Альтернативные тела характеристики 2 и 3

Л. А. Скорняков

В работе автора [1] была доказана следующая теорема: *Всякое альтернативное тело характеристики, отличной от* 2 *и* 3, *или ассоциативно, или является телом Кэли-Диксона над своим центром.*

В настоящей работе будет показано, что ограничение, наложенное на характеристику тела, может быть снято, то есть и сама теорема, и полученные из нее в работе [1] геометрические следствия справедливы для случая любой характеристики. При этом для случая характеристики 3 по существу сохраняется доказательство, данное в работе [1], и только два пункта этого доказательства приходится подвергнуть некоторой переработке (см. § 2). Наоборот, в случае характеристики 2 приходится дать новое доказательство, причем получается следующий даже более сильный результат: *Всякое альтернативное тело характеристики* 2 *ассоциативно* (см. § 3).

§ 1

В дальнейшем будут использованы формулы (1)—(11) [1]) и леммы 1,5—9 § 1 из [1], а также формулы (I)—(VII) из доказательства теоремы 7 в той же работе, которые остаются справедливыми в случае произвольной характеристики. Кроме того, придется вывести еще несколько формул. Во-первых, положив в формуле [2])

$$[(ab)c]\,b = a\,[(bc)\,b] \tag{12}$$

$b+d$ вместо b, получим после ее вторичного применения следующее соотношение:

$$[(ab)c]\,d + [(ad)c]\,b = a\,[(bc)\,d] + a\,[(dc)\,b]. \tag{I}$$

Далее, написав очевидное равенство

$$-(ab)(cd) + (ab)(cd) - a\,[b(cd)] - [a(dc)]\,b = -a\,[b(cd)] - [a(dc)]\,b,$$

сложим его с (I). Тогда

$$[ab, c, d] + [a, b, cd] + [a, d, c]\,b = a\,[b, c, d] - [a, dc, b]. \tag{II}$$

---

1) В дальнейшем при ссылках на эти формулы будет даваться только номер без указания работы.

2) [2], формула (10).

Но из (5) имеем

$$[ab, c, d]+[a, b, cd]=[a, bc, d]+a[b, c, d]+[a, b, c]d,$$

и после подстановки тождество (II) превращается в

$$[a, bc, d]+[a, b, c]d+[a, d, c]b=[a, b, dc]. \tag{III}$$

Еще раз применив (5), получим

$$[a, bc, d]+[a, b, c]d=-a[b, c, d]+[ab, c, d]+[a, b, cd],$$

после чего (III) принимает вид

$$[ab, c, d]+[a, d, c]b-a[b, c, d]+[a, b, [c, d]]=0. \tag{13}$$

Полагая здесь сначала $a=[c, d]$, а затем $b=[c, d]$, получим, ввиду теоремы Артина[1]), следующие формулы:

$$[[c, d]b, c, d]=[c, d][b, c, d] \tag{14}$$

и

$$[a[c, d], c, d]=[a, c, d][c, d]. \tag{15}$$

§ 2

Просматривая доказательство основной теоремы работы [1], можно убедиться, что предположение, что характеристика отлична от трех, используется только два раза, а именно, при доказательстве леммы 11 § 1 и в теореме 1 при доказательстве того, что $P \subset A$.

Докажем лемму 11 для случая характеристики 3.

Лемма 11′. *Если характеристика альтернативного тела равна трем, то равенства* $ab=ba$, $ac=ca$, $bc=cb$ *влекут за собой* $[a, b, c]=0$. Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *В условиях леммы* 11′.

$$[a^3, b, c]=0.$$

Ввиду теоремы Артина $[a^3, b]=[a^3, c]=0$. Далее, поскольку характеристика равна трем, из леммы 8 § 1 [1] и соотношений (3), (12) следует:

$$(bc)a^3=a^3(bc)=a[a(bc)a]=a[(ab)(ca)]=[(ba)(ca)]a=$$
$$=b[a(ca)a]=b(ca^3),$$

то есть

$$[b, c, a^3]=0.$$

Лемма 2*. *В условиях леммы* 11′

$$[(ab)c, a(bc)]=0.$$

---

1) Теорема Артина. *Если для элементов* a, b, c *некоторого альтернативного тела имеет место* $[a, b, c]=0$, *то подтело, ими порожденное, ассоциативно.* ([2], стр. 417 и § 3).

