1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Соответствие, возникающее при проектировании криволинейных рядов точек

М. М. Лепский

Понятие преобразования криволинейных рядов точек через линию скольжения было введено в номографии, но применялось в различных графических расчетах еще до того. Чаще всего встречается проектирование криволинейных рядов точек. Теория этих преобразований, за исключением отдельных положений кинематической геометрии, в литературе не освещена.

Тут мы вводим некоторую аналитическую форму записи графических преобразований. Опираясь на нее, мы исследуем общие свойства проектирования криволинейных рядов точек. Затем изучается представление любого гомеоморфизма криволинейных рядов двумя проектированиями.

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ ТОЧЕК

§ 1

Основные определения

Пусть в одной плоскости дано несколько линий (a_1), $(a_2), \ldots$ и (t_1), $(t_2), \ldots$, обладающих непрерывной кривизной. Линии (a_1), $(a_2), \ldots$ будем рассматривать в качестве носителей криволинейных рядов точек.

Взаимно однозначное и непрерывное соответствие точек a_i и a_{i+1} криволинейных рядов (a_i) и (a_{i+1}) будем называть скольжением через линию (t_i), когда прямая $a_i a_{i+1}$ касается (t_i). Линию (t_i) называют линией скольжения [1]. Если линия скольжения сворачивается в точку P_i [2], то скольжение является проектированием. Одно-однозначное и взаимно непрерывное соответствие, установленное путем проектирования криволинейных рядов назовем квазиперспективным соответствием.

Можно говорить и о произведении нескольких скольжений. В частности, произведение $n-1$ квазиперспективных соответствий, которое будем записывать

$$(a_1)\overline{\overline{\underset{\Lambda}{P_1}}}(a_2)\overline{\overline{\underset{\Lambda}{P_2}}}\ldots(a_{n-1})\overline{\overline{\underset{\Lambda}{P_{n-1}}}}(a_n) \tag{1,1}$$

назовем квазипроективным соответствием криволинейных рядов (a_1) и (a_n). Число его ступеней будем считать $n-1$.

Все эти отображения по определению являются одно-однозначными и взаимно непрерывными. Каждое из них это — некоторый гомеоморфизм криволинейных рядов точек, имеющих данные носители. В дальнейшем, когда придется говорить о любом гомеоморфизме ряда (a_1) и ряда (a_n) с данными носителя, мы станем писать

$$(a_1) \frown (a_n), \tag{1,2}$$

называя эти ряды и их носителей фундаментальными.

Какую-либо пару соответствующих точек фундаментальных рядов обозначим A_1 и A_n; точки эти назовем избранными. Гомеоморфизм (1,2) будем исследовать в точках a_1 и a_n, взятых вблизи избранных.

Прямую $a_1 a_n$ назовем замыкающей прямой преобразования (1,2). Семейство Σ замыкающих прямых соответствия (1,2) огибает некоторую кривую (t), так что данный гомеоморфизм (1,2) всегда можно рассматривать как преобразование скольжения фундаментальных рядов через линию (t). Прямую, инцидентную избранной точке A_1 и касающуюся линии (t) (в характеристической точке T семейства Σ), считаем замыкающей для избранных точек.

Точки

$$A_1 \in (a_1); \quad A_2 \in (a_2); \ldots; A_n \in (a_n), \tag{1,3}$$

последовательно получаемые на криволинейных рядах (a_1), $(a_2), \ldots$ путем применения к какой-то точки A_1 преобразований (1,1) или вообще скольжений, будем называть основными. Основными прямыми назовем те, с помощью которых последовательно строятся основные точки (1,3). Основными отрезками будем считать отрезки между последовательными основными точками. Произведение любых скольжений назовем простым в том случае, когда все основные точки расположатся на одной прямой.

§ 2

Задание носителя криволинейного ряда

Пусть имеем линию скольжения (t_i) и криволинейный ряд (a_j). Положение каждой точки a_j ряда (a_j) вблизи основной точки A_j мы станем записывать в местной системе координат (x_{ji}, y_{ji}), начало которой находится в A_j и ось ординат которой касается (t_i). Число x_{ji} назовем поперечным перемещением точки a_j относительно основной прямой i-го скольжения.

