1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов

М. А. Красносельский

В работах, связанных с изучением нелинейных интегральных уравнений, устанавливались достаточные условия [1, 2, 3] непрерывности и полной непрерывности в конкретных функциональных пространствах различных нелинейных операторов.

В настоящей статье мы изучаем оператор $\mathfrak{f}$, заданный равенством

$$\mathfrak{f}u(x) = f[x, u(x)]$$

в пространстве L_2 функций с суммируемым квадратом, с множеством значений в пространстве L_p функций с суммируемой p-ой степенью $(p \geqslant 1)$.

Устанавливаемые необходимые и достаточные признаки непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ позволяют исследовать нелинейные интегральные операторы типа Гаммерштейна.

§ 1. Оператор $\mathfrak{f}$

1°. Пусть G — ограниченное множество конечномерного эвклидова пространства. Каждая вещественная функция $f(x, u)$ двух переменных $x \in G$, $-\infty < u < \infty$ порождает в множестве вещественных функций на G оператор, который мы будем обозначать через $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}u(x) = f[x, u(x)] \qquad (x \in G).$$

Лемма 1. (В. В. Немыцкий). *Пусть $f(x, u)$ непрерывна по u*[1]). *Тогда оператор $\mathfrak{f}$ преобразует каждую сходящуюся по мере последовательность функций*

$$u_1(x),\ u_2(x), \ldots \qquad (x \in G) \tag{1,1}$$

в последовательность, также сходящуюся по мере.

Доказательство. Пусть последовательность (1,1) сходится по мере к функции $u_0(x)$.

---

1) Здесь, как и всюду в дальнейшем, подразумевается, кроме этого, что все множества, встречающиеся в доказательствах, измеримы.

Пусть ε — заданное положительное число. Обозначим через E_k ($k=1, 2, \ldots$) множество тех $x \in G$, для которых из неравенства

$$|u_0(x) - u| < \frac{1}{k}$$

следует

$$|f[x, u_0(x)] - f(x, u)| < \varepsilon.$$

Очевидно,

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset \ldots$$

Из условий леммы вытекает, что каждая точка $x \in G$ принадлежит, начиная с некоторого, всем E_k. Таким образом,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = G,$$

откуда следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} E_k = \operatorname{mes} G. \tag{1,2}$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$f[x, u_1(x)], \quad f[x, u_2(x)], \ldots (x \in G).$$

Пусть задано число $\eta > 0$. Выберем число k_0 так, чтобы

$$\operatorname{mes} E_{k_0} > \operatorname{mes} G - \frac{\eta}{2},$$

это возможно в силу (1,2). Обозначим через $E(n)$ множество тех точек $x \in G$, для которых

$$|u_0(x) - u_n(x)| < \frac{1}{k_0}.$$

Выберем теперь такое N, что для всех $n > N$

$$\operatorname{mes} E(n) > \operatorname{mes} G - \frac{\eta}{2}.$$

Через $P(n)$ обозначим множество точек $x \in G$, для которых

$$|f[x, u_0(x)] - f[x, u_n(x)]| < \varepsilon.$$

Очевидно,

$$P(n) \supset [E_{k_0} \cap E(n)],$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mes} P(n) > \operatorname{mes} G - \eta \qquad (n > N).$$

Так как ε и η произвольны, то последним неравенством лемма доказана.

Отметим, что утверждение леммы остается справедливым, если $f(x, u)$ непрерывна по u при всех $x \in G$, за исключением, возможно, множества $F \subset G$ меры нуль.

Утверждение доказанной леммы для сходящихся в среднем квадратичном последовательностей функций содержится в доказательстве леммы 2 статьи В. В. Немыцкого [1]. Мы привели доказательство В. В. Немыцкого почти без изменений, освободив его только от некоторых частей.

2°. Пусть теперь оператор $\mathfrak{f}$, определенный функцией $f(x, u)$, действует на функциях с суммируемым квадратом на G — из пространства L_2.

Лемма 2. *Пусть некоторая функция $u_0(x) \in L_2$ обладает тем свойством, что для каждой последовательности*

$$u_1(x),\ u_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2 к $u_0(x)$, последовательность функций

$$|f[x, u_1(x)]|^p, \quad |f[x, u_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G)$$

имеет на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы[1].

