 или § 7 мемуара 1.

и, следовательно

$$\lim 2V = 2V_1 = R_1^2 \tag{45}$$

или

$$\lim M\left[\frac{2m_0}{\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{m_0}+\dfrac{\sin^2\varphi}{M}\right)^{\alpha}}\varrho^{2\alpha}F(\varrho)+\frac{mM^{\alpha}}{(2\sin\varphi)^{2\alpha}}(2y)^{2\alpha}F(2y)\right]=$$

$$=\lim M^{\alpha+1}\left[\frac{2m_0}{\left(1+\dfrac{2m}{m_0}\cos^2\varphi\right)^{\alpha}}+\frac{m}{(2\sin\varphi)^{2\alpha}}\right]=R_1^2 \tag{46}$$

и φ стремится к некоторому определенному пределу φ_1. Принимая во внимание (44), (45) и уравнения (17) найдем, что φ_1 определяется из уравнения

$$\sin 2\varphi_1\left[\frac{1}{(2\sin\varphi_1)^{2\alpha+2}}-\frac{1}{\left(1+\dfrac{2m}{m_0}\cos^2\varphi_1\right)^{\alpha+1}}\right]=0; \tag{47}$$

отсюда находим, что $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ (так что предельной конфигурацией является равносторонний треугольник)[1], или $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (прямолинейная предельная конфигурация).

§ 15. Траектории общего соударения (случай $\beta = -\alpha < 0$)

Вследствие монотонности изменения r, в интервале $r_0 \geqslant r > 0$, соответствующем интервалу $t_0 \leqslant t < t_1$, можно рассматривать t, φ, R, Φ как голоморфные функции от r.

Принимая r за независимую переменную, заменим уравнения (17) системой двух уравнений 1-го порядка

$$r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\Phi}{R},\quad r\frac{d\Phi}{dr}=(\alpha-1)\Phi+\frac{\dfrac{\partial V^{(i)}}{\partial\varphi}}{R}, \tag{D}$$

где

$$R=\mp\sqrt{2V-\Phi^2-2\Omega_1^2+h^{(i)}r^{2\alpha}}\;\text{[2]} \tag{D$_1$}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dr}=\frac{r^{\alpha}}{R}, \tag{D$_1'$}$$

откуда после интегрирования системы (D) t определяется при помощи квадратуры.

---

[1] Случай $\varphi_1 = \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{M}{3m_0}}$, очевидно, приводится к предыдущему.

[2] Знак $-$ при $t_1 > 0$ и $+$ при $t_1 < 0$.

Если $r^{2\alpha}F(r)$ и $r^{2\alpha+1}f(r)$ представляются в окрестности $r=0$ рядами, расположенными по целым положительным степеням $u_j=r^{\alpha_j}$ $(j=2, 3,\ldots, n)$, где α_j — произвольные положительные числа, ни одно из которых не представляется линейной комбинацией других с целыми положительными коэфициентами, то правые части уравнений (D) являются голоморфными функциями аргументов[1]

$$u=h^{(i)}r^{2\alpha},\quad u_1=c_i^2\,r^{2(\alpha-1)},\quad u_j,\quad \Phi \text{ и } \varphi$$

в окрестности системы значений

$$u=0,\quad u_1=0,\quad u_j=0,\quad \Phi=0,\quad \varphi=\varphi_1,$$

обращающимися в нуль при этих значениях.

Характеристическое уравнение будет иметь вид (41) § 13 при $\beta=-\alpha$. В случае эквидистантной предельной конфигурации, по (46):

$$R_1^2=2M^{\alpha+2}\left(1-\frac{3}{4}\,\nu^2\right)^{\alpha+1},\quad \beta_1=\frac{3}{2}\,\alpha\,(1+\alpha)\,\nu^2>0$$

и характеристическое уравнение будет иметь один положительный корень

$$\lambda_1=\frac{\alpha-1+\sqrt{(\alpha-1)^2+6\alpha\,(\alpha+1)\,\nu^2}}{2}<2\alpha. \tag{48}$$