Уравнение малого отрезка носителя (a_j) имеет вид

$$y_{ji} = M_{ji} x_{ji}^{m_{ji}} + M'_{ji} x_{ji}^{m'_{ji}} + \ldots, \tag{2,1}$$

где показатели — рациональные положительные возрастающие числа.

В частности, если, как это чаще всего бывает, (a_j) пересекает основной луч, не касаясь его (так выполнен рис. 1), то

$$y_{ji} = c_{ji} x_{ji} - F_{ji} x_{ji}^{e_j} + \ldots \tag{2,2}$$

где, считая, что порядок касания (a_j) к своей касательной λ_j равен e_j-1, коэфициент касания есть E_j и угол между прямой λ_j и основной прямой i-го скольжения равен α_{ji}, мы обозначим

$$\sin \alpha_{ji}=s_{ji}; \quad \operatorname{ctg} \alpha_{ji}=c_{ji}; \quad F_{ji}=E_i : s_{ji}^{1+e_j}. \tag{2,3}$$

§ 3

Запись гомеоморфизма криволинейных фундаментальных рядов

Записывая преобразование (1,2) вблизи избранных точек, мы будем указывать зависимость между поперечными относительно $\tau=A_1 A_n T$ перемещениями $x_{1\tau}$ и $x_{n\tau}$ соответствующих точек a_1 и a_n

$$x_{n\tau}=\tau_{\nu_1} x_{1\tau}^{\nu_1}+\tau_{\nu_2} x_{1\tau}^{\nu_2}+\ldots \tag{3,1}$$

Нет надобности в этой строке ограничиваться натуральными значениями показателей. Допускаем, что показатели являются рациональными, положительными и возрастающими числами.

§ 4

Квазиперспективное соответствие

Пусть ряд (a_i) проектируется на ряд (a_{i+1}) при помощи пучка P_i. Поперечные относительно основного луча перемещения соответствующих точек a_i и a_{i+1} обозначены x_{ii} и $x_{i+1,i}$. Ищем зависимость между ними.

Когда $D_{ji}=A_j P_i \neq 0$, спроектируем предварительно каждый ряд (a_j) при помощи P_i на ось x_{ji}. Обозначая символом x'_{ji} поперечное перемещение проекции точки a_j, можем записать (рис. 1)

$$x'_{ji}=x_{ji}+\frac{M_{ji}}{D_{ji}} x_{ji}^{1+m_{ji}}+\ldots, \tag{4,1}$$

причем оказывается, что ν-я степень в уравнении (2,1) меняет зависимость (4,1) на малую $\nu+1$-го порядка.

В обычном случае некасания носителя ряда к основному лучу, (4,1) дает

$$x'_{ji}=x_{ji}+\frac{c_{ji}}{D_{ji}} x_{ji}^2+\frac{c_{ji}^2}{D_{ji}^2} x_{ji}^3+\ldots-\frac{F_{ji}}{D_{ji}} x_{ij}^{1+e_j}+\ldots$$

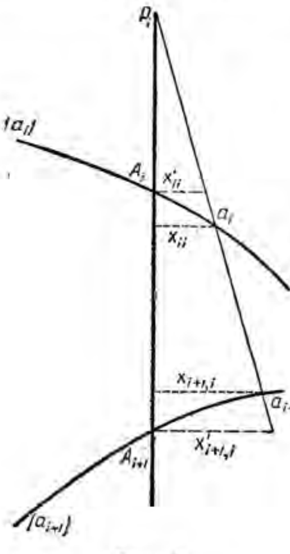

Рис. 1.

Исключим вспомогательные переменные из уравнений (4,1), написанных для $j=i;\ i+1$ и из равенства $x'_{i+1,i}=p_i x'_{ii}$, где применено обозначение

$$p_i=(A_{i+1} A_i P_i), \tag{4,2}$$

предложенное в аналогичном вопросе проф. Четверухиным [3]. Так мы получаем искомую зависимость

$$x_{i+1,i}=p_i x_{ii}+\frac{M_{ii}}{D_{ii}}p_i x_{ii}^{1+m_{ii}}+\ldots-\frac{M_{i+1,i}}{D_{i+1,i}}(p_i x_{ii})^{1+m_{i+1,i}}+\ldots \tag{4,3}$$