Тогда для любой последовательности

$$v_1(x), \quad v_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2 к некоторой функции $v_0(x)$, последовательность

$$|f[x, v_1(x)]|^p, \quad |f[x, v_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G)$$

также будет иметь на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Доказательство. Предполагая, что утверждение леммы неверно, допустим, что для некоторого положительного числа α и для любых $\delta > 0$ и целого N можно указать такое множество $\mathcal{E}(\delta)$ и такое число $n(\delta) > N$, что

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}(\delta) < \delta,$$

но

$$\int\limits_{\mathcal{E}(\delta)} |f[x, v_{n(\delta)}(x)]|^p \, dx > \alpha.$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — убывающая к нулю последовательность положительных чисел; пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ — такая последовательность множеств $\subset G$, что

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}_k > \alpha; \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

---

[1]) Говорят, что семейство $\mathfrak{M}$ функций на G имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, если любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что из

$$\operatorname{mes} Q < \delta,$$

где Q — произвольное множество $\subset G$, следует для всех функций $u(x)$ семейства $\mathfrak{M}$, что

$$\int\limits_Q |u(x)| \, dx < \varepsilon.$$

пусть $n_1, n_2, \ldots$ — такая последовательность возрастающих целых чисел, что

$$\int\limits_{\mathcal{E}_k} |f[x, v_{n_k}(x)]|^p \, dx > \alpha \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1,3}$$

Обозначим через $w_k(x)$ функцию, принимающую на $\mathcal{E}_k$ значения функции $v_{n_k}(x)$, а на $G-\mathcal{E}_k$ — значения функции $u_0(x)$.

Последовательность функций $w_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ сходится в L_2 к $u_0(x)$, так как

$$\int\limits_{G} |u_0(x) - w_k(x)|^2 \, dx = \int\limits_{\mathcal{E}_k} |u_0(x) - v_{n_k}(x)|^2 \, dx \leqslant 2 \int\limits_{\mathcal{E}_k} [u_0^2(x) + v_{n_k}^2(x)] \, dx,$$

а функции $v_{n_k}^2(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ имеют на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

В силу условия леммы тогда имеют на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы функции

$$|f[x, w_1(x)]|^p, \quad |f[x, w_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G),$$

откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathcal{E}_k} |f[x, v_{n_k}(x)]|^p \, dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathcal{E}_k} |f[x, w_k(x)]|^p \, dx = 0,$$

а это противоречит неравенствам (1,3).

Лемма доказана.

3°. Теорема 1. *Для того чтобы оператор* $\mathfrak{f}$, *определенный непрерывной по* u *функцией* $f(x, u)$, *был непрерывным оператором, действующим из* L_2 *в* L_p, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности*

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2 *к нулю, последовательность функций*

$$|f[x, u_1(x)]|^p, \quad |f[x, u_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G)$$

имела на G *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна, так как для каждой сходящейся в L_p последовательности функций

$$w_1(x), \quad w_2(x), \ldots \qquad (x \in G)$$

последовательность $|w_i(x)|^p$ $(i=1, 2, \ldots)$ имеет на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Докажем достаточность условия теоремы.

Пусть

$$v_1(x), \quad v_2(x), \ldots \qquad (x \in G) \tag{1,4}$$

сходящаяся к некоторой функции $v_0(x) \in L_2$ последовательность функций из L_2. В силу леммы 2 можно выбрать такое число η, что для всех множеств $Q \subset G$ меры $< \eta$

$$\int_Q |f[x, v_0(x)] - f[x, v_n(x)]|^p \, dx < \varepsilon \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, ибо

$$\left\{ \int_Q |f[x, v_0(x)] - f[x, v_n(x)]|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_Q |f[x, v_0(x)]|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_Q |f[x, v_n(x)]|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

а функции $|f[x, v_n(x)]|^p$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеют на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Так как последовательность (1,4) сходится по мере, то в силу леммы 1 последовательность функций

$$f[x, v_1(x)], \quad f[x, v_2(x)], \ldots \qquad (x \in G)$$

также сходится по мере к функции $f[x, v_0(x)]$.

Выберем число N так, чтобы мера множеств $P(n)$ $(n>N)$, состоящих из точек $x \in G$, для которых

$$|f[x, v_0(x)] - f[x, v_n(x)]| < \varepsilon,$$

была больше $\operatorname{mes} G - \eta$.

Тогда, при $n > N$,

$$\int_G |f[x, v_0(x)] - f[x, v_n(x)]|^p \, dx = \int_{P(n)} |\ldots|^p \, dx + \int_{G-P(n)} |\ldots|^p \, dx <$$

$$< \int_{P(n)} \varepsilon^p \, dx + \varepsilon \leqslant \varepsilon^p \operatorname{mes} G + \varepsilon.$$

Значит, оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен в точке $v_0(x)$ пространства L_2.

Теорема доказана.