В случае прямолинейной предельной конфигурации:

$$R_1^2=2M^{\alpha+2}\,\nu^2\left(\frac{1}{\nu^2}-1+\frac{1}{4^{\alpha+1}}\right),\quad \beta_1=-\,\alpha\,\frac{4^{\alpha+1}-1}{4^{\alpha+1}(\mu^2-1)+1}<0$$

и характеристическое уравнение будет иметь два корня положительные ($\alpha>1$) или комплексные с положительной действительной частью

$$\lambda_{1,\,2}=\frac{\alpha-1\pm\sqrt{(\alpha-1)^2-4\alpha\,\dfrac{4^{\alpha+1}-1}{4^{\alpha+1}(\mu^2-1)+1}}}{2}. \tag{49}$$

Таким образом, искомые функции представляются в окрестности $r=0$ рядами, расположенными, в общем случае[2], по целым положительным степеням

$u,\ u_1,\ u_j$[3], $a_1 r^{\lambda_1}$

---

[1] Исключая случай (11_1) при $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$.

[2] Исключения возможны только при наличии соотношений вида $\lambda_1=2l_1(\alpha-1)+\sum\limits_{j=2}^{n} l_j a_j$ (l_1, l_j — целые положительные числа или нули) — в первом случае, и при $\lambda_{1,\,2}=\sum\limits_{j=2}^{n} l_j a_j$, $\lambda_1=l\lambda_2+\sum\limits_{j=2}^{n} l_j a_j$ $(l\geqslant 1)$ — во втором.

[3] Если один из показателей 2α, $2(\alpha-1)$, α_j представляется линейной комбинацией (с целыми положительными коэфициентами) остальных, то введение соответствующего аргумента становится излишним.

в случае эквидистантной предельной конфигурации, и по степеням

$$u=h^{(2)} r^{2\alpha}, \quad u_1=c_2^2 r^{2(\alpha-1)}, \quad u_p \quad a_1 r^{\lambda_1}, \quad a_2 r^{\lambda_2}$$ [1])

в случае прямолинейной предельной конфигурации; при этом разложение $t-t_1$ будет иметь множитель $r^{\alpha+1}$.

В первом случае разложения будут зависеть от четырех произвольных параметров ($h^{(i)}, c_i^2, t_1, a_1$), а во втором — от пяти ($h^{(2)}, c_2^2, t_1, a_1, a_2$).

При более общих предположениях, например предполагая функции $r^{2a}F(r), r^{2\alpha+1}f(r), r^{2\alpha+2}\frac{df(r)}{dr}$ непрерывными при $r=0$ и приняв за аргумент $v=-\ln r$, можно привести систему (D) к форме, рассматривавшейся в известных исследованиях Боля (1900), Коттона (1911) и других авторов об асимптотических решениях системы диференциальных уравнений. На основании результатов (несколько расширенных) этих авторов легко будет убедиться в существовании семейства решений, соответствующего траекториям общего соударения ($\varphi \to \varphi_1$, $\Phi \to 0$ при $v \to +\infty$) и зависящего соответственно от одного и двух произвольных параметров (кроме $h^{(i)}, c_i^2, t_1$) [2]).

Для рассмотрения случая (11_1) при прямолинейной предельной конфигурации

$$\varphi \to \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{x}{\varrho} \to 0, \quad \frac{y}{\varrho} \to 1\right),$$

удобнее вернуться к уравнениям (6_1), (6_2), (6_4), положив там

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \omega=\omega_\eta=\frac{d\theta}{dt},$$

где θ — угол между осью симметрии треугольника $P_2P_0P_1$ и неподвижной осью абсцисс (если за неподвижную ось ординат принята ось вращения треугольника).

---

[1]) Если условия (34), (35) удовлетворяются при $r \to +\infty$, $\gamma=2(1-\beta)$, то из уравнений (D) установим, при $\beta=-\alpha>0$ существование таких решений, что при $r \to \infty +$: $\varphi \to \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{3m_0}}$, $\Phi \to 0$, $R \to +\sqrt{2V_1}$, причем $t \to t_1$, если $\beta>1$, $t \to +\infty$, если $\beta \leqslant 1$ и в окрестности $\varrho=+\infty$ имеет место отталкивание. В случае $\beta<1$ оба корня характеристического уравнения отрицательны, при $\beta \geqslant 1$ — один отрицательный. В случае (11_2), при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ и $\beta>1$ — оба корня отрицательны, а при $\beta \leqslant 1$ — один отрицательный. Наконец в случае (11_1) при $\varphi \to 0$ ($\beta>1$) — оба корня отрицательны (ср. § 17).

