О некоторых диференциальных уравнениях со случайными функциями

И. И. Гихман

В настоящей работе рассматриваются диференциальные уравнения, в которые входят случайные функции. Предположено a priori, что эти случайные функции непрерывны. Поэтому ниже понятие случайного процесса применяется в весьма узком смысле.

Пусть Φ обозначает m-мерное линейное пространство, $\alpha(t)$ — произвольную непрерывную функцию $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в Φ и Γ^c — некоторое множество функций $\alpha(t)$.

Если Ω некоторое борелевское множество в Φ^n (Φ^n — n-ая метрическая степень пространства Φ) и a — система $n+1$ возрастающих чисел $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $t_0 \geqslant 0$

$$a = \{t_0, t_1, \ldots t_n\},$$

то через Ω^a обозначим множество всех функций $\alpha(t) \in \Gamma^c$, удовлетворяющих соотношению

$$\{\alpha(t_1) - \alpha(t_0), \alpha(t_2) - \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})\} \in \Omega.$$

Под случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$ в дальнейшем понимается поле вероятностей [1] вероятностью P, определенной на вполне аддитивном теле множеств, содержащем все множества Ω^a.

Ниже, когда идет речь о динамической системе Σ, находящейся под влиянием случайного процесса, предполагается, что задана определяющая систему функция

$$X_t(\tau, \xi) = X(\tau, \xi \mid t, \alpha(\theta))$$

определенная для всех $\xi \in \Phi$, почти всех $\alpha(\theta) \in \Gamma^c$, и $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющая условиям

$$X_\tau(\tau, \xi) = \xi, \quad X_{t+t'}(\tau, \xi) = X_{t+t'}[t, X_t(\tau, \xi)]. \tag{1}$$

Ряд задач приводит к динамическим системам, определяемым диференциальным уравнением

$$\frac{d(x-\alpha)}{dt} = A(t, x), \tag{2}$$

где $x \in \Phi$, $\alpha = \alpha(t)$ непрерывная, но, вообще говоря, недиференцируемая случайная функция. Частным примером уравнения такого типа может служить так называемое уравнение Ланжевена для скорости u частицы в броуновском движении, которое обычно записывается в виде [2].

$$\frac{du}{dt} = -\beta u + A(t) + K(r, t),$$

где $A(t)$ обозначает случайную функцию.

Однако уравнение Ланжевена корректнее записывать иначе, например, так:

$$\frac{d(u-\alpha)}{dt} = -\beta u + K(r, t),$$

и если желать, чтобы вероятности перехода для броуновской частицы удовлетворяли уравнению Смолуховского, нужно предположить, что приращения случайных функций $\alpha(t)$ на неперекрывающихся интервалах времени между собой независимы, и, следовательно, функции $\alpha(t)$ не диференцируемы.

Задачи, приводящие к диференциальным уравнениям вида (2), рассматривались в ряде работ Крылова и Боголюбова [3], [4], Боголюбова [5], Doob'a [6], Круткова [7], но некоторые принципиальные вопросы, связанные с исследованием таких уравнений рассмотрены еще недостаточно.

Основной задачей настоящей работы является конструкция простых примеров, связанных с уравнением (2) и приводящих после соответствующего предельного перехода к системам без последействия.

В § 1 рассматриваются вопросы, связанные с вопросами существования решений уравнения (2) и возможностью определения вероятностей перехода и выводятся оценки, нужные для дальнейшего.

В § 2 доказываются теоремы, устанавливающие стохастическую непрерывность решений уравнения (2) относительно параметров.

В § 3 строится предельный процесс с суммами независимых стационарных случайных процессов, приводящий к случайному процессу с независимыми во времени приращениями. Влияние такого процесса на динамическую систему приводит к процессу без последействия.

В § 4 приводятся некоторые схемы, к которым применимы ранее доказанные теоремы.

Автор выражает свою благодарность проф. Н. Н. Боголюбову за постановку темы настоящей работы.

§ 1. При рассмотрении уравнения

$$\frac{d(x-\alpha)}{dt} = A(t, x), \tag{1}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ некоторая непрерывная функция, прежде всего возникает вопрос о существовании решения.

В том случае, когда функция $A(t, x) = \{A^1(t, x), \ldots, A^m(t, x)\}$ на данном сегменте $[0, T]$ имеет равномерно ограниченные в Φ частные производные первого порядка, методом доказательства существования решения уравнения (1) может служить обычно применяемый метод Качиополи-Банаха.

Если же функция $A(t, x)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, но относительно роста последних на бесконечности ничего не предположено, то метод последовательных приближений Пикара дает для уравнения (1) локальное существование интегральной кривой, продолжаемой обычными методами до тех пор, пока интегральная кривая остается в конечной области пространства Φ.

Таким образом, решение уравнения (1) при условии, что $u = u(t)$ — непрерывная функция и $A(t, x)$ имеет частные производные первого порядка, ограниченные в каждой конечной области Φ, определено в достаточно малой окрестности точки $t=0$ при любом начальном значении и не может быть определено для всех $t \in [0, T]$, если оно не ограничено при приближении к некоторой точке $t' < T$.

С. Н. Бернштейн рассматривал класс обычных диференциальных уравнений „квазилинейных справа" [8].

$$\frac{dy}{dt} = A(y, t),$$

где $A'_y(y, t) \leqslant C$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, для всех y, обладающих тем свойством, что их решения остаются в конечной части прямой $(-\infty < y < \infty)$ в течение всего промежутка времени $[0, T]$.

Аналогичный класс уравнений можно определить при исследовании уравнения (1).

Назовем уравнение (1) ограниченным сверху, если для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$ и любых $x, y \in \Phi$,

$$(A(t, x) - A(t, y);\ x-y) \leqslant C(x-y;\ x-y), \tag{2}$$

где $(\xi; \eta)$ обозначает скалярное произведение векторов в Φ.

Условие (2) выполняется в простейшем случае, если $A(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x,

$$|A(t, x) - A(t, y)| \leqslant C|x-y|,$$

где $|x|$ — норма вектора x и константа C не зависит от t, $0 \leqslant t \leqslant T$, или же в более общем случае, если на единичной сфере $|\xi| \leqslant 1$ значения квадратической формы

$$\sum_{i, j=1}^{m} \frac{\partial A^i(t, x^1, \ldots, x^m)}{\partial x^j} \xi_i \xi_j$$

ограничены сверху, равномерно относительно x, t,

$$\sum_{i, j=1}^{m} \frac{\partial A^i(t, x^1, \ldots, x^m)}{\partial x^j} \xi_i \xi_j \leqslant C. \tag{2'}$$

Лемма 1. Решения $x(t)$ ограниченного сверху уравнения (1) ограничены на сегменте $[0, T]$.