4°. Теорема 1 позволяет сформулировать утверждение леммы 2 в более изящной форме.

Теорема 2. *Если оператор $\mathfrak{f}$, действующий из L_2 в L_p, непрерывен в одной точке пространства L_2, то он непрерывен во всем L_2.*

Будем говорить, что нелинейный оператор ограничен на некотором множестве, если нормы его значений на этом множестве равномерно ограничены.

Установим еще одно свойство оператора $\mathfrak{f}$.

Теорема 3. *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *ограничен на некотором шаре пространства* L_2.

Тогда оператор $\mathfrak{f}$ *ограничен на любом шаре пространства* L_2.

Доказательство. Пусть для всех таких $u(x) \in L_2$, что

$$\int_G |u_0(x) - u(x)|^2 \, dx \leqslant \varrho^2$$

(где ϱ — радиус, а $u_0(x)$ — центр шара, в котором оператор $\mathfrak{f}$ ограничен), выполняется неравенство

$$\int_G |f[x, u(x)]|^p \, dx \leqslant B^p.$$

Рассмотрим шар сколь угодно большого радиуса R с центром в точке $u_0(x)$ пространства L_2. Для любой функции $u(x) \in L_2$ из этого шара можно найти такое разбиение множества G на конечное число

$$s = \left[\frac{R^2}{\varrho^2} + 1\right]$$

(квадратные скобки означают здесь целую часть) частей

$$G_1, \ldots, G_s$$

таких, что

$$\int_{G_k} |u_0(x) - u(x)|^2 \, dx \leqslant \varrho^2. \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

Введем в рассмотрение функции

$$u_k(x) = \begin{cases} u(x) & x \in G_k \\ u_0(x) & x \in G - G_k \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, s).$$

Очевидно,

$$\|u_0(x) - u_k(x)\|^2 = \int_G |u_0(x) - u_k(x)|^2 \, dx = \int_{G_k} |u_0(x) - u(x)|^2 \, dx \leqslant \varrho^2,$$

следовательно,

$$\int_G |f[x, u_k(x)]|^p \, dx \leqslant B^p \qquad (k = 1, \ldots, s).$$

Тогда

$$\int_G |f[x, u(x)]|^p \, dx = \sum_{k=1}^{S} \int_{G_k} |f[x, u(x)]|^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{S} \int_G |f[x, u_k(x)]|^p \, dx \leqslant B^p \left[\frac{R^2}{\varrho^2} + 1\right]. \qquad (1,5)$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если оператор* $\mathfrak{f}$ *непрерывен в какой-либо точке пространства* L_2, *то он непрерывен и ограничен в каждом шаре пространства* L_2.

Приведенные свойства оператора $\mathfrak{f}$ вскрывают ненужность обычно делаемых оговорок о поведении оператора $\mathfrak{f}$ в некотором шаре пространства L_2 — общие свойства этого оператора определяются его локальными свойствами.

5°. Применение необходимых и достаточных условий непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ обычно неудобно. Мы приведем ниже несколько достаточных признаков непрерывности оператора $\mathfrak{f}$, действующего из пространства L_2 в L_p $(p \geqslant 1)$, почти очевидным образом вытекающих из теоремы 1.

Для случая $p = 2$ некоторые из этих достаточных условий были получены В. В. Немыцким [1] и М. М. Вайнбергом [2].

Признак А. Оператор $\mathfrak{f}$ *действует из* L_2 *в* L_p $(p \geqslant 1)$, *непрерывен и ограничен, если почти для всех* $x \in G$

$$|f(x, u)|^p \leqslant \sum_{i=1}^{m} S_i(x)\,|u|^{\alpha_i} \qquad (-\infty < u < \infty),$$

где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 2$, $S_i(x) \in L_{\frac{2}{2-\alpha_i}}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что для каждой последовательности

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сильно сходящейся в L_p к нулю, последовательность функций

$$|f[x, u_1(x)]|^p, \quad |f[x, u_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G)$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Это очевидно, так как для любого $Q \subset G$

$$\int_Q |f[x, u_n(x)]|^p\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_Q S_i(x)\,|u_n(x)|^{\alpha_i}\,dx,$$

причем из неравенства Гельдера вытекает при $0 \leqslant \alpha_i < 2$

$$\int_Q S_i(x)\,|u_n(x)|^{\alpha_i}\,dx \leqslant \left\{\int_Q S_i^{\frac{2}{2-\alpha_i}}(x)\,dx\right\}^{\frac{2-\alpha_i}{2}} \cdot \left\{\int_Q |u_n(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{\alpha_i}{2}},$$

