1950 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. II, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Предельные теоремы для сумм положительных случайных величин

А. Я. Хинчин

Введение

В ряде исследований за последние годы автор настоящей статьи показал [1]), что строгий вывод асимптотических формул физической статистики, обычно требующий создания специального, весьма громоздкого аналитического аппарата, может быть во всех случаях проведен вполне элементарно, если опираться на готовый аналитический аппарат теории вероятностей. Более внимательный анализ того „моста", который при этом связывает задачи физической статистики с предельными законами теории вероятностей, показывает, однако, что расчетные формулы как классической, так и квантовой статистической термодинамики могут быть получены в качестве прямых следствий некоторых предельных теорем теории вероятностей; эти теоремы, правда, до сих пор, повидимому, нигде не были опубликованы; однако они, несомненно, представляют и самостоятельный интерес, так как, с одной стороны, позволяют исследовать поведение законов распределения сумм независимых случайных величин в таких областях, которые не охватываются обычной их трактовкой, а с другой, — не требуют для своего обоснования никакого нового аппарата, будучи легко получаемыми следствиями классических предельных закономерностей.

§ 1—2 настоящей статьи содержат обоснование нескольких новых предельных теорем для сумм независимых случайных величин, принимающих только неотрицательные значения. В § 3 мы останавливаемся на той особой форме, в которой эти теоремы находят себе применение в физической статистике. Наконец, § 4 содержит краткий очерк нескольких физических приложений установленных теорем, имеющий целью иллюстрировать общую схему таких приложений.

---

[1]) А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики, 1943; А. Я. Хинчин, Об аналитическом аппарате физической статистики, труды МИАН им. Стеклова, вып. XXXIII, Изд. Академии наук СССР, 1950.

§ 1. Основные предельные теоремы

В настоящей статье мы будем всегда рассматривать случайные величины, способные принимать лишь неотрицательные значения. Такую величину мы будем характеризовать локальной функцией распределения („плотностью вероятности“) $\omega(x)$, которую ради краткости будем просто называть законом распределения данной случайной величины; таким образом, всегда

$$\omega(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x < +\infty), \quad \int_0^\infty \omega(x)\, dx = 1.$$

Закон распределения суммы n взаимно независимых случайных величин, каждая из которых распределена по закону $\omega(x)$, дается тогда известным „правилом композиции“

$$\Omega_n(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n-1} \omega(x_1) \ldots \omega(x_{n-1})\, \omega\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{1}$$

где интеграция распространяется на все пространство $n-1$ измерений. Пусть закон $\omega(x)$ имеет математическое ожидание

$$a = \int_0^\infty x\omega(x)\, dx$$

и дисперсию

$$b = \int_0^\infty (x-a)^2 \omega(x)\, dx.$$

Известно, что в случае, когда функция $\omega(x)$ удовлетворяет некоторым требованиям общего характера, локальные предельные теоремы теории вероятностей дают для функции $\Omega_n(x)$ простые и точные асимптотические выражения, позволяющие исследовать ее вблизи значения $x = na = A$, совпадающего с математическим ожиданием закона $\Omega_n(x)$. Природа этих асимптотических выражений такова, что они действительно могут служить главными членами для $\Omega_n(x)$, вообще говоря, лишь в области $|x - na| = O(\sqrt{n})$, а в наиболее простых случаях — в области $|x - na| = O(n)$[1]. Между тем, нас будет интересовать поведение функции $\Omega_n(x)$ вблизи значения $x = n\alpha$, где α — любое положительное число, *меньшее чем* a и предполагаемое постоянным (то есть не зависящим от n). Очевидно, что эта область лежит вне вышеуказанных границ применимости локальных предельных теорем; мы убе-

---

[1]) Это последнее расширение, впрочем, самими локальными предельными теоремами еще не дается, а может быть получено лишь как результат добавочного исследования.

димся, однако, что с помощью очень простого искусственного приема классические локальные предельные теоремы могут быть использованы для установления и в этой области удобных и обладающих значительной точностью асимптотических выражений закона $\Omega_n(x)$.