В частности, когда оба носителя не касаются основного луча, то

$$x_{i+1,i}=p_i x_{ii}+\frac{\varkappa_i}{D_{ii}}p_i x_{ii}^2+\frac{\varkappa_i^2}{D_{ii}^2}p_i x_{ii}^3+\ldots-$$

$$-\frac{F_{ii}}{D_{ii}}p_i x_{ii}^{1+e_i}+\ldots+\frac{F_{i+1,i}}{D_{ii}}p_i^{e_{i+1}}x_{ii}^{1+e_{i+1}}+\ldots, \tag{4,4}$$

где

$$\varkappa_i=c_{ii}-c_{i+1,i}. \tag{4,5}$$

Анализируя процесс вывода строки (4,3) мы можем утверждать:

Теорема 1. *Если между криволинейными рядами точек установлено квазиперспективное соответствие при помощи пучка с конечной вершиной, не принадлежащей преобразуемым рядам, то ν-я степень в уравнении (2,1) носителя каждого ряда изменяет зависимость (4,3) поперечных перемещений по этим рядам на малую $\nu+1$-го порядка.*

Если (a_{i+1}), не встречаясь с (a_i), проходит через P_i и касается там основного луча, то, как нетрудно вычислить, имеет место зависимость

$$x_{i+1,i}=\left(\frac{M_{i+1,i}}{A_{i+1}A_i}x_{ii}\right)^{\frac{1}{1-m_{i+1,i}}}+\ldots \tag{4,6}$$

§ 5

Замена проектирующего пучка

Имея некоторый участок криволинейного ряда (a_i) вблизи A_i, нам понадобится в (1,1) переходить от проектирования пучком P_{i-1} к проектированию пучком P_i. При этом между поперечными относительно обоих основных лучей перемещениями $x_{i,i-1}$ и x_{ii} точки a_i возникает зависимость вида

$$x_{ii}=K_{i,i-1}x_{i,i-1}^{k_{i,i-1}}+\ldots$$

Легко подсчитать, что чаще всего, когда ни один из основных лучей не касается носителя ряда, указанная зависимость есть

$$x_{ii}=\frac{s_{ii}}{s_{i,i-1}}x_{i,i-1}+E_i L_{i,i-1}\frac{s_{ii}}{s_{i,i-1}^2}x_{i,i-1}^2+\ldots,$$

где

$$L_{i,i-1}=c_{ii}-c_{i,i-1}.$$

При касании (a_i) к предыдущему основному лучу $k_{i,\,i-1}=e_i$, при касании (a_i) к очередному основному лучу $k_{i,\,i-1}=\dfrac{1}{e_i}$. Конечно, если оба направления на центры совпадают, то будет $x_{ii}=x_{i,\,i-1}$.

Подводя итог, мы замечаем, что всегда имеет место

Теорема 2. *При замене проектирующего пучка поперечные перемещения возводятся в степень с показателем, равным отношению увеличенных на единицу порядков касания криволинейного носителя к очередному и предыдущему основным лучам.*

§ 6

Квазипроективное соответствие

Чтобы перемножить квазиперспективные соответствия, как указано в (1,1), и записать вблизи избранных точек зависимость поперечных относительно τ перемещений $x_{1\tau}$ и $x_{n\tau}$ текущих точек a_1 и a_n, мы $n-1$ раз используем результаты § 4 для проектирований, а в промежутке между ними мы у каждой основной точки (1,3) производим замену предшествующего проектирующего пучка очередным пучком. Отсюда:

Теорема 3. *Если вершины пучков не принадлежат проектируемым из них криволинейным рядам точек, то в результате квазипроективного преобразования поперечные перемещения по фундаментальным рядам возводятся в степень с показателем, равным отношению произведений, увеличенных на единицу порядков касания носителей к очередным и предыдущим основным лучам.*

Это дает первый показатель строки (3,1).