[2]) Где a_1, a_2 — произвольные постоянные, так как $\lambda_1+\lambda_2=\alpha-1$, то u_1 в разложения можно не вводить.

Получим систему шести уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dx'}{dt}=Mx\frac{f(\varrho)}{\varrho}+\omega^2x \\ &\frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dy'}{dt}=m_0y\frac{f(\varrho)}{\varrho}+mf(2y) \\ &\frac{d\theta}{dt}=\omega, \quad x\frac{d\omega}{dt}=-2\omega x' \end{aligned}\right\}, \tag{50}$$

имеющую интегралы

$$\left.\begin{aligned} &m_0x'^2+My'^2=M[2m_0F(\varrho)+mF(2y)]-m_0x^2\omega^2+h \qquad (h=h^{(1)}) \\ &x^2\omega=c_1. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Введем, вместо x, θ, x', ω новые переменные q_1, q_2, Q_1, Q_2 по формулам

$$\left.\begin{aligned} &q_1=\frac{x}{y}\cos\theta, \quad q_2=\frac{x}{y}\sin\theta \\ &Q_1=y^{\alpha}(x'\cos\theta-x\omega\sin\theta), \quad Q_2=y^{\alpha}(x'\sin\theta+x\omega\cos\theta) \end{aligned}\right\}, \tag{52}$$

так, что

$$x=y\sqrt{q_1^2+q_2^2}, \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{q_2}{q_1}, \quad x'=\frac{q_1Q_1+q_2Q_2}{y^{\alpha}\sqrt{q_1^2+q_2^2}}, \quad \omega=\frac{q_1Q_2-q_2Q_1}{y^{\alpha+1}(q_1^2+q_2^2)}. \tag{52'}$$

Тогда уравнения (50) заменятся системой

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dy'}{dt}=m_0y\frac{f(\varrho)}{\varrho}+mf(2y) \\ &y^{\alpha+1}\frac{dq_i}{dt}=-y^{\alpha}y'q_i+Q_i, \quad y^{\alpha+1}\frac{dQ_i}{dt}=\alpha y^{\alpha}y'Q_i+M\varrho^{2\alpha+1}f(\varrho)\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{2\alpha+2}q_i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,\ 2) \end{aligned}\right\}, \tag{50'}$$

а интегралы (51) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &My^{2\alpha}y'^2+m_0(Q_1^2+Q_2^2)=My^{2\alpha}[2m_0F(\varrho)+mF(2y)]+hy^{2\alpha} \\ &q_1Q_2-q_2Q_1=c_1y^{\alpha-1} \qquad (\alpha>1) \end{aligned}\right\}. \tag{51'}$$

Так как $\frac{x}{y}\to 0$, $\frac{y}{\varrho}\to 1$, и, следовательно, по второму уравнению (50′) $y^2{}_{\alpha}y'^2\to 2m_0+\frac{m}{2^{2\alpha}}$, то при $t\to t_1$ $(\varrho\to+0)$: $q_i\to 0$ и по (51′): $Q_i\to 0$.

Положив, наконец

$$y^{\alpha}y'=Y=-\sqrt{2m_0\varrho^{2\alpha}F(\varrho)\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{2\alpha}+\frac{m}{2^{2\alpha}}(2y)^{2\alpha}F(2y)-\frac{m_0}{M}(Q_1^2+Q_2^2)+\frac{h}{M}y^{2\alpha}}$$

$$\left(\frac{y}{\varrho}=\frac{1}{\sqrt{1+q_1^2+q_2^2}}\right) \tag{E$_1$}$$

и, приняв в системе (50′) y за аргумент, придем к рассмотрению системы четырех уравнений 1-го порядка:

$$y\frac{dq_i}{dy} = -q_i + \frac{Q_i}{Y}, \quad y\frac{dQ_i}{dy} = \alpha Q_i + \frac{M\varrho^{2\alpha+1} f(\varrho)}{Y}\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{2\alpha+2} q_i \quad (i=1,\,2) \tag{E}$$