Пусть нам задано число α $(0<\alpha<a)$, и пусть β — произвольное неотрицательное число. Положим

$$\int_0^\infty \omega(x)\, e^{-\beta x}\, dx = \varphi(\beta), \quad e^{\alpha\beta}\varphi(\beta) = \varphi_\alpha(\beta), \quad (0 \leqslant \beta < +\infty),$$

и рассмотрим поведение $\varphi_\alpha(\beta)$ как функции от β, предполагая α постоянным. При $\beta=0$ мы, очевидно, имеем $\varphi_\alpha(0)=\varphi(0)=1$. С другой стороны,

$$\varphi_\alpha(\beta) = e^{\alpha\beta}\int_0^\infty \omega(x)\, e^{-\beta x}\, dx \geqslant e^{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \omega(x)\, e^{-\beta x}\, dx =$$

$$= e^{\frac{\alpha\beta}{2}}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \omega(x)\, e^{\beta\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)}\, dx > e^{\frac{\alpha\beta}{2}}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \omega(x)\, dx \to \infty$$

при $\beta\to\infty$. При этом мы сделали допущение, которое сохраним и во всем дальнейшем, что $\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \omega(x)\, dx > 0$ при любом $\alpha>0$, то есть, что величина, распределенная по закону $\omega(x)$, может принимать сколь угодно малые положительные значения.

Далее, мы имеем при постоянном α $(0<\alpha<a)$

$$\frac{d \ln \varphi_\alpha(\beta)}{d\beta} = \alpha + \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)}; \tag{2}$$

а так как

$$\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = -\int_0^\infty x\omega(x)\, dx = -a,$$

то при $\beta=0$

$$\frac{d \ln \varphi_\alpha(\beta)}{d\beta} = \alpha - a < 0.$$

Таким образом, функция $\ln \varphi_\alpha(\beta)$ при $\beta=0$ равна нулю и имеет отрицательную производную, а при $\beta\to\infty$ безгранично возрастает;

кроме того, эта функция выпукла на всей полупрямой $0 \leqslant \beta < +\infty$, так как в силу (2)

$$\frac{d^2 \ln \varphi_\alpha(\beta)}{d\beta^2} = \frac{d^2 \ln \varphi(\beta)}{d\beta^2} = \frac{\varphi(\beta)\varphi''(\beta) - \{\varphi'(\beta)\}^2}{\{\varphi(\beta)\}^2} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^2 \omega(x)\,\omega(y)\,e^{-\beta(x+y)}\,dx\,dy - \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty xy\omega(x)\,\omega(y)\,e^{-\beta(x+y)}\,dx\,dy}{\{\varphi(\beta)\}^2} =$$

$$= \frac{1}{\{\varphi(\beta)\}^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (x^2 - xy)\,\omega(x)\,\omega(y)\,e^{-\beta(x+y)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\{\varphi(\beta)\}^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (x-y)^2\,\omega(x)\,\omega(y)\,e^{-\beta(x+y)}\,dx\,dy > 0.$$

Совокупность доказанных нами свойств функции $\ln \varphi_\alpha(\beta)$ очевидно показывает, что эта функция имеет на полупрямой $0 \leqslant \beta < +\infty$ единственный положительный минимум β и что в этой точке минимума $\ln \varphi_\alpha(\beta) < 0$, и значит $\varphi_\alpha(\beta) < 1$. В дальнейшем мы под β всегда будем понимать именно то значение этого параметра, при котором функция $\varphi_\alpha(\beta)$ получает свое наименьшее значение. В силу вышедоказанного, β есть, таким образом, однозначная убывающая функция от α, равная нулю при $\alpha = a$ и безгранично возрастающая при $\alpha \to 0$.

Положим теперь

$$\int\limits_0^\infty \Omega_n(x)\,e^{-\beta x}\,dx = \Phi_n(\beta);$$

из теории преобразований Лапласа известно, что

$$\Phi_n(\beta) = \{\varphi(\beta)\}^n. \tag{3}$$

Далее, положим

$$\frac{1}{\varphi(\beta)}\,e^{-\beta x}\,\omega(x) = u(x), \qquad \frac{1}{\Phi_n(\beta)}\,e^{-\beta x}\,\Omega_n(x) = U_n(x), \tag{4}$$

так что $u(x)$ и $U_n(x)$ — плотности некоторых законов распределения (неотрицательных случайных величин). Подставляя в соотношение (1) вместо $\Omega_n(x)$ и $\omega(x)$ их выражения из соотношений (4), мы находим после очевидных сокращений

$$U_n(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n-1} u(x_1) \ldots u(x_{n-1})\,u\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