Для доказательства введем величину

$$\xi(t) = x(t) - x_0 - \{\alpha(t) - \alpha(0)\},$$

где $x_0 = x(0)$. Уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = A[t, x_0 + \{\alpha(t) - \alpha(0)\} + \xi(t)].$$

Умножая скалярно на ξ, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi(t)|^2 = (A[t, x_0 + \{\alpha(t) - \alpha(0)\}]; \xi) +$$
$$+ (A[t, x_0 + \{\alpha(t) - \alpha(0)\} + \xi(t)] - A[t, x_0 + \{\alpha(t) - \alpha(0)\}]; \xi).$$

Интегрируя последнее равенство и пользуясь (2), получим

$$\frac{1}{2}|\xi|^2 \leqslant C\int_0^t |\xi|^2 d\tau + \int_0^t (A[\tau, x_0 + \{\alpha(\tau) - \alpha(0)\}]; \xi)\, d\tau,$$

и, далее, пользуясь неравенством Буняковского

$$\frac{1}{2}|\xi|^2 \leqslant C\int_0^t |\xi|^2 d\tau + \left\{\int_0^t |\xi|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^t |A[\tau, x_0 + \{\alpha(\tau) - \alpha(0)\}]|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует

$$|\xi(t)|^2 \leqslant (2C+1)v^2(t) + \psi^2(t), \tag{3}$$

$$\int_0^t |\xi|^2 d\tau \leqslant v^2(t), \tag{3'}$$

где

$$\psi^2(t) = \int_0^t |A(\tau, x_0 + \{\alpha(\tau) - \alpha(0)\}|^2 d\tau \tag{4}$$

$$v(t) = \int_0^t e^{C(t-\tau)}\psi(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Таким образом,

$$|x(t)|^2 \leqslant 3|x_0|^2 + 9Cv^2(t) + 3\psi^2(t) + 3|\alpha(t) - \alpha(0)|^2, \tag{6}$$

откуда и следует доказываемое.

Из доказанной леммы следует, что уравнение (1) ограниченное сверху на сегменте $[0, T]$, имеет на всем сегменте (единственное) решение, удовлетворяющее произвольному начальному условию $x(0) = x_0$.

В дальнейшем, рассматривая уравнения (1), будем считать их ограниченными сверху, если только иное специально не оговорено.

Отметим теперь одну оценку, характеризующую отклонение двух решений уравнения (1) в зависимости от разности их начальных значений.

Если $x(t)$, $y(t)$ — два решения уравнения (1) с начальными значениями x_0, y_0, соответственно, то

$$\frac{d(x-y)}{dt} = A(t, x) - A(t, y).$$

Умножая это равенство на $x-y$ и интегрируя, получим

$$|x(t) - y(t)|^2 \leqslant |x_0 - y_0|^2 + C\int_0^t |x(\tau) - y(\tau)|^2 d\tau,$$

откуда

$$|x(t) - y(t)|^2 \leqslant e^{Ct}|x_0 - y_0|^2. \tag{7}$$

Допустим теперь, что функции $\alpha(t)$, входящие в уравнение (1), являются функциями некоторого случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$ и непрерывны с вероятностью, равной 1.

Решения уравнения (1)

$$X_t(\tau, \xi) = X(\tau, \xi/t, \alpha(\theta)), \tag{8}$$

определяют динамическую систему Σ, возмущаемую случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$. Условия (1), очевидно, выполняются.

Вполне естественно рассматривать траектории системы Σ, как случайные функции и в связи с этим ввести для системы Σ вероятности перехода.

Именно, под вероятностью перехода $P(\xi, \Omega^a)$ системы Σ из начального положения ξ во множество Ω^a, где Ω — борелевское множество в Φ^n и a-последовательность n-возрастающих положительных чисел $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, будем понимать вероятность в Γ^c осуществления соотношения

$$\{X_{t_1}(0, \xi), \quad X_{t_2}(0, \xi), \ldots, X_{t_n}(0, \xi)\} \in \Omega. \tag{9}$$

Систему Σ, для которой вероятности перехода определены, будем называть стохастически определенной. Разумеется, о вероятностях перехода имеет смысл говорить только тогда, когда множество всех $\alpha(t) \in \Gamma^c$, удовлетворяющих соотношению (9), является P-измеримым множеством.

Для удобства дальнейших формулировок введем следующие определения:

1. Пусть $\chi = \chi(\lambda)$ непрерывная, положительная, монотонно возрастающая, выпуклая снизу функция переменной λ, $(0 \leqslant \lambda < \infty)$.

Будем говорить, что функция $A(t, x)$ на сегменте $[0, T]$ принадлежит классу $K[\chi]$, если $A(t, x)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, ограничена сверху и если

$$|A(t, x)|^2 \leqslant \chi(|x|^2), \quad \left|\frac{dA}{dx}\right|^2 \leqslant \chi(|x|^2), \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\frac{dA}{dx}$ обозначает матрицу $\left\{\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right\}$ и $\left|\frac{dA}{dx}\right|$ — ее норма, равная квадратному корню из суммы квадратов элементов матрицы.

2. Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ будем называть $\varphi(\lambda)$-ограниченным, где $\varphi(\lambda)$ — непрерывная, положительная, монотонно возрастающая функция вещественной переменной λ, $(0 \leqslant \lambda < \infty)$, если

$$M\varphi[|\alpha(t+\Delta) - \alpha(t)|^2] < \infty$$

для всех $t > 0$, $\Delta > 0$ $(t+\Delta \leqslant T)$.

Здесь, и в дальнейшем, $M\varphi$ обозначает среднее значение (математическое ожидание) случайной величины φ.

Пусть H— гильбертовское пространство функций, определенных на Γ^c и принимающих значения в Φ, в котором скалярное произведение двух функций f, g, определено соотношением

$$((f; g)) = M(f; g), \quad \|f\|^2 = ((f, f)) < \infty.$$

Следующая лемма содержит в себе, в частности, существование вероятностей перехода.

Лемма 2. Пусть

a) случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ — $\varphi(\lambda)$ — ограничен и $\varphi(\lambda) \geqslant \lambda^k$; $k > 1$

b) $M|\alpha(t+\Delta) - \alpha(t)|^{2k} \to 0$ при $\Delta \to 0$ равномерно относительно t в сегменте $[0, T]$;

c) $A(t, x) \in K[\chi]$, причем $\chi^l[s\chi(4\lambda)] \leqslant \varphi(\lambda)$, где l—число, сопряженное с k, $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$, а число s определяется ниже (17);

Тогда функция $x(t) = X_t(0, \xi)$, являющаяся решением уравнения (2), принадлежит H.

Доказательство. Определим на Γ^c последовательность функций $y^N(t)$ посредством равенств

$$y^N(t) = \xi + \left[\alpha\left(\frac{k}{N}\right) - \alpha(0)\right](k+1-tN) +$$

$$+ \left[\alpha\left(\frac{k+1}{N}\right) - \alpha(0)\right](tN-k) + \int_0^t A(\tau, y^N(\tau))\, d\tau, \tag{10}$$

при $\frac{k}{N} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{N}$.

Очевидно, что

$$y^N(t) = F\left\{t, \xi, \alpha\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha(0), \ldots, \alpha\left(\frac{[tN]+1}{N}\right) - \alpha\left(\frac{[tN]}{N}\right)\right\},$$

где $[tN]$ — целая часть числа tN и $F(t, \xi, \lambda, \ldots, \lambda_k)$ — непрерывная функция своих аргументов. Таким образом, $y_\tau^N(t)$ — P-измеримая на Γ^c функция.

Заметим, что уравнение (10) может быть получено непосредственно из уравнения (1), если в последнем заменить функцию $\alpha(t)$ на функцию $\beta_N(t)$, определяемую соотношением

$$\beta_N(t) = \beta(t) = \alpha\left(\frac{k}{N}\right)(k+1-tN) + \alpha\left(\frac{k+1}{N}\right)(tN-k), \tag{11}$$

если $\dfrac{k}{N} \leqslant t \leqslant \dfrac{k+1}{N}$.

Следовательно, к уравнению (10) можно применить оценку (6′), из которой вытекает, что функция $y^N(t)$ при любых t, $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и ξ принадлежит H, если только существуют величины

$$M|\alpha(t) - \alpha(0)|^2,$$
$$M|A(t, \xi + \beta(t) - \beta(0)|^2,$$

ограниченные при $0 \leqslant t \leqslant T$. При этом изменение порядка интегрирования по t и вычисления среднего значения обосновывается применением теоремы Фубини.