и уравнения:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{y^{\alpha}}{Y}. \tag{E$'_1$}$$

Характеристическое уравнение системы (E) [ср. ф. (41)]:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \dfrac{1}{Y_1} \\ -\dfrac{2\alpha M}{Y_1} & \alpha-\lambda \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -\dfrac{2\alpha M}{Y_1^2} & \alpha-\lambda \end{vmatrix}^2 = \left[\lambda^2 - (\alpha-1)\lambda + \frac{2\alpha M}{Y_1^2} - \alpha\right]^2 = 0, \tag{53}$$

причем

$$Y_1^2 = 2m_0 + \frac{m}{4^{\alpha}} = 2M\left(1 - \nu^2 + \frac{\nu^2}{4^{\alpha+1}}\right),$$

имеет двукратные корни [ср. ф. (49)]:

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - \dfrac{4\alpha}{1 - \nu^2 + \dfrac{\nu^2}{4^{\alpha+1}}}}}{2}. \tag{49}$$

Элементарные делители — все простые, кроме случая $\lambda_1 = \lambda_2$, когда будем иметь двукратные элементарные делители

$$\left(\lambda - \frac{\alpha-1}{2}\right)^2, \quad \left(\lambda - \frac{\alpha-1}{2}\right)^2.$$

а) При $(\alpha-1)^2 - (\alpha+1)^2\nu^2\left(1 - \frac{1}{4^{\alpha+1}}\right) > 0$ — корни действительны и положительны, причем

$$0 < \lambda_2 < \frac{\alpha-1}{2} < \lambda_1 < \alpha - 1.$$

б) При $(\alpha-1)^2 - (\alpha+1)^2\nu^2\left(1 - \frac{1}{4^{\alpha+1}}\right) < 0$ — корни комплексные, с положительной действительной частью $\frac{\alpha-1}{2}$.

в) При $(\alpha-1)^2 - (\alpha+1)^2\nu^2\left(1 - \frac{1}{4^{\alpha+1}}\right) = 0$ — корни действительные равные:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\alpha-1}{2}.$$

Во всех случаях, предполагая функции $r^{2\alpha}F(r)$, $r^{2\alpha+1}f(r)$, $r^{2\alpha+2}\frac{df(r)}{dr}$ непрерывными при $r=0$, имеем семейство решений $q_i \to 0$, $Q_i \to 0$ при $y \to +0$, зависящее от четырех произвольных параметров (кроме h и t_1)[1].

При условиях стр. 35 q_i, Q_i представляются (в общем случае), при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, в окрестности $y=0$ разложениями по целым положительным степеням величин

$$hy^{2\alpha}, \quad y^{\alpha_j}, \quad y^{\lambda_1}, \quad y^{\lambda_2},$$

причем в разложениях не будет членов, не зависящих от двух последних величин.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ будем иметь разложения по степеням

$$hy^{2\alpha}, \; y^{\alpha_j}, \quad y^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad y^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln y.$$

В случае а) исключения в форме разложений будет только при наличии соотношений, приведенных в сноске 2 к стр. 35.

В этом случае при $t \to t_1$ θ стремится к определенному пределу θ_1. В случае б) $|\theta|$ неограниченно возрастает, как $|\ln y|$.

Наконец, в случае в), $\theta \to \theta_1$; исключения в форме разложений возможны, если $\frac{\alpha-1}{2} = \sum\limits_{i=2}^{n} l_j \mu_j$, где l_j — целые, неотрицательные числа.

§ 16. Поведение искомых функций при $r \to +\infty$

Перейдем, наконец, к рассмотрению третьего возможного случая § 7, то есть положим, что, при приближении t к некоторому конечному моменту $t_1 > 0$, r неограниченно возрастает:

$$\lim_{t \to t_1} r = +\infty. \tag{54}$$

Из уравнений (12) легко видеть, что этот случай невозможен, если $|f(r)|$ остается ограниченным при $r \to +\infty$ или если $f(r)$ обращается в отрицательную бесконечность при $r = +\infty$.