Чаще всего, конечно, ни один из носителей не касается основных лучей. Проведя тут вычисления далее, мы запишем (3,1) в виде

$$x_{n\tau}=\tau_1 x_{1\tau}+\tau_2 x_{1\tau}^2+\ldots, \tag{6,1}$$

причем

$$\tau_1=p_1 p_2\ldots p_{n-1}\frac{s_{11}}{s_{1\tau}}\frac{s_{22}}{s_{21}}\ldots\frac{s_{n-1,\,n-1}}{s_{n-1,\,n-2}}\frac{s_{n\tau}}{s_{n,\,n-1}} \tag{6,2}$$

и

$$\tau_2=\bar{\tau}_2+\tau_2',$$

где

$$\bar{\tau}_2=\frac{\tau_1}{s_{11}}\left\{\varkappa_1\frac{s_{11}}{D_{11}}+\ldots+\varkappa_{n-1}p_1\ldots p_{n-2}\frac{s_{11}}{s_{21}}\ldots\frac{s_{n-2,\,n-2}}{s_{n-1,\,n-2}}\frac{s_{n-1,\,n-1}}{D_{n-1,\,n-1}}\right\} \tag{6,3}$$

и

$$\tau_2'=\frac{\tau_1}{s_{11}}\left\{E_1L_{1\tau}+\ldots+E_nL_{\tau,\,n-1}p_1\ldots p_{n-1}\frac{s_{11}}{s_{\ 1}}\ldots\frac{s_{n-1,\,n-1}}{s_{\tau,\,n-1}}\right\}. \tag{6,4}$$

На основании этого мы можем высказать следующее:

Теорема 4. *Пусть носители криволинейных рядов точек не проходят через вершины проектирующих пучков и не касаются основных лучей.*

Тогда в записи (6,1) квазипроективного преобразования:

1) коэфициент при первой степени поперечных перемещений зависит лишь от расположения центров и основных точек и от наклонов носителей,

2) если вершины пучков бесконечно удалены, то исчезает первое слагаемое (6,3) коэфициента при квадрате поперечных перемещений,

3) если радиусы кривизны носителей бесконечны или квазипроективное соответствие является простым, то исчезает второе, зависящее от кривизн слагаемое (6,4) коэфициента при квадрате поперечных перемещений.

§ 7

Лемма из кинематической геометрии

Теорема 5. *Независимо от касания отрезка переменной длины к траекториям его концов, предел отношения поперечных относительно отрезка перемещений концов равен простому отношению этих точек, взятых в том же порядке и характеристической точки.*

В самом деле, пусть отрезок A_1A_n переходит в соседнее положение a_1a_n. Пусть (t) — огибающая семейства Σ прямых a_1a_n. Принадлежащую прямой A_1A_n характеристическую точку семейства Σ обозначим через T.

Сперва считаем, что A_1A_n не касается траекторий (a_1) и (a_n) концов отрезка. Тогда, согласно Манхейму [4], мы можем записать, что асимптотически

$$\frac{A_na_n}{A_1a_1}\approx\frac{A_nC_n}{A_1C_1}, \tag{7,1}$$

где для номеров $p=1;n$ буква C_p обозначает мгновенный центр вращения отрезка A_1A_n постоянной длины, когда его точка A_p движется по (a_p). Мгновенный центр C_p находится на пересечении нормали к (a_p) в A_p с нормалью к (t) в T. Умножая компоненты асимптотического равенства (7,1) на соответственные синусы $s_{p\tau}$ (§ 2), мы получим для поперечных относительно τ перемещений $x_{p\tau}$ новую асимптотическую зависимость

$$\frac{x_{n\tau}}{x_{1\tau}}\approx(A_nA_1T). \tag{7,2}$$

откуда следует, что теорема 5 верна для отрезка A_1A_n, не касающегося ни одной из линий (a_p).

Не меняя (t), поворачиваем какую-либо или обе кривые (a_p) вокруг избранных точек. В асимптотическом равенстве (7,2) правая часть остается неизменной, а компоненты левой части меняются на бесконечно малые высших порядков. Следовательно, доказываемая теорема верна и при касаниях отрезка A_1A_n к траекториям его концов.

§ 8

Положение характеристической точки

Из теоремы 5 имеем

Теорема 6. *Если зависимость поперечных относительно* τ *перемещений соответственных точек по фундаментальным кривым, не встречающимся в избранных точках, дана строкой (3,1), в которой* $\nu_1 \left\{\begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix}\right\} 1$, *то* $\left\{\begin{matrix} T \equiv A_1 \\ T \equiv A_n \\ (A_nA_1T) = \tau_1 \end{matrix}\right\}$.