в случае же, если $\alpha_i = 2$, то

$$\int_Q S_i(x)\,u_n^2(x)\,dx \leqslant \operatorname{vrai\,max} S_i(x) \cdot \int_Q u_n^2(x)\,dx.$$

Признак Б. Оператор $\mathfrak{f}$ *действует из* L_2 *в* L_p $(p \geqslant 1)$, *непрерывен и ограничен, если почти для всех* $x \in G$

$$|f(x, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} S_i(x) |u|^{\beta_i} \qquad (-\infty < u < \infty),$$

где $0 \leqslant p\beta_i \leqslant 2$, $S_i(x) \in L_{\frac{2p}{2-p\beta_i}}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказательство. Как и при доказательстве достаточности признака А, покажем, что для каждой последовательности

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сильно сходящейся в L_2 к нулю, последовательность функций

$$|f[x, u_1(x)]|^p, \quad |f[x, u_2(x)]|^p, \ldots \qquad (x \in G)$$

имеет на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Действительно, для любого $Q \subset G$

$$\left\{ \int_Q |f[x, u_n(x)]^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_Q S_i^p(x) |u_n(x)|^{p\beta_i} dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

причем из неравенства Гельдера вытекает при $0 \leqslant p\beta_i < 2$

$$\int_Q S_i^p(x) |u_n(x)|^{p\beta_i} dx \leqslant \left\{ \int_Q S^{\frac{2p}{2-p\beta_i}}(x) \, dx \right\}^{\frac{2-p\beta_i}{2}} \cdot \left\{ \int_Q u_n^2(x) \, dx \right\}^{\frac{p\beta_i}{2}},$$

в случае же, если $p\beta_i = 2$, то

$$\int_Q S_i^p(x) \, u_n^2(x) \, dx \leqslant \operatorname{vrai\,max} S_i^p(x) \cdot \int_Q u_n^2(x) \, dx,$$

а функции $u_n^2(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют на G равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Признак В. Оператор $\mathfrak{f}$ *действует из* L_2 *в* L_p $(p \geqslant 1)$, *непрерывен и ограничен, если*

$$\int_G |f(x, 0)|^p dx < \infty$$

и

$$\int_G |f(x, 0) - f[x, u(x)]|^p dx \leqslant K \left[\int_G u^2(x) \, dx \right]^{\alpha},$$

где K *и* α *— некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Из условий непосредственно следует, что оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен в нуле пространства L_2. В силу теорем 2 и 3 оператор $\mathfrak{f}$ тогда непрерывен и ограничен в любом шаре пространства L_2.

Признак Г. Оператор $\mathfrak{f}$ *действует из* L_2 *в* L_p $(p \geqslant 1)$, *непрерывен и ограничен, если*

$$\int_G |f(x, 0)|^p \, dx < \infty$$

и

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leqslant S(x) |u_1 - u_2|^\gamma,$$

где $0 \leqslant p\gamma \leqslant 2$, $S(x) \in L_{\frac{2p}{2-p\gamma}}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$S_1(x) = S(x), \quad \beta_1 = \gamma; \quad S_2(x) = |f(x, 0)|, \quad \beta_2 = 0.$$

Тогда

$$|f(x, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{2} S_i(x) |u|^{\beta_i} \qquad (-\infty < u < \infty).$$

Таким образом выполнены условия признака Б.

6°. Будем рассматривать совокупность вещественных вектор-функций

$$\bar{u}(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}, \qquad (x \in G), \tag{1,6}$$

где n — некоторое фиксированное число.

Пусть заданы n функций

$$f_1(x, u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_n(x, u_1, \ldots, u_n), \qquad (x \in G),$$

непрерывных по всем u_i, $-\infty < u_i < \infty$ $(i=1, \ldots, n)$.

Через $\mathfrak{f}$ обозначим оператор, определенный на совокупности вектор-функций (1,6) равенством

$$\mathfrak{f}\bar{u}(x) = \{\mathfrak{f}_1 \bar{u}(x), \ldots, \mathfrak{f}_n \bar{u}(x)\},$$

где

$$\mathfrak{f}_k \bar{u}(x) = f_k[x, u_1(x), \ldots, u_n(x)], \qquad (x \in G).$$

Этот оператор при произвольном n изучается теми же методами, как он был изучен для случая $n=1$.