---

[1] В наших работах, напечатанных в № 4 (1940) и № 11 (1948) „Сборника трудов Института математики АН УССР“, было высказано положение, что в случае общего соударения трех материальных точек, с прямолинейной предельной конфигурацией, прямая предельной конфигурации лежит в неизменяемой плоскости. Однако в общем случае это положение неверно; оно будет справедливым только при равенстве нулю одной из трех произвольных постоянных, входящих в разложения искомых функций (зависящих вообще от одиннадцати произвольных параметров). В рассматриваемом здесь случае прямая предельной конфигурации перпендикулярна к неизменяемой плоскости.

Пусть $f(r)=\dfrac{dF(r)}{dr}$ — функция действительная и аналитическая около всякого действительного положительного значения r, конечная и непрерывная при $r=0$ и такая, что

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-2\beta+1} f(r) = 2\beta \left[\lim_{r\to+\infty} r^{-2\beta} F(r)=1; \quad \beta > \frac{1}{2}\right]. \tag{34''}$$

Тогда по уравнению (14′) найдем, что в некотором интервале (t_0, t_1) r возрастает монотонно, а из вторых уравнений (12_1), (12_2), что, при $t\to t_1$, y стремится к определенному конечному пределу $y_1 \geqslant 0$ или неограниченно возрастает [1]).

Совершенно подобно § 4 и 5 мемуара 2 убедимся, что в первом случае $y_1=0$ (а также, что $\lim y' = y_1' = 0$) и, что случай (54) возможен только при $\beta>1$.

При $y\to+0$, принимая во внимание монотонность возрастания x в некотором интервале, из первого уравнения (12), при условии (54), найдем

$$\lim r^{-\beta} x' = \lim x^{-\beta} x' \left(\frac{x}{r}\right)^{\beta} = \sqrt{\frac{2M}{m_0^{\beta}}};$$

тогда

$$\lim r^{-\beta} y' = 0 \quad \left(\lim \frac{1}{y^2 r^{2\beta}} = 0\right)$$

и непосредственно из (16):

$$\lim R = R_1 = \sqrt{2Mm_0^{-\beta+1}}, \quad \lim \Phi = 0, \quad \lim 2V = R_1^2 \qquad (\lim \Omega_i^2 = 0).$$

В случае $y\to+\infty$ предположим функцию $f(r)$ такою, что

$$\Delta f(\Delta) - 2\beta F(\Delta) = f_1(\Delta) f_2(\Delta) \qquad (\Delta=\varrho \text{ или } \Delta=2y), \tag{42'}$$

где при $\Delta > \Delta^* : |f_1(\Delta)| < D(\Delta^*)$, а $f_2(\Delta)$ — положительная неубывающая функция, причем $\displaystyle\int_{\Delta}^{+\infty} \frac{f_2(\Delta)}{\Delta^{2\beta+1}} d\Delta$ — существует.

Тогда, при достаточно большом $r' < r''$:

$$\left| \int_{r'}^{r''} \frac{f_1(\Delta) f_2(\Delta)}{r^{2\beta+1}} dr \right| < D \int_{r'}^{r''} \frac{f_2(\Delta)}{r^{2\beta+1}} dr < D b^{2\beta} \int_{br'}^{br''} \frac{f_2(br)}{(br)^{2\beta+1}} d(br)$$

и, так как последний интеграл надлежащим выбором r' может быть сделан меньше всякого, наперед данного положительного числа, то

$$\int_{r}^{+\infty} \frac{\Delta f(\Delta) - 2\beta F(\Delta)}{r^{2\beta+1}} dr \text{ — существует, то есть } \int_{r}^{+\infty} \frac{\partial V}{\partial r} dr \text{ — сходится.}$$

---

[1]) Такое же замечание имеет место и относительно x.