так что $U_n(x)$ есть закон распределения суммы n взаимно независимых случайных величин, каждая из которых распределена по закону $u(x)$. Но закон $u(x)$ имеет математическое ожидание

$$\frac{1}{\varphi(\beta)}\int\limits_0^\infty x\omega(x)\,e^{-\beta x}\,dx = -\frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)};$$

при этом β имеет то значение параметра, обозначавшегося ранее той же буквой, при котором $\ln\varphi_\alpha(\beta)$ получает свое наименьшее значение и, следовательно,

$$\frac{d\ln\varphi_\alpha(\beta)}{d\beta} = \alpha + \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = 0, \quad -\frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = \alpha,$$

так что закон $u(x)$ имеет математическое ожидание α, а следовательно, закон $U_n(x)$ — математическое ожидание $n\alpha$. Локальные предельные теоремы позволяют поэтому непосредственно написать асимптотическое выражение функции $U_n(x)$ вблизи значения $x=n\alpha$; мы получаем, например [1]),

$$U_n(n\alpha+y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}}\,e^{-\frac{y^2}{2nb'}} + O\left(\frac{1+|y|}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{5}$$

где через b' обозначена дисперсия закона $u(x)$, равная, как легко видеть,

$$\frac{d^2\ln\varphi(\beta)}{d\beta^2}.$$

В частности,

$$U_n(n\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

откуда, в силу второго из соотношений (4),

$$\Omega_n(n\alpha) = \Phi_n(\beta)\,e^{\beta n\alpha}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \{e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)\}^n\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

Мы приходим, таким образом, к следующему предложению:

Теорема 1. *Пусть α — постоянное число $(0<\alpha<a)$; положим*

$$\int\limits_0^\infty \omega(x)\,e^{-\beta x}\,dx = \varphi(\beta)$$

и определим β как корень уравнения

$$\alpha + \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = 0; \tag{6}$$

[1]) См., например, *), 1), Приложение.

тогда при $n \to \infty$

$$\Omega_n(n\alpha) = \{e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)\}^n \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi n b'}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}, \tag{7}$$

где $b' = \dfrac{d^2 \ln \varphi(\beta)}{d\beta^2}$.

В этой формулировке не перечислены требования, которым должен удовлетворять исходный закон распределения $\omega(x)$. Кроме предпосылок общего характера, обеспечивающих возможность применения локальных предельных теорем к суммам независимых величин, распределенных по закону $u(x)$, мы сделали еще специальное допущение, что

$$\int_0^{\varepsilon} \omega(x)\, dx > 0 \tag{8}$$

при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Разумеется, величина $e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)$, фигурирующая в правой части формулы (7), является однозначной функцией числа α $(0 < \alpha < a)$, и при любом из этих значений α заключена между нулем и единицей.

Заметим теперь, что во всем предыдущем формула (5) была нами использована только в предположении $y = 0$. В общем случае, в силу

$$e^{-\frac{y^2}{2nb'}} = 1 + O\left(\frac{y^2}{n}\right),$$

формула (5) дает

$$U_n(n\alpha + y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n b'}} + O\left(\frac{1+y^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

В силу второго из соотношений (4) мы получаем отсюда

$$\Omega_n(n\alpha + y) = \Phi_n(\beta)\, e^{\beta(n\alpha + y)} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi n b'}} + O\left(\frac{1+y^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} =$$

$$= \{e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)\}^n e^{\beta y} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi n b'}} + O\left(\frac{1+y^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}. \tag{9}$$

Сопоставляя же это с формулой (7), легко находим:

Теорема 2. *В обозначениях теоремы 1 мы имеем при* $n \to \infty$

$$\frac{\Omega_n(n\alpha + y)}{\Omega_n(n\alpha)} = e^{\beta y}\left\{1 + O\left(\frac{1+y^2}{n}\right)\right\}. \tag{10}$$