Отсюда и, опираясь на теорему 3, а также на формулы (6,2) и (4,2), мы получаем:

Теорема 7. 1. *При квазипроективном преобразовании фундаментальных рядов с невстречающимися носителями для попадания характеристической точки на* $\left\{\begin{matrix} (a_1) \\ (a_n) \end{matrix}\right\}$ *необходимо и достаточно, чтобы произведение увеличенных на единицу порядков касания носителей к очередным основным лучам было* $\left\{\begin{matrix} \text{менее} \\ \text{более} \end{matrix}\right\}$, *чем к предыдущим.*

2. *Если вершины пучков не принадлежат к проектируемым из них рядам и основные лучи не касаются носителей рядов, то произведение простых отношений основных точек к вершинам пучков и к характеристической точке равно произведению простых отношений основных лучей к малым отрезкам носителей и к замыкающей прямой.*

Глава II

ЗАМЕНА ГОМЕОМОРФИЗМА КРИВОЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ ДВУМЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯМИ

§ 9

Замечательные точки

Рассмотрим двухступенное простое квазипроективное соответствие

$$(a_1) \overset{P_e}{\overline{\overline{\Lambda}}} (a_*) \overset{P_c}{\overline{\overline{\Lambda}}} (a_n) \tag{9,1}$$

между данными фундаментальными рядами через промежуточный ряд (a_*) при помощи двух несовпадающих вспомогательных центров проектирования P_e и P_c (рис. 2). Общий основной луч такого преобразования назовем о с ь ю.

На оси мы насчитываем шесть замечательных точек: A_1, P_e, A_*, P_c, A_n, T. Из очевидного тождества

$$\frac{x_{*\tau}}{x_{1\tau}} \cdot \frac{x_{n\tau}}{x_{*\tau}} \cdot \frac{x_{1\tau}}{x_{n\tau}} = 1$$

и, ссылаясь на теорему 5, мы обнаружим, что замечательные точки связаны условием

$$(A_* A_1 P_e)\,(A_n A_* P_c)\,(A_1 A_n T) = 1. \qquad (9,2)$$

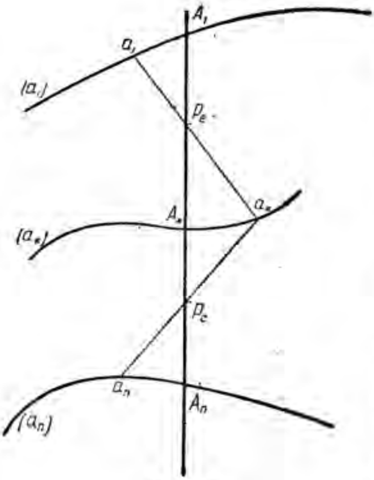

Рис. 2.

Полученное равенство можно переписать:

$$A_n P_c \cdot A_1 T \cdot A_* P_e = A_1 P_e \cdot A_n T \cdot A_* P_c.$$

Сопоставляя это с метрическим свойством инволюции, как оно подано у Н. А. Глаголева [5], мы видим, что имеет место:

Т е о р е м а 8. *Замечательные точки оси находятся в инволюции; соответственными являются* A_1 и P_c; A_* и T; A_n и P_e.

При раздельных избранных точках мы будем иногда помещать каждый центр проектирования на „чужой" фундаментальной кривой, $P_e \equiv A_n$; $P_c \equiv A_1$, называя такое расположение точек м и н и м а л ь н ы м. Число различных между собою замечательных точек уменьшается при этом на две.

Из теоремы 8 следует:

Т е о р е м а 9. *В минимальном расположении замечательных точек оси избранные точки гармонически разделяют промежуточную точку и характеристическую.*

Будем называть с п е ц и а л ь н ы м расположением замечательных точек тот случай, когда избранные точки A_1 и A_n сливаются, $A_1 \equiv A_n = A$. Тут (9,2) дает $(A A_* P_e P_c) = 1$. Отсюда мы приходим к выводу, что в специальном расположении все три основные точки совпадают,

$$A_1 \equiv A_* \equiv A_n \equiv A. \qquad (9,3)$$

§ 10

Запись простого двухступенного квазипроективного соответствия

Прямая τ служит основным лучом как в преобразовании (9,1), так и в обоих составляющих его квазиперспективных соответствиях. Поэтому на каждом из трех криволинейных рядов (a_1), (a_*), (a_n) мы должны рассматривать перемещения относительно прямой τ.