Последние же соотношения выполняются, если процесс $\{\Gamma^c, P\}$ $\varphi(\lambda)$ ограничен и $A(t, x) \in K[\chi]$, где

$$\chi(4\lambda) \leqslant \varphi(\lambda), \quad \varphi(\lambda) \geqslant \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Рассмотрим теперь решения уравнения (1), соответствующие равным начальным значениям, но разным функциям $\alpha(t)$.

Пусть $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$,

$$\frac{d}{dt}[x_1 - \alpha_1(t)] = A(t, x), \quad \frac{d}{dt}[x_2 - \alpha_2(t)] = A(t, x_2), \tag{1!}$$

и

$$z = z(t) = x_1(t) - x_2(t) - [\alpha_1(t) - \alpha_1(0) - \alpha_2(t) + \alpha_2(0)]. \tag{12}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 = \int_0^t (z(\tau);\ A(\tau, x_1) - A(\tau, x_2))\, d\tau.$$

Положим $\overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}\alpha_i = \alpha_i(\tau) - \alpha_i(0)$ и преобразуем предыдущее равенство, пользуясь ограниченностью сверху уравнений (1!) и неравенством Буняковского. Получим,

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 \leqslant C\int_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau + \psi_2(\tau)\left\{\int_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где

$$\psi_2^2(t) = \int_0^t \left|A(\tau, x_1) - A\left(\tau, x_1 + \overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}\alpha_2 - \overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}\alpha_1\right)\right|^2 d\tau.$$

Следовательно,

$$|z(t)|^2 \leqslant \psi_2^2(t) + 3Cv_2^2(t),$$

где

$$v_2(t) = \int_0^t e^{C(t-\tau)}\psi_2(\tau)\,d\tau.$$

На фиксированном интервале времени можно написать

$$|z(t)|^2 \leqslant \psi_2^2(t) + K\int_0^t \psi_2^2(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Теперь можно утверждать следующее:

a) Последовательность $y^N(t)$ при $N\to\infty$ сходится в H.

Положим в (13) и (14) $\alpha_1(t)=\beta_N(t)$, $\alpha_2(t)=\beta_{N+m}(t)$,

$$x_1(t) = y^N(t), \quad x_2(t) = y^{N+m}(t).$$

Тогда

$$M\psi_2^2(t) \leqslant \int_0^t d\tau\int_0^1 \left[M|\beta_{N+m}-\beta_N|^{2k}\right]^{\frac{1}{k}}\left[M\left|\frac{d}{dx}A\{\tau, y^N + \theta\overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}(\beta_{N+m}-\beta_N)\}\right|^{2l}\right]^{\frac{1}{l}}d\theta,$$

$$\frac{1}{2}M|y^{N+m}(t)-y^N(t)|^2 \leqslant M|\beta_{N+m}(t)-\beta_N(t)|^2 + M\psi_2^2(t) + K\int_0^t M\psi_2^2(\tau)\,d\tau.$$

В силу предположения b), $M|\beta_{N+m}(t)-\beta_N(t)|^{2k}\to 0$, равномерно относительно t, m, если $N\to\infty$. Таким образом, для доказательства сходимости в H последовательности $y^N(t)$ достаточно показать, что

$$M\left|\frac{d}{dx}A(t, y^N + \theta\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}(\beta_{N+m}-\beta_N))\right|^{2l} \tag{15}$$

равномерно ограничено, относительно t, θ, N.

Имеем, пользуясь выпуклостью снизу функции $\chi(\lambda)$,

$$\left|\frac{d}{dx}A(t, y^N + \theta\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}(\beta_{N+m}-\beta_N))\right|^{2l} \leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{1+\theta}\chi(|(1+\theta)y^N|^2) + \frac{\theta}{1+\theta}\chi(|(1+\theta)\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}(\beta_{N+m}-\beta_N)|^2)\right]^l.$$

Что касается величины $|y^N(t)|$, то для ее оценки можно воспользоваться соотношением (6!). Оно дает

$$\frac{1}{3}|y^N|^2 \leqslant |\xi|^2 + 3Cv^2(t) + \psi^2(t) + |\beta_N(t) - \beta_N(0)|^2,$$

где

$$2\psi^2(t) \leqslant t\chi(4|\xi|^2) + \int_0^t \chi(4|\beta_N(\tau) - \beta_N(0)|^2)\,d\tau$$

$$3Cv^2(t) \leqslant C'\left\{\frac{t^2}{2}\chi(4|\xi|^2) + t\int_0^t \chi(4|\beta_N(\tau) - \beta_N(0)|^2)\,d\tau\right\},\ C' = \frac{4}{3}e^{2CT}.$$

Следовательно,

$$\chi[|(1+\theta)y^N|^2] \leqslant \chi\{36|\xi|^2 + 18\chi(4|\xi|^2)(1+C't)t\} + \chi(36|\beta_N(t) - \beta_N(0)|^2) +$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t \chi\{36t(C't+1)\chi[4|\beta_N(\tau) - \beta_N(0)|^2]\}\,d\tau.$$

Таким образом, если

$$M\chi^l\{S\chi[4|\alpha(t) - \alpha(0)|^2]\} < \infty \tag{16}$$

где

$$s = \max\{36T(C'T+1),\ 8\} \tag{17}$$

то величина (15) действительно будет равномерно ограниченной.

b) Предел $y^0(t)$ последовательности $y^N(t)$ в H будет измеримой функцией на Γ^c и последовательность $y^N(t)$ сходится к $y^0(t)$ по мере.

c) Функции $x(t)$ и $y^0(t)$ совпадают почти всюду на Γ^c.

Отсюда следует, в частности, что $x(t)$ измерима на Γ^c.

Для доказательства высказанного утверждения оценим вероятность неравенства $|x(t) - y^0(t)| > \varepsilon$, где t фиксировано или пробегает конечное число значений. Обозначая через P^* внешнюю вероятность (внешнюю меру в смысле Каратеодори), будем иметь

$$P^*(|x(t) - y^0(t)| > \varepsilon) \leqslant P^*\left(|x(t) - y^N(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P^*\left(|y^0(t) - y^N(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Что касается второго слагаемого в правой части полученного неравенства, то оно по b) стремится к 0 при $N \to \infty$.

Воспользуемся теперь оценкой (14), положив $\alpha_2(t) = \alpha(t)$ и $\alpha_1(t) = \beta_N(t)$.

Тогда

$$\frac{1}{2}|x(t) - y^N(t)|^2 \leqslant |\alpha(t) - \beta_N(t)|^2 + \psi_2^2(t) + K\int_0^t \psi_2^2(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$\psi_2^2(t) = \int_0^t\int_0^1 \left|\overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}(\alpha - \beta_N)\right|^2 \left|\frac{d}{dx}A\left(\tau,\ y^N + \theta\overset{\tau}{\underset{0}{\Delta}}(\alpha - \beta_N)\right)\right|^2 d\theta\,d\tau. \tag{19}$$

Полученные неравенства оценивают величину $|x(t)-y^N(t)|^2$ при помощи P-измеримой мажоранты, которую обозначим через $w_N(t^2)$. Из а) следует, что $Mw_N^2(t)\to 0$ при $N\to\infty$, и, следовательно, $w_N(t)$ сходится по вероятности к 0. Так как

$$P^*\left(|x(t)-y^N(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant P\left(w_N(t)>\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{20}$$

то

$$P^*\left(|x(t)-y^N(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\to 0 \quad (N\to\infty). \tag{21}$$

Отсюда

$$P(|x(t)-y^0(t)|>\varepsilon)=0 \tag{22}$$

при любом $\varepsilon>0$, то есть функции $x(t)$ и $y^0(t)$ P-эквивалентны на Γ^c. Тем самым лемма доказана.