Обозначим через $L_{p,n}$ $(p \geqslant 1)$ прямую сумму n пространств L_p. Элементами этого пространства $L_{p,n}$ будут вектор-функции (1,6), у которых все функции-компоненты $u_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$ суммируемы с p-ой степенью. Пусть норма в $L_{p,n}$ $(p \geqslant 1)$ задана равенством

$$\|\bar{u}(x)\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_G |u_i(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1'. *Для того чтобы оператор* $\mathfrak{f}$, *определенный непрерывными по* u_i $(i=1,\ldots,n)$ *функциями* $f_k(x, u_1,\ldots, u_n)$ $(k=1,\ldots,n)$, *был непрерывным оператором, действующим из* $L_{2,n}$ *в* $L_{p,n}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности*

$$\overline{u}^{(r)}(x) = \{u_1^{(r)}(x), \ldots, u_n^{(r)}(x)\}, \qquad (x \in G;\ r=1, 2, \ldots),$$

сходящейся в $L_{2,n}$ *к нулю, последовательность функций*

$$|f_k[x, u_1^{(r)}(x), \ldots, u_n^{(r)}(x)]|^p \quad (x \in G;\ r=1, 2, \ldots)$$

при каждом $k=1,\ldots,n$ *имела на* G *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Теорема 2'. *Если оператор* $\mathfrak{f}$, *действующий из* $L_{2,n}$ *в* $L_{p,n}$, *непрерывен в одной точке пространства* $L_{2,n}$, *то он непрерывен во всем* $L_{2,n}$.

Теорема 3'. *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *ограничен в некотором шаре пространства* $L_{2,n}$.

Тогда оператор $\mathfrak{f}$ *ограничен в любом шаре пространства* $L_{2,n}$.

Как и для случая $n=1$, в приложениях удобны частные достаточные признаки непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ в пространстве $L_{2,n}$. Приведем один такой признак.

Оператор $\mathfrak{f}$ *действует из* $L_{2,n}$ *в* $L_{p,n}$ $(p \geqslant 1)$, *непрерывен и ограничен, если почти для всех* $x \in G$

$$|f_k(x, u_1, \ldots, u_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T_{ijk}(x) \cdot |u_i|^{\gamma_{ij}} \qquad (-\infty < u < \infty;\ k=1,\ldots,n),$$

где $0 \leqslant p\gamma_{ij} \leqslant 2$, $T_{ijk}(x) \in L_{\frac{2p}{2-p\gamma_{ij}}}$ $(i, j=1,\ldots, n)$.

7°. Сделаем два замечания по поводу достаточных признаков непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ (для случая $n=2$), приведенных М. М. Вайнбергом во второй из цитированных статей [1].

Лемма 3 в этой заметке формулируется так: *для того чтобы оператор* $\mathfrak{f}$ *действовал в* $L_{2,n}$ *и был непрерывен, достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$|f_k(x, u_1, \ldots, u_n)| \leqslant a_k(x) + b_k \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{p_{ik}}, \tag{1,7}$$

где

$$a_k(x) \in L_{2+\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad p_{ik} < 1.$$

Условия $\alpha > 0$, $p_{ik} < 1$ — здесь лишние. Достаточно требовать, чтобы $a_k(x) \in L_2$, а все p_{ik} могут быть равны 1.

В этой же заметке отмечено, что в правой части неравенства (1,7) могут быть слагаемые типа

$$c_k(x) \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{q_{ik}}, \tag{1,8}$$

где $c_i(x) \in L_2$, $0 \leqslant q_{ik} < \dfrac{1}{2}$.

Неверность этого условия очевидна уже для случая $n=1$, так как слагаемые типа (1,8) не могут обеспечить равностепенную непрерывность функций (1,4). В подтверждение этих общих соображений приведем пример. Рассмотрим на множестве вещественных функций на отрезке [0,1] оператор $\mathfrak{f}$, определенный функцией

$$f(x, u) = x^{-\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{3}}.$$

Очевидно, $x^{-\frac{1}{3}} |u|^{\frac{1}{3}}$ — выражение типа (1,8), так как $x^{-\frac{1}{3}} \in L_2$. Однако $\mathfrak{f}$ не только не непрерывен в L_2, но даже некоторые функции из L_2 переводит в функции не из L_2. Например,

$$\mathfrak{f} x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} \overline{\in} L_2.$$

§ 2. Интегральные операторы

1°. Пусть G — замкнутое ограниченное множество в конечномерном эвклидовом пространстве.