Уравнения (2,1) для фундаментальных линий и промежуточной линии имеют вид

$$y_{1\tau}=M_{1\tau}x_{1\tau}^{m_{1\tau}}+\ldots;\quad y_{*\tau}=M_{*\tau}x_{*\tau}^{m_{*\tau}}+\ldots;\quad y_{n\tau}=M_{n\tau}x_{n\tau}^{m_{n\tau}}+\ldots \tag{10,1}$$

Запишем (9,1), когда основные отрезки не исчезают. Применив (4,3) для номеров $i=1$ и $i=*$, мы получим

$$x_{n\tau}=\tau_1 x_{1\tau}+V_1 x_{1\tau}^{1+m_{1\tau}}+\ldots+V_* x_{1\tau}^{1+m_{*\tau}}+\ldots+V_n x_{1\tau}^{1+m_{n\tau}}+\ldots, \tag{10,2}$$

где

$$\tau_1=p_1 p_2;\quad p_1=(A_* A_1 P_e);\quad p_2=(A_n A_* P_c); \tag{10,3}$$

$$V_1=\frac{\tau_1}{A_1 P_e}M_{1\tau};\quad V_*=\frac{P_e P_c}{P_e A_*\cdot A_* P_c}p_1^{1+m_{*\tau}}\,p_2 M_{*\tau};\quad V_n=\frac{\tau_1^{1+m_{n\tau}}}{P_c A_n}M_{n\tau}.$$

Оказывается, что тут строка (3,1) имеет низший показатель $\nu_1=1$ и если обозначить

$$m=\min(m_{1\tau},\ m_{*\tau},\ m_{n\tau}), \tag{10,4}$$

то в этой строке

$$\nu_2=1+m. \tag{10,5}$$

Применим индекс s для номеров тех $m_{i\tau}$, для которых

$$m_{i\tau}=m. \tag{10,6}$$

Тогда в (10,2)

$$\tau_{\nu_2}=\tau_{1+m}=\Sigma V_s. \tag{10,7}$$

Если, как это обычно бывает, ни одна из кривых (10,1) не касается оси, то, применив (4,4) для номеров $i=1$ и $i=*$, мы получим (10,2) в виде

$$x_{n\tau}=\tau_1 x_{1\tau}+\tau_2 x_{1\tau}^2+\bar{\tau}_3 x_{1\tau}^3+\ldots-p_1 p_2\frac{F_{1\tau}}{D_{1e}}x_{1\tau}^{1+e_1}+\ldots$$

$$\ldots+p_1^{e_*}p_2\left(\frac{1}{D_{1e}}-\frac{p_1}{D_{*e}}\right)F_{*\tau}x_{1\tau}^{1+e_*}+\ldots+p_1^{1+e_n}p_2^{e_n}\frac{F_{n\tau}}{D_{*e}}x_{1\tau}^{1+e_n}+\ldots, \tag{10,8}$$

где

$$\tau_2=\frac{\tau_1}{A_1 P_e\cdot A_* P_c}\left[c_{1\tau}\cdot A_* P_c+c_{*\tau}\cdot P_c P_e+c_{n\tau}\cdot P_e A_*\right] \tag{10,9}$$

и где

$$\bar{\tau}_3=\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2 \tag{10,10}$$

является той частью коэфициента τ_3, которая не зависит от более тонких свойств носителей, чем их наклоны.

Когда в минимальном расположении замечательных точек промежуточная точка находится на одной из фундаментальных кривых, например,

$$A_{*} \equiv A_n, \tag{10,11}$$

то соответствие (9,1) запишется благодаря (4,6) так:

$$x_{n'} = \left(\frac{M_{*\tau}}{A_n A_1} x_1{}^{\tau}\right)^{\frac{1}{1-m_{*\tau}}} + \dots \tag{10,12}$$

§ 11

Промежуточный ряд

Теорема 10. *Любое одно-однозначное и взаимно непрерывное соответствие фундаментальных криволинейных рядов точек может быть представлено двухступенным квазипроективным соответствием.*

Предложение это относится к каждому гомеоморфизму (1,2), в том числе и к квазипроективному соответствию (1,1) с любым количеством ступеней.

Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно на прямой τ, замыкающей избранные точки, принять какие-нибудь P_e и P_c за центры (рис. 2), а в качестве промежуточного ряда (a_{*}) взять геометрическое место точек встречи прямых $P_e a_1$ и $P_c a_n$, где a_1 и a_n отвечают друг другу в данном гомеоморфизме (1,2).

Мы обнаружили существование такой промежуточной кривой (a_{*}), при помощи которой данный гомеоморфизм (1,2), записанный в (3,1), можно заменить двумя проектированиями. Теперь, применим уже разработанный аппарат для исследования ряда (a_{*}).

Точку A_{*} назовем промежуточной основной точкой. Касательную λ_{*} и (a_{*}) в A_{*} назовем промежуточной касательной.

Имея теоремы 6 и 8, мы всегда знаем, где на оси находится промежуточная точка. Поэтому, не только для данных фундаментальных кривых, но и для искомой промежуточной можно считать заданными местные системы координат.

Основой для дальнейшего исследования ряда (a_{*}) служит следующая

Теорема 11. *Для определения коэфициентов искомого уравнения промежуточной кривой до ν-й степени включительно необходимо и достаточно задать поперечные перемещения по фундаментальным линиям до малых $\nu+1$-го порядка включительно.*

Это предложение мы выводим из теоремы 1, пользуясь тем, что из центров P_e и P_c хоть один находится на конечном расстоянии.

§ 12

Промежуточный носитель, не касающийся оси

В этом параграфе мы будем считать, что заданная строка (3,1) начинается так:

$$x_{n\tau} = \tau_1 x_{1\tau} + \tau_{\nu_2} x_{1\tau}^{\nu_2} + \ldots \tag{12,1}$$

$$\nu_2 \geqslant 2 \tag{12,2}$$

и что при этом

Теорема 12. *Если фундаментальные ряды* (a_1) *и* (a_n) *не касаются оси* τ *и в зависимости между поперечными относительно* τ *перемещениями соответствующих точек* a_1 *и* a_n *показатель степени ближайшей за первой является числом не меньшим, чем два, то направление промежуточной касательной: 1) отлично от оси, 2) определяется поперечными перемещениями с точностью до квадратов включительно, 3) не зависит от более тонких свойств фундаментальных кривых, чем их наклоны у избранных точек.*

Действительно, первая часть следует благодаря (12,2) из теоремы 6 и 8 и формул (10,5) и (10,4), вторую мы получим на основании первой, применяя теорему 11 к $\nu=1$, а третья часть доказываемой теоремы имеет место из-за третьей части теоремы 4.

Если второй показатель в (13,1) действительно превышает двойку, будем считать, что там есть и квадрат, но с коэфициентом нуль, причем настоящий второй член не будет оказывать влияния на λ_*.

На основании второй части теоремы 12 можем написать из (10,9) и (10,3)

$$c_{1\tau} \cdot A_* P_e + c_{*\tau} \cdot P_c P_e + c_{n\tau} \cdot P_e A_* = \tau_2 \frac{A_1 P_e^2 \cdot A_* P_c^2}{A_* P_e \cdot A_n P_c},$$

откуда

$$c_{*\tau} = c_{1\tau} (A_* P_e P_c) + c_{n\tau} (A_* P_c P_e) + \tau_2 \frac{A_1 P_e^2 \cdot P_c A_*^2}{A_* P_e \cdot P_e P_c \cdot P_c A_n}. \tag{12,3}$$

Уже зная $c_{*\tau}$, мы можем установить отклонение промежуточной кривой от λ_*. Тут только нужно подобрать в (2,2) такие e_* и $F_{*\tau}$, чтобы первые члены строки (3,1) совпали с первыми членами в (10,8). При этом дело упрощается тем, что в (10,8) мы можем считать известными все члены, коэфициенты которых зависят лишь от наклонов носителей, ибо, найдя $c_{*\tau}$, мы знаем все три котангенса. Чаще всего задача будет решаться при помощи кубов поперечных перемещений. Тогда нужно будет обратиться к (10,8) и (10,10).

В заключение остановимся на одном свойстве встречающихся рядов.