В связи с условиями а) — с), фигурирующими в доказанной лемме, сделаем следующее замечание. Если случайная величина $\alpha(t+\tau)-\alpha(t)$ имеет нормальный закон распределения с равномерно ограниченной дисперсией относительно t, τ $(t+\tau<T)$, то условия леммы выполняются, если в качестве функции $\chi(\lambda)$ можно принять функцию

$$Ce^{A\log^m(1+\lambda)},$$

где A, C, m — произвольные положительные числа.

В частности, при нормальном распределении разности $\alpha(t+\tau)-\alpha(t)$, условия леммы выполняются, если $A(t, x)$ и ее производные первого порядка по x мажорируются некоторыми полиномами.

Как было ранее упомянуто, лемма 2, точнее, простое обобщение леммы 2, содержит в себе существование вероятностей перехода $P(\xi, \Omega^a)$.

Вероятности перехода $P(\xi, \Omega^a)$ запишем теперь в виде $P(0, \xi; \Omega^a)$, подчеркивая этим, что рассматривается вероятность перехода во множество Ω^a системы Σ, находящейся в начальный момент времени $t=0$ в точке ξ.

Совершенно аналогично можно ввести вероятности перехода $P(\tau, \xi; \Omega^a)$ $(\tau<t,\ a=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\})$ во множество Ω^a системы Σ, внесенной извне в точку фазового пространства в момент времени τ, определив их, как вероятность соотношений

$$\{X_{t_1}(\tau, \xi),\ X_{t_2}(\tau, \xi), \ldots,\ X_{t_n}(\tau, \xi)\}\in\Omega. \tag{8!}$$

Далее, можно ввести условные вероятности перехода

$$P(\tau_0, \xi; t_1, \xi_1; \ldots; t_r, \xi_r\,|\,\Omega^b),$$

где

$$\tau_0<t_1<\ldots<t_r<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_s,\ b=\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s\},$$

определив их соотношениями

$$P(\tau_0, \xi \mid \Omega^a \times \Omega^b) = \int_{\Omega^a} P(\tau_0, \xi; t_1, \xi_1; \ldots; t_r \xi_r / \Omega^b)\, P(\tau_0, \xi \mid d\Omega^a) \tag{23}$$

(Колмогоров [1]).

Наиболее важным и изученным классом систем являются системы без последействия (Колмогоров [9]).

Определения:

1. Стохастически определенная система Σ называется системой без последействия, если

$$P(\tau_0, \xi, t_1, \xi_1; \ldots; t_r, \xi_r \mid \Omega^b) = P(t_r, \xi_r \mid \Omega^b)$$

при любых $\tau_0, t_1, \ldots t_r, \xi, \xi_1, \ldots \xi_r, \Omega^b$.

2. Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ называется W-процессом, если приращения

$$\alpha(t_r) - \alpha(t_{r-1});\ \alpha(t_{r-1}) - \alpha(t_{r-2}), \ldots \alpha(t_2) - \alpha(t_1)$$

на непересекающихся интервалах $(t_1, t_2), \ldots (t_{r-1}, t_r)$ независимы в совокупности.

Имеет место следующее предложение.

Стохастически определенная динамическая система Σ, находящаяся под влиянием W-процесса, является системой без последействия (Гихман [10]).

А. Н. Колмогоровым [9, 11] показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий, плотности вероятностей перехода удовлетворяют следующим уравнениям (так называемым первому и второму уравнениям Колмогорова):

$$\frac{\partial f(\tau, \xi; t, x)}{\partial \tau} = -\sum_{i=1}^{m} a_i(\tau, \xi) \frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(\tau, \xi) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial f(\tau, \xi; t, x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(t, x) f) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (b_{ij}(t, x) f), \tag{25}$$

где

$$P(\tau, \xi, \Omega^{(t)}) = \int_{\Omega} f(\tau, \xi, t, x)\, dx,$$

dx — элемент объема в Φ,

$$a_i(t, \xi) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} M(x^i_{t+\Delta}(t, \xi) - \xi^i)\, \psi_S(x_{t+\Delta}(t, \xi)),$$

$$b_{ij}(t, \xi) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} M(x^i_{t+\Delta}(t, \xi) - \xi^i)(x^j_{t+\Delta}(t, \xi) - \xi^j)\, \psi_S(x_{t+\Delta}(t, \xi)),$$

$\psi_S(x)$ — характеристическая функция некоторой фиксированной сферы S с центром в точке ξ.

Нетрудно показать, что для диференциальных уравнений (1), в том случае когда возмущающий процесс является W-процессом, функции имеют непрерывные частные производные (последнее предполагалось ранее и будет предполагаться в дальнейшем без особых оговорок) и

$$M|\alpha(t+\Delta)-\alpha(t)|^{2k}=o(\Delta),$$

плотности вероятностей перехода существуют и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f(\tau,\xi;t,x)}{\partial\tau}=-\sum_{i=1}^{m}A^i(\tau,\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi_i}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}(\tau)\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_i\partial\xi_j},$$

$$\frac{\partial f(\tau,\xi;t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(A^i(t,x)f)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(b_{ij}(t)f),$$

где

$$b_{ij}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M(\alpha_i(t+\Delta)-\alpha_i(t))\cdot(\alpha_j(t+\Delta)-\alpha_j(t)).$$

§ 2. Обозначим через C^c множество ограниченных и непрерывных функций, принимающих числовые значения, каждая из которых определена на некотором Φ^n, где n — любое целое число.

Пусть число μ пробегает некоторое множество значений $\{\mu\}$ и a предельная точка этого множества.

Будем называть стохастически определенную систему

$$\Sigma_\mu\{X_t(\tau,\xi;\mu)\},$$

зависящую от параметра μ, стохастически непрерывной в точке $\mu=a$, если для всякой функции f из C^c

$$\lim_{\mu\to a}Mf[X_{t_1}(\tau,\xi;\mu),\ldots,X_{t_n}(\tau,\xi;\mu)]=Mf[X_{t_1}(\tau,\xi;a),\ldots,X_{t_n}(\tau,\xi;a)]$$

при любых $t_1<t_2<\ldots<t_n \quad (t_1>\tau)$.

В этом случае будем также говорить, что система Σ_μ стохастически стремится к системе Σ_a.

Определение стохастической непрерывности, как известно, эквивалентно сходимости в основном функций распределения вероятностей перехода системы Σ_μ к соответствующим функциям распределения системы Σ_a.

Если, в частности, определены вероятности перехода для составной системы $\Sigma_a\times\Sigma_\mu$, так что имеет смысл говорить, например, о вероятности соотношений типа

$$|X_t(\tau,\xi;\mu)-X_t(\tau,\xi;a)|>k,$$

то из сходимости по вероятности систем Σ_μ к системе Σ_a следует стохастическая сходимость в смысле данного определения.

Установим теперь условия, обеспечивающие стохастическую непрерывность систем, определяемых диференциальными уравнениями рассматриваемого ранее типа.

Прежде всего рассмотрим тот случай, когда от параметра μ зависит только случайный процесс, возмущающий систему Σ_μ.

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d[x_\mu(t)-\alpha_\mu(t)]}{dt}=A(t, x), \tag{1}$$

где $\alpha_\mu(t)$ случайные функции процесса $\{\Gamma^c, P_\mu\}$, причем процессы $\{\Gamma^c, P_\mu\}$ и функция $A(t, x)$ удовлетворяют условиям леммы 2.