§ 2. Условный закон распределения компоненты

Обозначим через S сумму n взаимно независимых случайных величин, распределенных по закону $\omega(x)$, и пусть S_1 означает сумму первых k $(0 < k < n)$ из этих величин, а S_2 — сумму остальных $n-k$ величин, так что

$$S = S_1 + S_2,$$

и суммы S_1 и S_2 взаимно независимы. Каждую из этих сумм мы будем называть **компонентою** суммы S; очевидно, что законы распределения сумм S, S_1, S_2 соответственно даются функциями $\Omega_n(x)$, $\Omega_k(x)$, $\Omega_{n-k}(x)$. Если известно, что сумма S получила значение A, то каждая из компонент S_1 и S_2 получает определенный условный закон распределения, который в силу теоремы Бейеса выражается для компоненты S_1 формулой

$$W(x)=\frac{\Omega_k(x)\,\Omega_{n-k}(A-x)}{\Omega_n(A)} \tag{11}$$

(так как, если $S_1=x$, то для $S=A$ необходимо и достаточно иметь $S_2=A-x$).

Нас будет интересовать асимптотическая оценка величины (11) при $n\to\infty$. Очевидно, что для получения определенной постановки задачи мы должны при этом установить характер изменения числа k. И для теории, и для тех приложений, которые мы имеем в виду, наиболее важными представляются в этом отношении два случая, рассмотрением которых мы поэтому и ограничимся в дальнейшем. Первый случай состоит в том, что k и $n-k$ являются бесконечно большими порядка n; иначе говоря, отношение $\frac{k}{n}$ при $n\to\infty$ остается заключенным между двумя положительными границами. В этом случае мы будем называть S_1 **большой компонентой** суммы S. Второй случай состоит в том, что при $n\to\infty$ число k остается постоянным; в этом случае мы будем называть S_1 **малой компонентой** суммы S. Найдем теперь асимптотические выражения для условных законов распределения большой и малой компонент в предположении, что $S=A=n\alpha$.

Рассмотрим случай большой компоненты и положим в выражении (11) $A=n\alpha$, $x=k\alpha+y$, где при $n\to\infty$ числа k и $n-k$ — бесконечно большие порядка n. Формула (9) § 1 нам дает

$$\Omega_n(A)=\Omega_n(n\alpha)=\{\varphi(\beta)\}^n\,e^{\alpha\beta n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\},$$

$$\Omega_k(x)=\Omega_k(k\alpha+y)=\{\varphi(\beta)\}^k\,e^{\beta(k\alpha+y)}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}}+O\left(\frac{1+y^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\},$$

$$\Omega_{n-k}(A-x)=\Omega_{n-k}[(n-k)\alpha+y]=\{\varphi(\beta)\}^{n-k}\,e^{\beta[(n-k)\alpha+y]}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi nb'}}+O\left(\frac{1+y^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}.$$

Внося эти выражения в формулу (11), производя подсчеты и полагая

$$\frac{k(n-k)}{n}=n^*,$$

мы легко находим

$$W(k\alpha+y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n^*b'}}\,e^{-\frac{y^2}{2n^*b'}}+O\left(\frac{1+|y|}{n^2}\right).$$

Мы видим, таким образом, что условное распределение компоненты S_1, состоящей из k слагаемых, представляется асимптотически нормальным законом с центром $k\alpha$ и дисперсией

$$n^* b' = \frac{k(n-k)}{n} \frac{d^2 \ln \varphi(\beta)}{d\beta^2}.$$

Этот результат можно формулировать следующим образом:

Теорема 3 (закон распределения большой компоненты). *Пусть α постоянно, $0 < \alpha < a$, $\varphi(\beta) = \int\limits_0^\infty \omega(x) e^{-\beta x} dx$, и β есть корень уравнения*

$$\alpha + \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = 0.$$

Положим $b' = d^2 \ln \varphi(\beta) / d\beta^2$ и допустим, что числа n, k и $n-k$ безгранично возрастают, причем k и $n-k$ имеют порядок n. Тогда, полагая $n^* = k(n-k)/n$, мы имеем

$$\frac{\Omega_k(k\alpha + y)\, \Omega_{n-k}[(n-k)\alpha - y]}{\Omega_n(n\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^* b'}} e^{-\frac{y^2}{2n^* b'}} + O\left(\frac{1+|y|}{n^2}\right).$$

Переходя теперь к случаю малой компоненты, будем считать число k постоянным при $n \to \infty$; тогда множитель $\Omega_k(x)$ в выражении (11) сохраняет при $n \to \infty$ неизменное значение. Полагая снова $A = n\alpha$, мы находим в силу формулы (9) § 1

$$\Omega_{n-k}(n\alpha - x) = \Omega_{n-k}[(n-k)\alpha + k\alpha - x] =$$
$$= \{\varphi(\beta)\}^{n-k} e^{\beta(n\alpha - x)} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi b'(n-k)}} + O\left(\frac{1+x^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\};$$

