О принципе усреднения для диференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Ф. С. Лось

Весьма общим методом исследования колебательных процессов в нелинейной механике, дающим непосредственную схему расчета нелинейных систем, является разработанный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым принцип усреднения в нелинейной механике. С помощью этого метода возможно исследование квазипериодических колебательных процессов как в консервативных, так и в неконсервативных системах. Принцип усреднения состоит в приведении нелинейных диференциальных уравнений колебательного процесса к форме, в которой производные от неизвестных функций по времени оказываются пропорциональными некоторому малому параметру ε и в применении к этой форме процесса усреднения по явно содержащемуся времени.

Уравнения системы с n степенями свободы, приведенные к требуемому виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon X_i(t, x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

будем записывать в виде одного векторного уравнения в n-мерном эвклидовом пространстве

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \tag{1}$$

Применение процесса усреднения по явно содержащемуся времени состоит в замене уравнения (1) уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \tag{2}$$

где

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\tau, x)\, d\tau,$$

причем в процессе интегрирования x считается постоянным. Не касаясь вопроса об установлении соответствия между теми свойствами точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале времени, задача обоснования принципа усреднения состоит в определении условий, при которых для достаточно малого ε $|x(t)-\xi(t)|$ может быть сколь угодно малым на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени.

Обоснованию принципа усреднения для частных случаев, когда правая часть уравнения (1) является функцией специального вида, посвящен ряд работ [1, 2, 3].

Н. Н. Боголюбов в работе „О некоторых статистических методах в математической физике“ рассмотрел проблему обоснования принципа усреднения в указанном выше смысле для систем с конечным числом степеней свободы при весьма общих ограничениях, налагаемых на правую часть уравнения (1).

В настоящей работе дается обоснование принципа усреднения в нелинейной механике применительно к системам с бесконечным числом степеней свободы.

Необходимость постановки этой задачи вызвана тем, что такие системы, называемые иногда системами с распределенными параметрами, имеют важное значение при изучении колебательных процессов, тем не менее до сих пор не было сделано попытки математического обоснования применения к таким системам принципа усреднения.

Для нашей цели мы рассматриваем диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \tag{3}$$

в гильбертовом пространстве H, элементами которого являются совокупности функций

$$\{x_1(t),\ x_2(t), \dots\ x_n(t), \dots\} = x,$$

удовлетворяющих в любой момент времени $t=\bar{t}$ условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\ (\bar{t}) < \text{const.} \tag{4}$$

Уравнение (3) при условии, что $\varepsilon X(t, x)$ равномерно ограничена в некоторой области $D \subset H$, а также для x_1 и x_2, принадлежащих D, удовлетворяет условию

$$|X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leqslant \lambda |x_1 - x_2| \qquad \lambda > 0$$

и суммируема по t в некотором промежутке $[0, t]$, имеет единственное непрерывное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x^0.$$

Приступая к решению поставленной задачи, необходимо предварительно заметить, что поскольку решение усредненного уравнения зависит от t через посредство εt, то, для того, чтобы рассматривать поведение решения на достаточно большом интервале, необходимо этот интервал брать порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, где L может быть сколь угодно большим при ε достаточно малом.

Имея в виду изложенные выше соображения, перейдем к доказательству решающей поставленную задачу теоремы.

Теорема. Пусть в гильбертовом пространстве H задана функция $X(t, x)$, для которой в области $D \subset H$ существуют такие $\lambda > 0$ и $M > 0$, что для всех значений $t \geqq 0$ и для любых точек $x, x_1, x_2 \subset D$ выполняются условия

$$\text{а) } |X(t, x)| \leqq M; \quad \text{б) } |X(t, x_1) - X(t, x_2)| \leqq \lambda |x_1 - x_2| \tag{5}$$

и, кроме того, существует такое $X_0(x)$, что равномерно по x в области D,

$$\lim_{T \to \infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T X(\tau, x)\, d\tau - X_0(x) \right| = 0. \tag{6}$$

Тогда, если $\xi = \xi(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \tag{7}$$

определенное для всех значений t и принадлежащее вместе со своей ϱ-окрестностью области D, а $x = x(t)$ решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{8}$$

совпадающие в начальный момент времени, $x(0) = \xi(0)$, то для любых сколь угодно малых $\eta > 0$ и $\varrho > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ будет иметь место неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