Заметим, что определение стохастической сходимости можно применить к случайным процессам. В этом случае оно означает, что

$$\lim_{\mu\to a} Mf[\alpha_\mu(t_1)-\alpha_\mu(t_0),\ldots,\alpha_\mu(t_n)-\alpha_\mu(t_{n-1})]=$$
$$=Mf[\alpha_a(t_1)-\alpha_a(t_0),\ldots,\alpha_a(t_n)-\alpha_a(t_{n-1})]$$

для произвольной функции из C^c.

Теорема 1. Предположим, что $A(t, x)$ принадлежит классу $K[\chi(x)]$, случайные процессы $\{\Gamma^c, P_\mu\}$ — φ_μ-ограничены и условия леммы 2 выполняются равномерно относительно μ, то есть

$$\varphi_\mu(\lambda)\geqslant\varphi_a(\lambda)=\lambda^k \qquad (k>1)$$
$$\chi^l[s\chi(4\lambda)]\leqslant\varphi_a(\lambda)$$

$M|\alpha_\mu(t+\Delta)-\alpha_\mu(t)|^{2k}\to 0$ при $\Delta\to 0$ равномерно относительно μ. Тогда, если при $\mu\to a$ случайные процессы $\{\Gamma^c, P_\mu\}$ стохастически сходятся к $\{\Gamma^c, P_a\}$, то системы $X_t(\mu)$ стохастически сходятся к $X_t(a)$.

При доказательстве будем пользоваться обозначениями, принятыми при доказательстве леммы 2.

Заметим прежде всего, что в силу леммы 2 при каждом μ системы $\Sigma_\mu^N\{Y_t^N(\mu)\}$ сходятся по вероятности к $\Sigma_\mu\{X_t(\tau, \xi, \mu)\}$ и, следовательно, стохастически сходятся к Σ_μ.

Так как $Y_t^N(\mu)$ являются непрерывными функциями конечного числа разностей $\alpha_\mu(t_k)-\alpha_\mu(t_{k-1})$, то из стохастической сходимости процессов $\{\Gamma^c, P_\mu\}$ к процессу $\{\Gamma^c, P_a\}$ следует стохастическая сходимость функций $Y_t^N(\mu)$ к функциям $Y_t^N(a)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой функции $f\in C^c$ величина

$$M|f[X_{t_k}(\tau, \xi; \mu)]-f[Y_{t_k}^N(\tau, \xi; \mu)]|$$

может быть сделана сколь угодно малой, равномерно относительно μ.

Возьмем в Φ^n сферу радиуса R с центром в начале координат такую, что вероятность каждой из систем величин $\{X_{t_k}(\tau, \xi; \mu)\}$, $\{Y_{t_k}^N(\tau, \xi; \mu)\}$ быть вне этой сферы меньше $\frac{\varepsilon}{18L}$, где L верхняя грань значений функций f. Так как

$$P\left\{\sum_k\left|Y_{t_k}^N\right|^2\geqslant R^2\right\}\leqslant\frac{M\sum\limits_k\left|Y_{t_k}^N\right|^2}{R^2},$$

и аналогично для $X_{t_k} = X_{t_k}(\tau, \xi; \mu)$, то, принимая во внимание, что из предположений теоремы и формулы (6) предыдущего параграфа следует равномерная ограниченность величин $M|X_{t_k}(\tau, \xi; \mu)|^2$, $M|Y_{t_k}^N(\tau, \xi; \mu)|^2$, такая сфера существует. Построим теперь ограниченную функцию $\bar{f}(x_1 \ldots x_n)$, $|\bar{f}| < 2L$, имеющую ограниченные в Φ^n частные производные по всем своим nm независимым переменным и отличающуюся от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в сфере радиуса R менее чем на $\frac{\varepsilon}{6}$. Тогда

$$M|f[X_{t_k}] - f[Y_{t_k}^N]| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 3L\left\{P\left(\sum_k |X_{t_k}|^2 \geqslant R^2\right) + \right.$$

$$\left. + P\left(\sum_k |Y_{t_k}^N|^2 \geqslant R^2\right)\right\} + CM\left\{\sum_k |X_{t_k} - Y_{t_k}^N|^2\right\}.$$

В силу оценок леммы 2, $M\left[\sum_k |X_{t_k} - Y_{t_k}^N|^2\right]$ равномерно относительно μ стремится к нулю при $N \to \infty$. Если выбрать теперь N таким, чтобы

$$CM\sum_k |X_{t_k} - Y_{t_k}^N|^2 < \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$M|f[X_{t_k}] - f[Y_{t_k}^N]| < \varepsilon$$

для всех μ, и теорема тем самым доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения

$$\frac{d(x_\mu - u)}{dt} = A_\mu(t, x_\mu), \tag{2}$$

в котором от параметра μ зависит „регулярная“ часть уравнения.

Предположим, что

$$\lim_{\mu \to 0} \int_t^{t+\Delta} A_\mu(\tau, x)\, d\tau = \int_t^{t+\Delta} A_0(\tau, x)\, d\tau \tag{3}$$

при любом x и положительных t, Δ.

Обозначим

$$B_\mu(t, \Delta, x) = \int_t^{t+\Delta} [A_\mu(\tau, x) - A_0(\tau, x)]\, d\tau. \tag{4}$$

Имеет место следующая

Теорема II. Если выполнены условия

1. Случайный процесс $\{\Gamma^\epsilon, P\}$ $\varphi(\lambda)$-ограничен, $\varphi(\lambda) \geqslant \lambda^k$ $(k>1)$.

2. $A_\mu(t, x) \in K[\chi]$, где $\chi^l[s\chi(4\lambda)] \leqslant \varphi(\lambda)$, χ — не зависит от μ.

3. Полуограниченные сверху функции $A_\mu(t, x)$ удовлетворяют неравенству

$$(A_\mu(t, x) - A_\mu(t, y), x-y) \leqslant C(x-y, x-y)$$

с константой C, не зависящей от μ.

4. $|B_\mu(t, \tau, \Delta)|^2 \leqslant \psi^2(\mu)\chi(|x|^2)$, где $\psi(\mu) \to 0$ при $\mu \to a$ то система $X_\mu(t)$, определяемая уравнением (2), стохастически непрерывна при $\mu = a$.

Будет доказано больше, именно, при любом $t>0$

$$\lim_{\mu \to a} M|x_\mu(t) - x_a(t)|^2 = 0.$$

Из соотношения

$$\frac{d[x_\mu - x_a]}{dt} = A_\mu(t, x_\mu) - A_a(t, x_a)$$

следует

$$\frac{1}{2}|x_\mu(t+\tau) - x_a(t+\tau)|^2 = \frac{1}{2}|x_\mu(t) - x_a(t)|^2 +$$

$$+ \int_t^{t+\tau} (x_\mu(\theta) - x_a(\theta);\ A_\mu(\theta, x_\mu(\theta)) - A_a(\theta, x_a(\theta))\, d\theta.$$

Положим

$$\delta(t) = M|x_\mu(t) - x_a(t)|^2. \tag{5}$$

Тогда

$$\delta(t+\tau) = \delta(t) + 2\int_t^{t+\tau} M(x_\mu(\theta) - x_a(\theta);\ \ A_\mu[\theta, x_\mu(\theta)] - A_a[\theta, x_a(\theta)])\, d\theta.$$

Оценивая интеграл в правой части равенства, после некоторых вычислений получим:

$$\delta(t+\tau) \leqslant (1 + C\tau)\delta(t) + 2\sqrt{\delta(t)}\left\{\int_t^{t+\tau}\left[M|A_\mu(\theta, x_\mu(\theta)) - A_\mu(\theta, x_\mu(t))|^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta +\right.$$

$$\left. + \left[M|B_\mu(t, \tau, x_\mu(t))|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} + 2\int_t^{t+\tau}\left[M|A_\mu(\theta, x_\mu(\theta)) -\right.$$

$$\left. - A_a(\theta, x_a(\theta))|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\left[M|x_\mu(\theta) - x_\mu(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[M|x_a(\theta) - x_a(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} d\theta,$$

$$M|A_\mu(\theta, x_\mu(\theta)) - A_\mu(\theta, x_\mu(t))|^2 \leqslant m^s[M|x_\mu(\theta) - x_\mu(t)|^{2k}]^{\frac{1}{k}}\left[M\left|\frac{d\tilde{A}}{dx}\right|^{2l}\right]^{\frac{1}{l}}.$$

В силу предположения 2 и оценок, аналогичных полученным в лемме 2, величина $M\left|\frac{d\breve{A}}{dx}\right|^{2l}$ равномерно ограничена.