Теорема 13. *Если в избранных точках фундаментальные кривые встречаются, не касаясь оси, и если в зависимости между поперечными перемещениями показатель степени ближайшей за первой есть число не менее двух, то ангармоническое отношение промежуточной касатель-*

ной, фундаментальных касательных и оси равно отношению четырех точек — характеристической, центров и слившихся избранных точек,

$$(\lambda_* \lambda_n \lambda_1 \tau) = (TP_eP_cA). \tag{12,4}$$

Для доказательства замечаем, что (12,3) дает для (9,3)

$$c_{*\tau} = c_{1\tau}(AP_eP_c) + c_{n\tau}(AP_cP_e) + \tau_2 \frac{AP_e \cdot P_cA}{P_eP_c}.$$

Этому выражению при помощи (4,4) и (4,5) можно придать вид

$$c_{*\tau} = c_{1\tau}(AP_eP_c) + c_{n\tau}(AP_cP_e) - (AP_eP_c)(P_eTA)(c_{1\tau} - c_{n\tau}). \tag{12,5}$$

Вычислим левое отношение (12,4)

$$(\lambda_* \lambda_n \lambda_1 \tau) = \frac{c_{1\tau} - c_{*\tau}}{c_{1\tau} - c_{n\tau}}.$$

Воспользуемся тут формулой (12,5)

$$(\lambda_* \lambda_n \lambda_1 \tau) = (AP_cP_e) + (AP_eP_c)(P_eTA).$$

Упростив, мы приходим к ангармоническому отношению, составляющему правую часть равенства (12,4).

§ 13

Ось в роли касательной

Продолжаем изучение промежуточной кривой (a_*) при том же единичном начальном показателе строки (12,1), что обеспечивает в случае минимального расположения замечательных точек оси их раздельность. В предыдущем параграфе мы требовали, чтобы выполнялось условие (12,2) для (12,1) и условие

$$m_{1\tau};\ m_{n\tau} \geqslant 1 \tag{13,1}$$

для крайних уравнений (10,1). Рассмотрим остальные возможности.

Пусть не выполнено хоть одно из условий (12,2), (13,1). Тогда

$$\min(\nu_2 - 1;\ m_{1\tau},\ m_{n\tau}) = m < 1. \tag{13,2}$$

Приравняем ближайшие за первыми степенями члены в (12,1) и в (10,2). Придерживаясь обозначения (10,6), мы можем записать равенство (10,7), рассматривая его как уравнение относительно $M_{*\tau}$. По большей части это уравнение дает для промежуточной линии неисчезающий коэфициент при степени с показателем (13,2). Тогда

$$m_{*\tau} = m < 1, \tag{13,3}$$

то есть промежуточная кривая касается оси. Итак.

Т е о р е м а 14. *Если хоть одна из фундаментальных кривых касается оси или в зависимости между поперечными перемещениями (3,1) показатель степени ближайшей за первой является числом меньшим чем два, то, вообще говоря, промежуточная кривая также касается оси.*

Для невстречающихся фундаментальных кривых осталось рассмотреть тот случай, когда низший показатель в (3,1) отличен от единицы. Пусть $\nu_1 > 1$. Тогда, как это следует из теорем 6 и 9, промежуточная точка A_* совпадает с A_n. Нам предстоит при этом по крайним уравнениям (10,1) найти среднее. Для этого сравниваем его с (10,12). Получаем

$$\frac{1}{1-m_{*\iota}} = \nu_1, \tag{13,4}$$

так что мы снова приходим к (13,3) и к выводу о касании промежуточной кривой к оси в (10,11).

Из (13,4) можно вычислить порядок этого касания, а сравнивая (3,1) с (10,12) — и коэфициент касания.

Когда же, наоборот, $\nu_1 < 1$, то, рассмотрев обратное преобразование, мы придем к аналогичным результатам у точки A_1.

Теорема 15. *Если в зависимости между поперечными перемещениями по невстречающимся фундаментальным рядам ближайший показатель степени в строке (3,1) удовлетворяет неравенству* $\nu_1 \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 1$, *то промежуточная линия касается оси в* $\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_n \end{Bmatrix}$.

Поступило 15.V 1950.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Schwerdt, Das Prinzip der Gleitkurwen, „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“ B. 4, H. 4. (1924).

2. Г. Швердт, Номография на основе геометрии отображения, (1935).

3. Н. Ф. Четверухин, Геометрические построения и приближения (1935).

4. A. Mannheim, Principes et développment de géométrie cinématique, (1894).

5. Н. А. Глаголев, Проективная геометрия (1936).

Поступило 15. V 1950.