Тогда из уравнения (43) найдем, что $R^2 - h^{(i)} r^{2\alpha} + 2 \int\limits_r^{+\infty} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr$, а поэтому и R^2 стремится к некоторому конечному пределу $R_1^2 > 0$[1]. Далее, совершенно аналогично § 7 мемуара 2, установим, что при $t \to t_1$ $(y \to +\infty)$:

$$\lim \Phi^2 = \lim \Omega_i^2 = 0, \quad \lim 2V = 2V_1 = R_1^2 \tag{44'}$$

и φ стремится к некоторому предельному значению φ_1, определяемому уравнением (39) при $\alpha = -\beta$ $(\beta > 1)$. Отсюда находим, что предельными значениями φ могут быть

$$\varphi_1 = 0, \quad (\vartheta_1 = 0), \quad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad \left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}\right), \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \left(\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 17. Траектории неограниченного расхождения материальных точек

В случае $\varphi_1 \neq 0$ все рассуждения § 15 остаются в силе при отрицательных значениях α, α_j, с изменением знака перед корнем в выражении R (D_1) и λ_1 и с заменой $r=0$ на $r=+\infty$ (так, что $v = \ln r$).

В случае эквидистантной предельной конфигурации будем иметь один отрицательный корень, а в случае $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (случай 11_2) — два таких корня (при этом вообще $x \to \infty$, а при равенстве нулю одного из произвольных параметров: $x \to 0$). Таким образом, существует семейство таких решений, что при $t \to t_1$ r (и ϱ) неограниченно возрастает. Это семейство зависит от четырех (в первом случае) или от пяти (во втором случае) произвольных параметров.

В случае (11_1) при $\varphi_1 = 0$ нетрудно установить существование таких решений, если, например, 2β есть целое положительное число и

$$F(r) = r^{2\beta} + \sum_{i=2}^{i=2\beta-1} A_i r^i.$$

В этом случае:

$$R_1^2 = 2Mm_0^{1-\alpha}$$

---

[1] К тому же заключению придем, предполагая функцию $f(r)$ такою, что при достаточно больших значениях r:

$$rf(r) - 2\beta F(r) = r^{2\beta+1} \frac{d}{dr}\left[\frac{F(r)}{r^{2\beta}}\right] \geqslant 0.$$

Так как $r^{-2\beta} F(\varrho) = \varrho^{-2\beta} F(\varrho) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2\beta}$, $r^{-2\beta} F(2y) = (2y)^{-2\beta} F(2y) \left(\frac{2y}{r}\right)^{2\beta}$ — ограничены п. и $\varrho \to +\infty$, $y \to +\infty$, то ограничено и V и R^2 по (20_1) не может неограниченно возрастать при $t \to t_1$.

и характеристическое уравнение имеет два отрицательных корня [1]):

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(\beta+1)\pm\sqrt{(\beta+1)^2-4\beta\nu^2}}{2},$$

причем

$$0<|\lambda_1|<1<\beta<|\lambda_2|<\beta+1<2\beta\ ^{2)}). \tag{55}$$

Искомые решения представляются в окрестности $r=+\infty$ рядами, расположенными по целым положительным степеням

$$a_1 r^{\lambda_1},\quad a_2 r^{\lambda_2},\quad \frac{1}{r},$$

причем в общем случае $y\to+\infty$, а при $c_1=0$: $y\to 0$.

При более общих допущениях, предполагая, что $r^{2-2\beta}\dfrac{df(r)}{dr}$ стремится при $r\to+\infty$ к определенному пределу и что $r^{-2\beta}F(2y)$, рассматриваемая как функция от r и φ, и ее производные по φ 1-го и 2-го порядка суть определенные и непрерывные функции при $r\geqslant r_0$, $\varphi=0$, приняв за аргумент $v=\ln r$, можно привести систему (D) и в случае $\varphi_1=0$ (11_1) к виду, удовлетворяющему условиям известных теорем Боля-Коттона о существовании асимптотических решений диференциальных уравнений [3]).

Случай (11_1) при $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x}{y}\to 0,\ \dfrac{y}{\varrho}\to+1\right)$ трактуется совершенно аналогично концу § 15 по уравнениям (50) и (E), с заменой там условия $y\to+0$, $\varrho\to+0$ на $y\to+\infty$, $\varrho\to+\infty$, α на $-\beta$ и переменой знака в выражении для Y. В настоящем случае ($\beta>1$) корни характеристического уравнения по (49) оба действительные и отрицательные, удовлетворяющие неравенствам (55).