Из оценки (6) леммы 1 следует, что

$$M|x_\mu(\theta)-x_\mu(t)|^{2k}$$

равномерно стремится к нулю, одновременно с $\theta-t$.
Положим

$$\eta^{2k}(\theta-t)\geqslant M|x_\mu(\theta)-x_\mu(t)|^{2k}, \tag{6}$$

где $\eta(\theta)$ неотрицательная монотонно возрастающая функция, непрерывная и равная нулю в точке $\theta=0$.

В силу условия 4 теоремы $M|B_\mu(t,\tau,x_\mu(t))|^2\leqslant K\psi^2(\mu)$, где константа K не зависит от μ.

Таким образом,

$$\delta(t+\tau)\leqslant(1+C\tau)\delta(t)+C\sqrt{\delta(t)}\left\{\int\limits_t^{t+\tau}\eta(\theta-t)\,d\theta+\psi(\mu)\right\}+C\int\limits_t^{t+\tau}\eta^k(\theta-t)\,d\theta.$$

Пусть

$$t_{k+1}=t_k+\Delta,\quad t_0=0,\quad \delta(t_k)=\delta_k.$$

Тогда

$$\delta_{k+1}\leqslant[1+C(\Delta+\psi(\mu))]\delta_k+C\{\Delta[\eta^k(\Delta)+\eta(\Delta)]+\psi(\mu)\}. \tag{7}$$

Выберем μ таким, чтобы

$$\psi(\mu)\leqslant\Delta\eta(\Delta). \tag{7!}$$

Тогда

$$\delta_{k+1}\leqslant(1+C\Delta)\delta_k+C\Delta\eta(\Delta) \tag{7'}$$

(в произведенных выкладках C обозначает константу, которая, однако, в разных частях неравенств может принимать разные значения).

Из неравенства (7!) следует

$$\delta_k\leqslant(1+C\Delta)^k\eta(\Delta).$$

Следовательно, величина $\delta(t)$ на любом конечном интервале времени может быть сделана, при надлежащем выборе μ, равномерно сколь угодно малой. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 легко объединяются в следующую теорему:

Теорема 3. Пусть в уравнении

$$\frac{d[x_\mu(t)-\alpha_\mu(t)]}{dt}=A_\mu(t,x) \tag{8}$$

случайные процессы $\{\Gamma^c, P_\mu\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а функции $A_\mu(t,x)$ условиям теоремы 2, где вместо $\varphi(\mu)$ положено $\varphi_a(\mu)$.

Тогда, при $\mu \to a$ система Σ_μ, определяемая уравнением (8), стохастически стремится к системе Σ_a.

§ 3. Предыдущие теоремы сводят задачу моделирования последовательности случайных систем, управляемых уравнениями рассматриваемого типа и сходящихся к системе без последействия, к моделированию последовательности случайных процессов, сходящихся к W-процессу.

Одной из возможностей в решении последней задачи является рассмотрение сумм независимых случайных процессов.

Предположим, что функции случайного процесса $\{\Gamma^c_\mu, P_\mu\}$ представимы в виде

$$\alpha_\mu(t+\tau) - \alpha_\mu(t) = \sum_{n=1}^{N_\mu} a_{n\mu}(t+\tau) - a_{n\mu}(t), \tag{1}$$

где $a_{n\mu}(t)$ случайные функции процессов $\{\Gamma^c_{n\mu}, P_{n\mu}\}$, независимых в своей совокупности, приращения которых имеют моменты первых двух порядков, причем

$$M[a_{n\mu}(t+\tau) - a_{n\mu}(t)] = 0.$$

Введем обозначения

$$b^{rs}_{n\mu}(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2) = M[a^r_{n\mu}(t_1+\tau_1) - a^r_{n\mu}(t_1)]\,\overline{[a^s_{n\mu}(t_2+\tau_2) - a^s_{n\mu}(t_2)]},$$

$$B^{rs}_\mu(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2) = \sum_{n=1}^{N_\mu} b^{rs}_{n\mu}(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2) =$$

$$= M[\alpha^r_\mu(t_1+\tau_1) - \alpha^r_\mu(t_1)]\,\overline{[\alpha^s_\mu(t_2+\tau_2) - \alpha^s_\mu(t_2)]},$$

$$b^{rs}_{n\mu}(t, \tau) = b^{rs}_{n\mu}(t, \tau;\ t, \tau), \quad B^{rs}_\mu(t, \tau) = B^{rs}_\mu(t, \tau;\ t, \tau).$$

Допустим, далее, что при $\mu \to 0$, $N_\mu \to \infty$ и к суммам (1) применима теорема Бернштейна о нормальной корреляции. Тогда, для того чтобы предельный случайный процесс $\{\Gamma^c_0, P_0\}$ был W-процессом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$B^{rs}(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2) = 0,$$

где $B^{rs} = \lim\limits_{\mu \to 0} B^{rs}_\mu$, для любой пары непересекающихся интервалов $(t_1, t_1+\tau_1)$, $(t_2, t_2+\tau_2)$.

Пусть $f_{n\mu}(t)$ — функции стационарного в смысле Хинчина случайного процесса, зависящего от двух индексов n и μ, $n=1, 2, \ldots, N_\mu$, независимых в совокупности по n при фиксированном μ и

$$Mf_{n\mu}(t) = 0, \quad M|f_{n\mu}(t)|^2 < \infty,$$

$$M|f_{n\mu}(t+\Delta) - f_{n\mu}(t)|^2 \to 0 \text{ при } \Delta \to 0. \tag{2}$$

Положим

$$a_{n\mu}(t+\tau)-a_{n\mu}(t)=\int_{t}^{t+\tau}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}f_{n\mu}\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta, \tag{3}$$

где ε — некоторый положительный параметр.

Соотношение (2) обеспечивает существование интеграла (3) в смысле сходимости интегральных сумм в среднем к определенному пределу.

Если

$$R^{rs}_{n\mu}(\tau)=Ma^{r}_{n\mu}(t+\tau)\,\overline{a^{s}_{n\mu}(t)},$$

то

$$R^{rs}_{n\mu}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\nu}\,dF^{rs}_{n\mu}(\nu),$$

где $\{F^{rs}_{n\mu}(\nu_2)-F^{rs}_{n\mu}(\nu_1)\}$ при любых $\nu_2,\ \nu_1,\ \nu_2>\nu_1,$ неотрицательная эрмитовская матрица.