Доказательство. Из условия (6) видно, что существует монотонно убывающая, стремящаяся к нулю при неограниченно возрастающем t функция $f(t)$, для которой справедливо неравенство

$$\left| \int_0^t \left\{ X(\tau, x) - X_0(x) \right\} d\tau \right| \leqq t f(t).$$

Определим теперь функцию $F(\varepsilon)$ следующим образом

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqq L} \left| \tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right|. \tag{9}$$

Так как $F(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε, можно указать такое ε_0, чтобы для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имело место неравенство

$$\sqrt{F(\varepsilon)} < \frac{\nu}{e^{\lambda L} \lambda L \left(\frac{M}{2} + \frac{2}{\lambda} + 1\right)}, \tag{10}$$

где ν равно меньшему из чисел η и ϱ.

Построим функцию $\bar{x}(t)$, совпадающую с решением уравнения (7) $\xi(t)$ при $t=0$ и в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ принадлежащую ϱ-окрестности этого решения. Такая функция определяется выражением

$$\bar{x}(t = \xi(t) + \frac{\varepsilon}{a} \int_t^{t+a} d\tau' \int_0^t \left\{ X(\tau, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau')) \right\} d\tau, \tag{11}$$

где a — постоянная, пока что неопределенная величина.

Найдем оценку нормы выражения $R(t)$, определенного следующим образом

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \bar{x}) = R(t). \tag{12}$$

Эту оценку можно получить из явного выражения $R(t)$

$$R(t) = \frac{d\xi}{dt} + \frac{\varepsilon}{a} \int_t^{t+a} \left\{ X(t, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau')) \right\} d\tau' +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{a} \int_0^t \left\{ X(\tau, \xi(t+a)) - X_0(\xi(t+a)) \right\} d\tau -$$

$$- \frac{\varepsilon}{a} \int_0^t \left\{ X(\tau, \xi(t)) - X_0(\xi(t)) \right\} d\tau -$$

$$- \varepsilon X \left[t, \xi(t) + \frac{\varepsilon}{a} \int_t^{t+a} d\tau' \int_0^t \left\{ X(\tau, \xi(\tau') - X_0(\xi(\tau')) \right\} d\tau \right] +$$

$$+ \varepsilon X(t, \xi(t)) - \varepsilon X(t, \xi(t)),$$

где последние два члена введены для удобства дальнейших преобразований. Отсюда находим

$$
\begin{aligned}
|R(t)| \leqq & \left| \varepsilon X_0(\xi(t)) - \varepsilon X(t, \xi(t)) + \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a}\left\{X(t, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau'))\right\} d\tau' \right| + \\
& + \left| \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^t \left\{X(\tau, \xi(t+a)) - X_0(\xi(t+a))\right\} d\tau \right| + \\
& + \left| \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^t \left\{X(\tau, \xi(t)) - X_0(\xi(t))\right\} d\tau \right| + \qquad (13) \\
& + \left| \varepsilon X(t, \xi(t)) - \varepsilon X\left[t, \xi(t) + \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a} d\tau' \int\limits_0^t \left\{X(\tau, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau'))\right\} d\tau \right] \right|.
\end{aligned}
$$

Оценка нормы выражения в первой прямой скобке получается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& \left| \varepsilon X_0(\xi(t)) - \varepsilon X(t, \xi(t)) + \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a}\left\{X(t, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau'))\right\} d\tau' \right| = \\
& = \left| \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a}\left\{X(t, \xi(\tau')) - X(t, \xi(t)) + X_0(\xi(t)) - X_0(\xi(\tau'))\right\} d\tau \right| \leqq \\
& \leqq \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a} |X(t, \xi(\tau')) - X(t, \xi(t))| \, d\tau' + \frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a} |X_0(\xi(t)) - X_0(\xi(\tau'))| \, d\tau'.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись условием (5), б) теоремы, получаем

$$
\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a} |X(t, \xi(\tau')) - X(t, \xi(t))| \, d\tau' \leqq \frac{\varepsilon\lambda}{a}\int\limits_t^{t+a} |\xi(\tau') - \xi(t)| \, d\tau',
$$

$$
\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_t^{t+a} |X_0(\xi(t)) - X_0(\xi(\tau'))| \leqq \frac{\varepsilon\lambda}{a}\int\limits_t^{t+a} |\xi(\tau') - \xi(t)| \, d\tau'.
$$

С помощью уравнения (7) и условия (5), а) находим, что

$$
|\xi(\tau') - \xi(t)| \leqq \varepsilon \int\limits_t^{\tau'} |X_0(\xi(\tau))| \, d\tau \leqq \varepsilon M |\tau' - t|.
$$

Воспользовавшись последним, получаем искомую оценку нормы первого выражения в прямых скобках.

$$\left| \varepsilon X_0(\xi(t)) - \varepsilon X(t, \xi(t)) + \frac{\varepsilon}{a}\int_t^{t+a} \left\{X(t, \xi(\tau')) - X_0(\xi(\tau'))\right\} d\tau' \right| < \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda Ma.$$

Сумма оценок норм второго и третьего выражений в (13) по определению функции $F(\varepsilon)$ не превышает $2\frac{F(\varepsilon)}{a}$.