Наконец, в случае (11_2), $\varphi_1=0\left(\dfrac{y}{\varrho}\to+0,\ \dfrac{x}{\varrho}\to 1\right)$ рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=x',\quad \dfrac{dx'}{dt}=Mx\dfrac{f(\varrho)}{\varrho}\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=y',\quad \dfrac{dy'}{dt}=m_0 y\dfrac{f(\varrho)}{\varrho}+mf(2y)+\omega^2 y\\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt}=\omega,\quad y\dfrac{d\omega}{dt}=-2\omega y'\end{array}\right\}, \tag{56}$$

где теперь $\omega=\omega_\xi$, а θ — угол между подвижной и неподвижной осями ординат (если за неподвижную ось абсцисс принята ось вращения треугольника, то есть его ось симметрии).

---

[1]) Ср. § 9 мемуара 2.

[2]) Так, что λ_1, λ_2 не могут быть целыми.

[3]) Ср. § 9 мемуара 2.

Система (56) имеет интегралы:

$$\left.\begin{array}{l} m_0 x'^2 + My'^2 = M[2m_0 F(\varrho) + mF(2y)] - My^2\omega^2 + h \quad (h = h^{(2)}) \\ y^2\omega = c_2 \end{array}\right\}. \tag{57}$$

Положив

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 = \dfrac{y}{x}\cos\theta, & p_2 = \dfrac{y}{x}\sin\theta, \\ P_1 = x^{-\beta}(y'\cos\theta - y\omega\sin\theta), & P_2 = x^{-\beta}(y'\sin\theta + y\omega\cos\theta) \end{array}\right\}, \tag{58}$$

так, что

$$y = x\sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{p_2}{p_1}, \quad y' = \frac{p_1P_1 + p_2P_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}x^\beta, \quad \omega = \frac{p_1P_2 - p_2P_1}{p_1^2 + p_2^2}x^{\beta-1} \tag{57'}$$

и приняв x за аргумент, заменим (56) системой:

$$x\frac{dp_i}{dx} = -p_i + \frac{P_i}{X}, \quad x\frac{dP_i}{dx} =$$

$$= -\beta P_i + \frac{m_0\dfrac{f(\varrho)}{\varrho^{2\beta-1}}\left(\dfrac{\varrho}{x}\right)^{2\beta-2} + m\dfrac{f(2y)}{yx^{2\beta-2}}}{X}p_i, \qquad (i = 1, 2), \tag{F}$$

где

$$X = x^{-\beta}x' = +\sqrt{2M\frac{F(\varrho)}{\varrho^{2\beta}}\left(\frac{\varrho}{x}\right)^{2\beta} + \frac{Mm}{m_0}\frac{F(2y)}{x^{2\beta}} - \frac{M}{m_0}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{h}{m_0}x^{-2\beta}}$$

$$\left(\frac{\varrho}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}}\right) \tag{F$_1$}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^\beta X}. \tag{F$_1'$}$$

Предположим, что функция $\dfrac{F(2y)}{x^{2\beta}} = \dfrac{F(2x\sqrt{p_1^2 + p_2^2})}{x^{2\beta}}$ (рассматриваемая как функция аргументов x, p_1, p_2) и ее частные производные 1-го и 2-го порядка по p_i — определенные и непрерывные функции при $x \geqslant x_0$, $p_i = 0$. Тогда система (F) будет удовлетворять условиям известных теорем Боля и Коттона об асимптотических решениях диференциальных уравнений.

Характеристическое уравнение системы (F) будет:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \dfrac{1}{X_1} \\ \dfrac{2\beta m_0}{X_1} & -\beta-\lambda \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ \dfrac{2\beta m_0}{X_1^2} & -\beta-\lambda \end{vmatrix}^2 = [\lambda^2 + (\beta+1)\lambda + \beta\nu^2]^2 = 0,$$

так как $X_1^2 = 2M$.

Это уравнение имеет действительные, двукратные отрицательные корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\beta+1) \pm \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\beta\nu^2}}{2}$$

и искомые решения, такие, что при $x \to +\infty : p_i \to 0$, $P_i \to 0$, зависят от четырех произвольных параметров. При $t \to t_1$ $(x \to +\infty)$ угол θ стремится к определенному предельному значению.

Поступило 28.XI 1949.