Так как $[a, ab]=[a, c]=0$, то из леммы 8 § 1 [1] вытекает

$$[a, (ab)c]=0. \tag{I}$$

Аналогично получаем $[a, bc]=0$. Отсюда $[bc, ab]=0$ и, наконец,

$$[bc, (ab)c]=0. \tag{II}$$

Ввиду леммы 8 § 1 [1], соотношения (I) и (II) дают искомое равенство.

Теперь доказательство леммы 11′ делается весьма несложным.

Пусть

$$[a, b, c]=t.$$

Отсюда, ввиду леммы 2*, имеем

$$[(ab)c]^3-[a(bc)]^3=t^3. \tag{III}$$

Но с помощью леммы 8 § 1 [1] нетрудно получить следующие равенства

$$[(ab)c]^3=(a^3b^3)c^3,\ [a(bc)]^3=a^3(b^3c^3),$$

после чего (III) превращается в

$$[a^3, b^3, c^3]=t^3.$$

Применение леммы 1 позволяет закончить доказательство.

Докажем второе недостающее утверждение.

Теорема 1′. *Центр P альтернативного тела K характеристики 3 включается в его ассоциативный центр A.*

Для доказательства заметим, что из формул (14) и (15) вытекает, что, если $a \in P$, то

$$[a, b][a, a, b]=[a, a, b][a, b].$$

Но формула (VII) теоремы 7 в [1] дает:

$$[a, b][a, a, b]=-[a, a, b][a, b].$$

Отсюда, если $[a, b]\neq 0$, то $[a, a, b]=0$. Если же $[a, b]=0$, то то же самое следует из леммы 11′. Таким образом, $a \in A$, то есть $P \subset A$.

§ 3

В отличие от случая характеристики, равной трем, для характеристики 2 придется дать особое доказательство, не опирающееся на основную теорему работы [1]. Будет доказана следующая теорема:

Всякое альтернативное тело характеристики 2 ассоциативно.

Лемма 1. *Если $ab=ba$, то $[a^2, b, c]=0$ для всякого c.*

Сразу вытекает из формулы (6), поскольку характеристика равна двум.

Лемма 2. *Если* $ab=ba$, $ac=ca$, *то или* $[a, b, c]=0$, *или* b^2 *входит в ассоциативно-коммутативный центр подтела* K', *порожденного элементами* a, b, c.

Пусть $[a, b, c]\neq 0$. Тогда K' оказывается неассоциативным телом. Из теоремы Артина и леммы 1 вытекает, что b^2 входит в ассоциативный центр тела K'. Поскольку первая часть теоремы 1 из [1] оказывается верной и в случае характеристики 2, отсюда вытекает, что b^2 входит также и в центр тела K', чем и заканчивается доказательство.

Лемма 3. *Если* $ab=ba$, $ac=ca$, $[a, b, c]\neq 0$ и $d, h\in K'$, то $[[a, d], a, h]=[[c, d], c, h]=0$. Вытекает из формулы (6) и лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Если* $ab=ba$, $ac=ca$, $bc=cb$, *то* $[a, bc]=0$.

Пусть

$$(ab)c=t[a(bc)]. \tag{I}$$

Тогда

$$[a, b, c]=(t+1)[a(bc)]. \tag{II}$$

Рассмотрим ассоциативное подтело K'', порожденное элементами a и bc. Так как ввиду леммы 5 § 1 [1] $(ab)c=(ba)c=(bc)a\in K''$, то

$$t\in K''. \tag{III}$$

Из (I) и (III) с помощью той же леммы 5 § 1 и леммы 1 получаем

$$[(ab)c]^2=\{t[a(bc)]\}[(ab)c]=\{t[a(bc)]\}[(bc)a]=ta(bc)^2a=tab^2c^2a=$$
$$=ta^2b^2c^2=t[(ab)^2c^2]=t\{[(ab)c][c(ab)]\}=t\{t[a(bc)]^2\}=t^2[a(bc)]^2,$$

то есть

$$[(ab)c]^2=t^2[a(bc)]^2. \tag{IV}$$

Из (I) и (IV) имеем

$$t^2[a(bc)]^2=[(ab)c]^2=t[a(bc)]t[a(bc)],$$

откуда после сокращения вытекает

$$t[a(bc)]=[a(bc)]t. \tag{V}$$

Теперь используем леммы 8 и 5 § 1 [1], лемму 1, а также соотношения (I), (V), (III).