Тогда

$$B^{rs}_{\mu}(t_1,\ \tau_1;\ t_2,\ \tau_2)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+\tau_1}\int_{t_2}^{t_2+\tau_2}\sum_{n=1}^{N_\mu}R^{rs}_{n\mu}(t-\theta)\,dt\,d\theta=$$

$$=\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t_1+\tau_1)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{it_1\frac{\nu}{\varepsilon}}}{i\nu}\,\frac{e^{-i(t_2+\tau_2)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{-it_2\frac{\nu}{\varepsilon}}}{-i\nu}\,d\Phi^{rs}_{\mu}(\nu), \tag{4}$$

$$\Phi^{rs}_{\mu}(\nu)=\sum_{n=1}^{N_\mu}F^{rs}_{n\mu}(\nu).$$

Сделаем следующее предположение:

А. Для некоторого $A>0$ интегралы

$$\int_{|\nu|>A}\frac{|d\Phi^{rs}_{\mu}(\nu)|}{\nu^2},\quad \int_{|\nu|\leq A}|d\Phi^{rs}_{\mu}(\nu)| \tag{5}$$

равномерно ограничены (относительно μ) и первый из них сходится равномерно.

Рассмотрим два случая:

1-й случай

В$_1$. $\varepsilon=1$ и при $\mu\to 0$ $\Phi^{rs}_{\mu}(\nu_2)-\Phi^{rs}_{\mu}(\nu_1)\to I^{rs}(\nu_2-\nu_1)$, то есть спектральная матрица $\Phi^{rs}_{\mu}(\nu)$ в пределе имеет постоянную интенсивность.

В этом случае

$$B^{rs}(t_1,\ \tau_1;\ t_2,\ \tau_2)=I^{rs}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t_1+\tau_1)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{it_1\frac{\nu}{\varepsilon}}}{i\nu}\,\frac{e^{-i(t_2+\tau_2)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{-it_2\frac{\nu}{\varepsilon}}}{-i\nu}\,d\nu, \tag{6}$$

что равно 0, если интервалы $(t_1,\ t_1+\tau_1)$, $(t_2,\ t_2+\tau_2)$ не пересекаются.

Таким образом, в этом случае суммы независимых случайных процессов стремятся к W-процессу.

2-й случай.

В$_2$. 1) при $\mu\to 0$ также и $\varepsilon\to 0$,

2) функции $\Phi_\mu^{rs}(\nu)$ непрерывно диференцируемы при $\nu=0$ в следующем смысле:

$$\Phi_\mu^{rs}(\nu)-\Phi_\mu^{rs}(0)=I^{rs}\nu+\nu\psi_\mu^{rs}(\nu), \tag{7}$$

где I^{rs} константы, $\psi_\mu^{rs}(\nu)\to 0$, когда μ, $\nu\to 0$, и являются функциями ограниченной вариации в окрестности точки $\nu=0$ и полная вариация этих функций на интервале $(-\delta, \delta)$ также стремится к нулю при $\mu\to 0$, $\delta\to 0$.

Разобьем интеграл, стоящий в правой части равенства (4), на четыре интеграла, соответствующих областям интегрирования $|\nu|\geqslant A$, $\sqrt[4]{\varepsilon}\leqslant|\nu|<A$, $\sqrt{\varepsilon}\leqslant|\nu|<\sqrt[4]{\varepsilon}$, $|\nu|<\sqrt{\varepsilon}$. Обозначим эти интегралы соответственно через I_1, I_2, I_3, I_4.

В силу условия А I_1, I_2 стремятся к 0, когда $\varepsilon\to 0$:

$$|I_1|\leqslant 4\varepsilon\int\limits_{|\nu|>A}\frac{|d\Phi_\mu^{rs}(\nu)|}{\nu^2}$$

$$|I_2|\leqslant\varepsilon\int\limits_{\sqrt[4]{\varepsilon}\leqslant|\nu|<A}\frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}|d\Phi_\mu^{rs}(\nu)|\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\int\limits_{|\nu|<A}|d\Phi_\mu^{rs}(\nu)|.$$

Интеграл I_3 легко оценивается следующим образом:

$$|I_3|\leqslant\varepsilon\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}\leqslant|\nu|<\sqrt[4]{\varepsilon}}\frac{2}{|i\nu|}\cdot\frac{2}{|i\nu|}|d\Phi_\mu^{rs}(\nu)|\leqslant 4\int\limits_{|\nu|<\sqrt[4]{\varepsilon}}|d\Phi_\mu^{rs}(\nu)|,$$

что в силу (7) также стремится к 0 при $\mu\to 0$.

Переходим к оценке последнего интеграла. Он равен

$$I_4=\varepsilon\int\limits_{|\nu|<\sqrt{\varepsilon}}\frac{e^{i(t_1+\tau_1)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{it_1\frac{\nu}{\varepsilon}}}{i\nu}\,\frac{e^{-i(t_2+\tau_2)\frac{\nu}{\varepsilon}}-e^{-it_2\frac{\nu}{\varepsilon}}}{-i\nu}\{I^{rs}d\nu+\psi_\mu(\nu)\,d\nu+\nu\,d\psi_\mu(\nu)\}=$$

$$=I_4'+I_4''+I_4'''.$$

Что касается первого из этих интегралов, то при $\varepsilon\to 0$

$$I_4'\to I^{rs}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t_1+\tau_1)\nu}-e^{it_1\nu}}{i\nu}\cdot\frac{e^{-i(t_2+\tau_2)\nu}-e^{-it_2\nu}}{-i\nu}\,d\nu.$$

Далее

$$|I_4''| \leqslant \sup_{|\nu|<\sqrt{\varepsilon}} |\psi_\mu(\nu)| \int\limits_{|\nu|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{(1-\cos\nu\tau_1)(1-\cos\nu\tau_2)}}{\nu^2} d\nu \to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0$$

$$|I_4'''| \leqslant \int\limits_{|\nu|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{(1-\cos\nu\tau_1)(1-\cos\nu\tau_2)}}{\nu^2} |\nu|\,|d\psi_\mu(\varepsilon\nu)| \leqslant C \int\limits_{|\nu|<\sqrt{\varepsilon}} |d\psi_\mu(\nu)|,$$

что в силу сделанных предположений также $\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, и во втором случае

$$B^{rs}(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2)$$

определяется формулой (6) и предельный случайный процесс будет W-процессом.

Резюмируя полученные результаты, можно сказать, что интегралы от сумм независимых стационарных процессов

$$\int\limits_t^{t+\tau} \sum_{n=1}^{N_\mu} f_{n\mu}(\theta)\, d\theta \tag{8}$$

при условиях, обеспечивающих применение теоремы о нормальной корреляции и еще некоторых других, стремятся к W-процессу, если сумма спектральных матриц соответствующих стационарных процессов в пределе имеет постоянную интенсивность.

Если же рассматривать те же интегралы, распространенные на неограниченно увеличивающиеся интервалы времени $\left(\text{порядка } \frac{1}{\varepsilon}\right)$, и нормировать их умножением на $\sqrt{\varepsilon}$, то в пределе $(\mu,\ \varepsilon\to 0)$ также получаем W-процесс, если только сумма спектральных матриц имеет, в известном смысле (B_2), непрерывную спектральную интенсивность в точке $\nu=0$.

§ 4. Рассмотрим несколько схем, к которым можно применить предыдущие результаты.

1. Движение системы Σ_ε в быстропеременном поле сил при наличии случайных возмущений можно определить уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\frac{t}{\varepsilon},\ x\right) + f(\varepsilon, t), \tag{1}$$

где ε — параметр, характеризующий быстроту изменения со временем „регулярного“ поля сил $A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)$, а $f(\varepsilon, t)$ функции некоторого случайного процесса, также зависящего от параметра ε.