Оценка нормы последнего выражения в прямых скобках в (13) по условию (5), б) теоремы и определению $F(\varepsilon)$ не превышает $\varepsilon\lambda F(\varepsilon)$.

Таким образом, для нормы выражения $R(t)$ получаем оценку

$$|R(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda Ma + 2\frac{F(\varepsilon)}{a} + \varepsilon\lambda F(\varepsilon).$$

Располагая оценкой $|R(t)|$, получаем следующую оценку:

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}|R(\tau)|\,d\tau < \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}|R(\tau)|\,d\tau < e^{\lambda L}\lambda L\left(\frac{1}{2}\varepsilon Ma + \frac{2}{\lambda}\frac{F(\varepsilon)}{a} + F(\varepsilon)\right).$$

Определяя произвольную величину a выбором

$$a = \frac{\sqrt{F(\varepsilon)}}{\varepsilon},$$

получаем, воспользовавшись неравенством (10)

$$\int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}|R(\tau)|\,d\tau < \frac{\nu}{2} + AF(\varepsilon).$$

Таким образом, для $t < \frac{L}{\varepsilon}$ всегда справедливо неравенство

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)}|R(\tau)|\,d\tau < \frac{\nu}{2} + AF(\varepsilon), \tag{14}$$

где A некоторое положительное число.

Рассмотрим теперь решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям теоремы. В некотором интервале $0 < t < \overline{t}$ $x(t)$ принадлежит область D и, следовательно, будет выполняться условие

$$|X(t, x) - X(t, \overline{x})| \leqq \lambda|x - \overline{x}|.$$

Тогда из уравнения (12) получаем

$$\left|\frac{d(x-\overline{x})}{dt}\right| \leqq \varepsilon\lambda|x-\overline{x}| + |R(t)|.$$

Так как $x(0)=\bar{x}(0)$, то из последнего неравенства следует, что

$$|x-\bar{x}| \leqq \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| \, d\tau \qquad (0 < t < \bar{t}).$$

Воспользовавшись неравенством (14), получаем

$$|x-\bar{x}| < \frac{\eta}{2} + AF(\varepsilon) \quad |x-\bar{x}| < \frac{\varrho}{2} + AF(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\text{а) } |x-\xi| < \frac{\eta}{2} + BF(\varepsilon) < \eta, \quad \text{б) } |x-\xi| < \frac{\varrho}{2} + BF(\varepsilon) < \varrho. \tag{15}$$

B — некоторое положительное число.

Неравенство $|x-\xi| < \varrho$ выполняется в интервале $(0, \bar{t})$, так как только в этом интервале $x(t)$ предполагается принадлежащим области D. В силу непрерывности $x(t)$ можно найти такое t^*, для которого одновременно с неравенством (15), б) будет справедливо неравенство

$$|x(t^*) - \xi(t^*)| > \varrho - \delta, \tag{16}$$

причем δ может быть сколь угодно малым числом. Следовательно, для $\delta = \frac{\varrho}{2} - BF(\varepsilon)$.

Неравенства (15) и (16) могут выполняться при соответствующем подборе t^*.

Предположим теперь, что $\bar{t} = t^*$; тогда из (15) следует, что

$$|x(t^*) - \xi(t^*)| < \frac{\varrho}{2} + BF(\varepsilon) = \varrho - \delta.$$

Но это противоречит предположению (16) и, следовательно, может быть взято равным $\frac{L}{\varepsilon}$.

Доказанная теорема позволяет применить принцип усреднения к различным функциональным уравнениям.

Поступило 17. VI 1950.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. С., Об обосновании одного метода приближенного решения диференциальных уравнений, Полн. собр. соч., т. II.

2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику АН УССР (1937).

3. **Faton, Bull. d. l. Soc. Math. d., Fr. v. LVI.**