$$a[a(bc)]=a^2(bc)=(bc)a^2=[(bc)a]a=[(ab)c]a=\{[a(bc)]t\}a=a[(bc)(ta)].$$

Сокращая на a, будем иметь

$$a(bc)=(bc)(ta).$$

Заменяя левую часть по формуле (I) и помня о (V), получим

$$[(ab)c]t^{-1}=(bc)(ta).$$

Отсюда с помощью леммы 5 § 1 [1] и соотношения (III) следует

$$(bc)(at^{-1})=(bc)(ta),$$

то есть

$$at^{-1}=ta. \tag{VI}$$

Далее из леммы 1 вытекает, что a^2 входит в центр K', а поэтому из (VI) вытекает

$$a^2t = ta^2 = at^{-1}a,$$

или

$$at = t^{-1}a. \tag{VII}$$

Перемножая (VI) и (VII), получим

$$at^2a = at^{-2}a,$$

или

$$t^4 = 1,$$

откуда $t=1$, $[a, b, c]=0$, после чего применением леммы 8 § 1 [1] заканчивается доказательство.

Лемма 5. *Если* $ab=ba$, $ac=ca$ и $[a, b, c]\neq 0$, то

$$[a, [a, b, c]\,(bc)]=0.$$

Из формулы (V) теоремы 7 [1] и формулы (9) следует

$$[a, b, c]\,(bc) = ([a, b, c]\,c)\,b = [a, c, cb]\,b. \tag{I}$$

Теперь используем формулу (13)

$$[b^2c, a, c]+[b, c, a]\,(bc)+b\,[bc, a, c]=0.$$

Полученное равенство, ввиду леммы 2 и соотношения (I), дает

$$[a, c, cb]\,b = b\,[a, c, bc].$$

Отсюда, поскольку в силу леммы 3 $[a, c, [b, c]]=0$, имеем

$$[a, c, cb]\,b = b\,[a, c, cb]. \tag{II}$$

Из равенств (I) и (II), ввиду леммы 1 § 1 [1] и леммы 4, вытекает утверждение настоящей леммы.

Лемма 6. *Если* $ab=ba$, $ac=ca$, *то* $[a, bc]=0$.

Пусть $[a, bc]\neq 0$. Тогда, в силу леммы 8 § 1 [1], $[a, b, c]\neq 0$. Поэтому из леммы 3 и теоремы Артина вытекает $[a, [a, bc]^{-1}, [a, bc]\,(bc)]=0$. Отсюда, поскольку $[a, [a, bc]^{-1}]=0$ (леммы 8 и 1 § 1 [1]) и $[a, [a, bc]\,(bc)]=0$ (лемма 5), ввиду леммы 8 § 1 [1], вытекает $[a, bc]=0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть наше тело неассоциативно. Тогда найдутся такие элементы a, b, c, что $[a, b, c]\neq 0$. Согласно формуле (VII) теоремы 7 [1]

$$[a, b]\,[a, b, d]=[a, b, d]\,[a, b]$$

для всякого d.

Далее, из (8) получаем

$$a=[a, b, ca]\,[a, b, c]^{-1}.$$

Поэтому лемма 6 дает:

$$[a, [a, b]] = 0.$$

Раскрывая, будем иметь

$$a^2b+aba=aba+ba^2,$$

то есть

$$[a^2, b]=0.$$

Аналогично

$$[a^2, c]=0.$$

Отсюда, ввиду леммы 6, леммы 8 § 1 [1] и формулы (10), вытекает

$$[a, [a, b, c]]=0, \text{ или } [a, [a, b, c]^{-1}]=0. \tag{I}$$

Поскольку согласно формуле (9)

$$[a, b, cb]=b[a, b, c]\neq 0, \tag{II}$$

то те же рассуждения, что и выше, дают

$$[a, [a, b, ca]]=0. \tag{III}$$

Ввиду (I), (II), (III) и леммы 6,

$$[a, b]=0.$$

Аналогично $[a, c]=0$, и из леммы 6 вытекает

$$[a, b, c]=0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Скорняков, Альтернативные тела, Укр. мат. журнал, 2 (1950), 70—85.
2. R. Moufang, Struktur von Alternativkörper, Math. Ann, 110 (1934), 416—430.
3. M. Smiley, Alternative rings without nilpotent elements, Bull. Am. Math. Soc., 53 (1947), 775—778.

Поступило 18. III 1950.