Пусть существует среднее по времени

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t,x)\,dt = a(x);$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} A\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\, x\right) d\tau = (t_2-t_1)\,a(x).$$

Если, далее, предположить, что случайные процессы, характеризуемые функциями

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varepsilon,\tau)\,d\tau,$$

при $\varepsilon\to 0$ стремятся к некоторому предельному процессу, случайные функции которого обозначим через $\alpha(t)$, и, кроме того, выполнены остальные предположения теоремы 3, то при $\varepsilon\to 0$ система, определяемая уравнением (1), стохастически стремится к системе определяемой уравнением

$$\frac{d(x-\alpha)}{dt} = a(x).$$

Таким образом, при движении системы в быстропеременном поле мы имеем право, в смысле предельного перехода, заменить быстропеременные внешние силы их осредненными значениями по времени.

Если, в частности, функции $f(\varepsilon, t)$ имеют вид, рассмотренный в § 3

$$f(\varepsilon, t) = \psi(\varepsilon)\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} f_{n\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

то при $\psi(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ стохастический предел системы Σ_ε будет системой без последействия. Если же $\sqrt{\varepsilon}\,\psi(\varepsilon)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$, то в пределе влияние случайных внешних быстропеременных сил аннулируется и предельная система определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a(x).$$

2. Предположим теперь, что на вполне определенное „регулярное" поле сил $A(t, x)$ накладывается некоторое быстропеременное случайное возмущение $f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, то есть примем уравнения движения в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) + f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{2}$$

Если существует $M|f(t)|^2$, равномерно ограниченное по t, то $M\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt\right|^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, случайные процессы $\int\limits_{t}^{t+\tau} f\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta$ сходятся к 0. Таким образом, если $A(t, x)$ удовлетворяют условиям применимости теоремы 1, то при $\varepsilon \to 0$ уравнение (2) стохастически эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x), \tag{3}$$

то есть эффект действия быстропеременных случайных возмущений аннулируется.

В исследовании уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ можно, однако, пойти еще дальше.

Предположим, что случайный процесс $f(t) = f_\varepsilon(t)$ является суммой неограниченно увеличивающегося числа стационарных, независимых в совокупности случайных процессов и выполнены все предположения 2-го случая § 3.

Пусть $y(t)$ решение уравнения (3), принимающее при $t=0$ заданное начальное значение. Рассмотрим отклонение решения уравнения (2) от решения уравнения (3) при малых ε.

Положим

$$\zeta(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \zeta(0) = 0.$$

Тогда

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial A[t, y(t)]}{\partial x}\zeta + R, \tag{4}$$

где $\frac{\partial A}{\partial x}$ обозначает матрицу, элементы которой $a_{ij} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}$, и

$$R = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^1 \frac{1-\theta}{2} \sum \frac{\partial^2 A(t, y(t) + \theta\sqrt{\varepsilon}\zeta)}{\partial x^i \partial x^j}\zeta^i\zeta^j\, d\theta.$$

Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R = 0$, то к уравнению (4) можно применить теорему 3, если только выполнены остальные предположения этой теоремы, относящиеся к порядку возрастания функции $A(t, x)$ и ее производных. В этом случае величина ζ в пределе определяется линейным диференциальным уравнением

$$\frac{d(\zeta - \alpha)}{dt} = \frac{\partial A[t, y(t)]}{\partial x}\zeta, \tag{5}$$

где α — функции W-процесса, и, следовательно, определяет систему без последействия.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$x(t) = y(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta(t),$$

где $y(t)$ решение невозмущенного уравнения (3), $\zeta(t)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к системе без последействия, управляемой уравнением (5).

3. Возвратимся к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\frac{t}{\varepsilon},\, x\right) + f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

сохраняя предположения п. п. 1—2.

При $\varepsilon \to 0$ определяемая этим уравнением система стохастически стремится к системе, определяемой уравнением

$$\frac{dy}{dt} = a(y),$$

где

$$a(y) = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T A(t, y)\, dt.$$

Величина

$$\zeta(t) = \frac{x(t) - y(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{7}$$

в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{A\left(\frac{t}{\varepsilon},\, y(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta\right) - a(y(t))\right\}.$$

Ограничимся случаем, когда $A(t, x)$ является суммой конечного числа периодических по t функций:

$$A(t, x) = \sum_{r=1}^{P} A_r(t, x),$$

$$A_r(t, x) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_{rm}(x)\, e^{i\lambda_r m t}.$$

Тогда

$$a(y) = \sum_{r=1}^{P} b_{r0}(y),$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{a(y + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta) - a(y)\right\} + R, \tag{8}$$

где

$$R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{A\left(\frac{t}{\varepsilon},\, y(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta\right) - a(y(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{r=1}^{P} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \, b_{rm}(y + \sqrt{\varepsilon}\,\zeta)\, e^{i\lambda_r m \frac{t}{\varepsilon}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t_1}^{t_2} b_{rm}(y+\sqrt{\varepsilon}\zeta)\, e^{i\lambda_r m \frac{t}{\varepsilon}}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\lambda_r m \frac{t}{\varepsilon}}}{i\lambda_r m} b_{rm}(y+\sqrt{\varepsilon}\zeta)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{i\lambda_r m}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial b_{rm}(y+\sqrt{\varepsilon}\zeta)}{\partial x}\, a(y)\, e^{i\lambda_r m \frac{t}{\varepsilon}}\, dt,$$

получим

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} R\, dt\right| \leqslant C\varepsilon \left[\sum_{r=1}^{P} \frac{1}{\lambda_r^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda_r}} A_r^2(\theta,\, y+\sqrt{\varepsilon}\zeta)\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{(t_2-t_1)}{\lambda_r^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda_r}} \left|\frac{\partial A_{rm}(\theta,\, y+\sqrt{\varepsilon}\zeta)}{\partial x}\right|^2 d\theta\right],$$

где C — некоторая константа. Таким образом и в рассматриваемом случае имеется возможность применить к уравнению (8) теорему 3, наложив на $A(t, x)$, $a(y)$ соответствующие ограничения, относящиеся к порядку возрастания этих функций.

Функции $\zeta(t)$ в пределе опять определяют систему без последействия, управляемую уравнением

$$\frac{d(\zeta-\alpha)}{dt} = \frac{\partial a\,[y(t)]}{\partial x}\zeta,$$

а решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = y(t) + \sqrt{\varepsilon}\zeta(t).$$

4. К предыдущим случаям сводятся уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[A(x) + f(t)],$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t, x) + \sqrt{\varepsilon} f(t),$$

характеризующие движение систем под влиянием слабых сил. Достаточно сделать подстановку $\tau = \varepsilon t$, после которой уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A(x) + f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \\ \frac{dx}{d\tau} &= A\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\ x\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, при предыдущих предположениях относительно случайных функций $f(t)$ и „регулярных" функций $A(t, x)$, решения уравнений (9) на интервалах времени порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ ведут себя, во втором случае, как случайные функции процесса без последействия, а в первом отличаются от решения невозмущенного уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = A(x)$$

на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}\zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ снова случайная функция процесса без последействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ (1936).
2. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ (1947).
3. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов, Про рівняння Фоккера-Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана, Зап. кафедри мат. фізики АН УССР, т. 4.
4. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов, Застосування методів нелінійної механіки для дослідження впливу флюктуацій на коливні системи.
5. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР (1946).
6. Doob, Annales of Mathematics, Vol. 43, № 2 (1942).
7. Ю. Крутков, Исследования по теории брауновского движения, Сб. Энштейн и Смолуховский, Брауновское движение.
8. С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, ОГИЗ (1946).
9. А. Н. Колмогоров, Аналитические методы в теории вероятностей, Успехи матем. наук, вып. 5 (1938).
10. И. И. Гихман, Об одной схеме образования случайных процессов, ДАН. 58 (1947).
11. А. Н. Колмогоров, Math. Ann., Bd. 108.

Поступило 1. III 1950.