Определим в пространстве L_p вещественных функций на G, суммируемых с p-ой степенью, линейный оператор A равенством

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)\, \varphi(y)\, dy. \tag{2,1}$$

Будем предполагать, что ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_G \int_G |K(x, y)|^q\, dx\, dy < \infty,$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что

$$1 < p \leqslant 2,$$

откуда следует, что

$$2 \leqslant q < \infty.$$

Оператор A переводит функции $\varphi(x) \in L_p$ в функции с суммируемым квадратом. Действительно,

$$\int_G \left[\int_G K(x, y) \varphi(y)\, dy \right]^2 dx \leqslant \left\{ \int_G \int_G |K(x, y)|^q dx\, dy \right\}^{\frac{2}{q}} \cdot \left\{ \int_G |\varphi(y)|^p\, dy \right\}^{\frac{2}{p}}. \tag{2,2}$$

Таким образом, оператор A действует из L_p в L_2. Из (2,2) следует, что оператор A непрерывен.

Покажем, пользуясь соображениями С. Банаха [4], что *оператор A вполне непрерывен.*

Построим такую последовательность непрерывных по двум переменным ядер

$$K_r(x, y) \qquad (x, y \in G; \quad r=1, 2, \ldots),$$

что

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_G \int\limits_G |K(x, y) - K_r(x, y)|^q \, dx \, dy = 0. \tag{2,3}$$

Каждый оператор A_r, определяемый равенством

$$A_r\varphi(x) = \int\limits_G K_r(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

вполне непрерывен в каждом пространстве L_p. Действительно, эти операторы каждое ограниченное (по норме пространства L_p) множество функций переводят в семейство функций, равномерно ограниченное на G, так как

$$|A_r\varphi(x)| \leqslant \max_{x, y \in G} |K_r(x, y)| (\text{mes } G)^{\frac{1}{q}} \left\{\int\limits_G |\varphi(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}},$$

и равностепенно непрерывное, так как

$$|A_r\varphi(x_1) - A_r\varphi(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{y \in G} |K_r(x_1, y) - K_r(x_2, y)| \; (\text{mes } G)^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{\int\limits_G |\varphi(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}},$$

которое компактно по теореме Арцеля в равномерной норме и, тем более, в норме пространства L_p.

Полная непрерывность оператора A будет доказана, если будет установлено, что его можно по норме операторов с любой заданной точностью апроксимировать операторами A_r.

Докажем это. Так как

$$\|(A-A_r)\varphi(x)\| \leqslant \left\{\int\limits_G \left[\int\limits_G |K(x, y) - K_r(x, y)| \cdot |\varphi(y)|\, dy\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_G \int\limits_G |K(x, y) - K_r(x, y)|^q \, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{\int\limits_G |\varphi(y)|^p \, dy\right\}^{\frac{1}{p}},$$

то в силу (2,3)

$$\lim_{r\to\infty} \|A - A_r\| = 0.$$

Итак, оператор A действует из пространства L_p в L_2 и вполне непрерывен.

2°. Пусть B — такой непрерывный оператор, действующий из L_2 в L_p, что B-образ каждого шара из L_2 ограничен. Последние условие нужно оговаривать, так как можно построить непрерывный нелинейный оператор (даже функционал) на единичном, например, шаре банахова пространства, совокупность значений которого не ограничена.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий из L_p в L_2.

Тогда, очевидно, будет вполне непрерывным оператор AB, определенный в пространстве L_2 с множеством значений также в L_2.

Эти соображения позволяют просто получить некоторые признаки полной непрерывности в пространстве L_2 нелинейных интегральных операторов Γ типа Гаммерштейна, заданных равенством

$$\Gamma u(x) = \int_G K(x, y)\, f[y, u(y)]\, dy. \tag{2,4}$$

Теорема 4. *Пусть непрерывная по* u *функция* $f(x, u)$ $x \in G$, $-\infty < u < \infty$ *такова, что для каждой последовательности функций*

$$u_1(x), \quad u_2(x), \dots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2 *к нулю, последовательность функций*

$$|f[x, u_1(x)]|^p, \quad |f[x, u_2(x)]|^p, \dots \qquad x \in G,$$

где $1 < p \leqslant 2$, *имеет на* G *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Пусть ядро $K(x, y)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_G \int_G |K(x, y)|^q\, dx\, dy < \infty. \tag{2,5}$$

Тогда оператор Γ, *определенный равенством (2,4), будет действовать в пространстве* L_2 *и будет вполне непрерывен.*

Доказательство. Первое условие теоремы обеспечивает (см. теорему 1) непрерывность и ограниченность в каждом шаре $\subset L_2$ оператора $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{f} u(x) = f[x, u(x)],$$

действующего из L_2 в L_p.

Второе условие обеспечивает полную непрерывность линейного оператора A, определенного равенством (2,1) и действующего из L_p в L_2.

Оператор Γ вполне непрерывен, так как

$$\Gamma = A\mathfrak{f}.$$

Теорема доказана.

3°. Для приложений удобны более частные достаточные признаки полной непрерывности операторов типа Гаммерштейна. Такие признаки можно получить, заменяя в теореме 4 требования, предъявляемые к функции $f(x, u)$, условиями признаков А, Б, В, Г непрерывности оператора $\mathfrak{f}$. Приведем один пример.

Для того чтобы оператор Γ *типа Гаммерштейна действовал в* L_2 *и был вполне непрерывен, достаточно, чтобы ядро* $K(x, y)$ *удовлетворяло условию (2,5), а непрерывная по* u *функция* $f(x, u)$ *удовлетворяла условию*

$$|f(x, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} S_i(x) |u|^{\beta} \qquad (-\infty < u < \infty),$$

где $0 \leqslant p\beta_i \leqslant 2$, $S_i(x) \in L_{\frac{2p}{2-p\beta_i}}$ $(i=1, \ldots, m)$.

Это утверждение следует из условий признака Б.

4°. Рассмотрим в пространстве $L_{2,n}$ вектор-функций

$$\bar{u}(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\} \qquad (x \in G)$$

с суммируемым скалярным квадратом оператор Γ, определенный равенством

$$\Gamma\bar{u}(x) = \{\Gamma_1\bar{u}(x), \ldots, \Gamma_n\bar{u}(x)\},$$

где

$$\Gamma_i\bar{u}(x) = \int_G K_i(x, y) f_i[y, u_1(y), \ldots, u_n(y)]\, dy \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Аналогично теореме 4 устанавливается

Теорема 4′. *Пусть непрерывные по всем* u_i, $-\infty < u_i < \infty$ $(i=1, \ldots, n)$ *функции*

$$f_1(x, u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_n(x, u_1, \ldots, u_n) \qquad (x \in G)$$

таковы, что для любой последовательности

$$\bar{u}^{(r)}(x) = \{u_1^{(r)}(x), \ldots, u_n^{(r)}(x)\} \qquad (r=1, 2, \ldots),$$

сходящейся в $L_{2,n}$ *к нулю, последовательности функций*

$$|f_k[x, u_1^{(r)}(x), \ldots, u_n^{(r)}(x)]|^p, \qquad (r=1, 2, \ldots),$$

при каждом $k=1, \ldots, n$ *имеют на* G *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Пусть ядра $K_i(x,y)$ *удовлетворяют условию*

$$\int_G \int_G |K_i(x, y)|^q\, dx\, dy < \infty \qquad (i=1, \ldots, n),$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда оператор Γ *вполне непрерывен и действует в* $L_{2,n}$.

В приложениях, при изучении систем нелинейных интегральных уравнений, удобно пользоваться более частными достаточными признаками полной непрерывности оператора Γ, вытекающими из более частных признаков непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ (см. § 1, пункт 6°).

5°. Перейдем к рассмотрению более общего, чем оператор типа Гаммерштейна, оператора K:

$$Ku(x) = \int_G K[x, y, u(y)]\, dy.$$

Будем предполагать, что функция

$$K(x, y, u) \qquad (x, y \in G; -\infty < u < \infty)$$

непрерывна по u.

Обозначим через $\hat{G}$ совокупность пар $\{x, y\}$ $(x, y \in G)$ с естественно определенной топологией и мерой. В силу леммы 1 из § 1 оператор $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}v(x, y) = K[x, y, v(x, y)]$$

преобразует каждую сходящуюся по мере последовательность функций

$$v_1(x, y), \quad v_2(x, y), \ldots \qquad (\{x, y\} \in G)$$

в последовательность, также сходящуюся по мере $\hat{G}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G), \tag{2,6}$$

сходящуюся по мере G. Последовательность функций

$$v_k(x, y) = u_k(y) \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

будет сходиться по мере $\hat{G}$.

Таким образом, справедлива

Лемма 3. *Пусть последовательность функций (2,6) сходится по мере G к функции $u_0(x)$.*

Тогда последовательность

$$K[x, y, u_1(y)], \quad K[x, y, u_2(y)], \ldots \qquad (\{x, y\} \in \hat{G})$$

сходится по мере $\hat{G}$ к функции $K[x, y, u_0(y)]$.

Аналогичными рассуждениями при помощи леммы 2 устанавливается

Лемма 4. *Пусть некоторая функция $u_0(x) \in L_2$ обладает тем свойством, что для каждой последовательности*

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G)$$

сходящейся в L_2 к $u_0(x)$, последовательность функций

$$K^2[x, y, u_1(y)], \quad K^2[x, y, u_2(y)], \ldots \qquad (\{x, y\} \in G)$$

имеет на $\hat{G}$ равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Тогда для любой последовательности

$$v_1(x), \quad v_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2, последовательность функций

$$K^2[x, y, v_1(y)], \quad K^2[x, y, v_2(y)], \ldots \qquad (\{x, y\} \in \hat{G})$$

также будет иметь на G *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Теорема 5. *Пусть функция* $K(x, y, u)$, $x, y \in G$, $-\infty < u < \infty$ *такова, что для каждой последовательности*

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots \qquad (x \in G),$$

сходящейся в L_2 *к нулю, последовательность функций*

$$K^2[x, y, u_1(y)], \quad K^2[x, y, u_2(y)], \ldots \qquad (\{x, y\} \in \hat{G})$$

имеет на $\hat{G}$ *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Тогда оператор K *действует в* L_2, *непрерывен и ограничен.*

Доказательство. Рассуждения, приводимые ниже, очень близки к доказательству теоремы 1.

Пусть $u_0(x) \in L_2$, тогда по неравенству Буняковского

$$\int\limits_G \Big[\int\limits_G K[x, y, u(y)]\, dy\Big]^2 dx \leqslant \text{mes}\, G \int\limits_G \int\limits_G K^2[x, y, u(y)]\, dx\, dy < \infty.$$

Таким образом, оператор K функции из L_2 переводит в функции из L_2.

Пусть теперь

$$v_1(x), \quad v_2(x), \ldots \qquad (x \in G) \tag{2,7}$$

последовательность функций, сходящаяся в L_2 к некоторой функции $v_0(x)$. В силу леммы 4 можно выбрать такое число $\eta > 0$, что для всех множеств $Q \subset \hat{G}$ меры $< \eta$

$$\int\limits_Q \Big\{K[x, y, v_0(y)] - K[x, y, v_n(y)]\Big\}^2 dx\, dy < \varepsilon, \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Так как последовательность (2,7) сходится по мере G к функции $v_0(x)$, то в силу леммы 3 последовательность функций

$$K[x, y, v_1(y)], \quad K[x, y, v_2(y)], \ldots \qquad (\{x, y\} \in \hat{G})$$

также сходится по мере $\hat{G}$ к функции $K[x, y, v_0(y)]$.

Выберем такое число N, что мера множеств $P(n) \subset \hat{G}$ $(n > N)$, состоящих из точек $\{x, y\} \in \hat{G}$, для которых

$$|K[x, y, v_0(y)] - K[x, y, v_n(y)]| < \varepsilon,$$

была больше $\text{mes}\, \hat{G} - \eta = (\text{mes}\, G^2) - \eta$.

Тогда, применяя неравенство Буняковского, получим при $n > N$

$$\int\limits_G \Big\{\int\limits_G \Big[K[x, y, v_0(y)] - K[x, y, v_n(y)]\Big] dy\Big\}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \text{mes}\, G \int\limits_G |K[x, y, v_0(y)] - K[x, y, v_n(y)]|^2\, dx\, dy =$$

$$= \text{mes}\, G \int\limits_{P(n)} |\ldots|^2\, dx\, dy + \text{mes}\, G \int\limits_{\hat{G}-P(n)} |\ldots|^2\, dx\, dy \leqslant \varepsilon^2 (\text{mes}\, G)^3 + \varepsilon\, \text{mes}\, G.$$

Значит, оператор K непрерывен в каждой точке пространства L_2.

Ограниченность норм значений оператора K на каждом шаре $\subset L_2$ доказывается дословно так же, как была доказана теорема 3.

Теорема 5 позволяет установить ряд менее общих, но просто формулируемых достаточных признаков непрерывности в L_2 оператора K (аналогичных признакам А, Б, В и Г из § 1).

Чтобы оператор K, удовлетворяющий условиям теоремы 5, был вполне непрерывен, нужно обеспечить компактность K-образа каждого шара $\subset L_2$. Некоторые условия, обеспечивающие эту компактность, указал В. М. Дубровский [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений, Мат. сборник, 41:3 (1934), 421—452.

2. М. М. Вайнберг, Существование решений у одной системы нелинейных интегральных уравнений, ДАН, 61 (1948), 965—968; Существование собственных функций у одной системы нелинейных интегральных уравнений, ДАН, 63 (1948), 605—608.

3. В. М. Дубровский, О некоторых нелинейных интегральных уравнениях, Уч. записки МГУ, 30 (1939), 49—60.

4. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ (1948).

Поступило 25. V 1950.