поэтому, пользуясь для выражения $\Omega_n(n\alpha)$ формулой (7) § 1, мы находим

$$\frac{\Omega_{n-k}(n\alpha - x)}{\Omega_n(n\alpha)} = \frac{e^{-\beta x}}{\{\varphi(\beta)\}^k} \left\{\frac{\sqrt{\frac{n}{n-k}} + O\left(\frac{1+x^2}{n}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}\right\} =$$
$$= \frac{e^{-\beta x}}{\{\varphi(\beta)\}^k} \left\{1 + O\left(\frac{1+x^2}{n}\right)\right\}. \tag{12}$$

Замечая, что в силу соотношения (3) § 1

$$\{\varphi(\beta)\}^k = \Phi_k(\beta) = \int\limits_0^\infty \Omega_k(x) e^{-\beta x} dx,$$

мы находим для величины (11) асимптотическое выражение

$$W(x) = \frac{\Omega_k(x)\,e^{-\beta x}}{\Phi_k(\beta)}\left\{1 + O\left(\frac{1+x^2}{n}\right)\right\} = U_k(x)\left\{1 + O\left(\frac{1+x^2}{n}\right)\right\}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

Теорема 4 (закон распределения малой компоненты). *Пусть в обозначениях теоремы 3 число k остается постоянным при $n \to \infty$, тогда*

$$\frac{\Omega_k(x)\,\Omega_{n-k}(n\alpha - x)}{\Omega_n(n\alpha)} = U_k(x)\left\{1 + O\left(\frac{1+x^2}{n}\right)\right\}, \tag{13}$$

где

$$U_k(x) = \frac{\Omega_k(x)\,e^{-\beta x}}{\int\limits_0^\infty \Omega_k(z)\,e^{-\beta z}\,dz}.$$

Таким образом, определенный нами в § 1 закон распределения $U_k(x)$ получает значение условного закона распределения k-членной малой компоненты в предположении, что сумма S получила значение $n\alpha$.

Методы и результаты, изложенные в § 1—2, допускают многообразные обобщения. К вполне аналогичным предельным теоремам приводит рассмотрение ряда случаев: 1) когда исходное распределение дискретно; 2) когда различные слагаемые подчиняются различным законам и 3) когда каждое из слагаемых представляет собою случайный вектор в некотором многомерном пространстве. В настоящей работе, однако, мы этих обобщений рассматривать не будем.

§ 3. Случай ненормируемого исходного закона

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда исходная функция $\omega(x)$ не интегрируема на полупрямой $(0, \infty)$, то есть когда

$$\int\limits_0^\infty \omega(x)\,dx = +\infty;$$

при этом мы будем, однако, предполагать, что

$$\varphi(\beta) = \int\limits_0^\infty \omega(x)\,e^{-\beta x}\,dx < +\infty$$

при любом $\beta > 0$. Отсюда следует, что и

$$\int\limits_0^\infty x^n \omega(x)\,e^{-\beta x}\,dx < +\infty \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Функция $\Omega_n(x)$ будет, как и прежде, определяться соотношением (1) для $n \geqslant 2$. Будем ли мы рассматривать функцию $\omega(x)$ как некий „ненормируемый" закон распределения, а $\Omega_n(x)$ — как композицию n таких законов, или вовсе откажемся от вероятностной интерпретации этих функций, — это не имеет значения ни для вывода нужных нам асимптотических формул, ни для последующего применения их к задачам статистической термодинамики. Как и в предшествующих параграфах, нашей задачей остается изучение асимптотического поведения функции $\Omega_n(x)$ при $n \to \infty$. Первая отличительная черта новой ситуации сказывается в том, что математическое ожидание a величины, распределенной по закону $\omega(x)$, здесь оказывается бесконечно большим; поэтому число α, подчиненное во всем предшествующем требованию $0 < \alpha < a$, мы теперь, естественно, будем просто считать произвольным положительным числом. Мы постепенно проследим все рассуждения предыдущих параграфов и убедимся, что значительное большинство полученных там выводов сохраняет силу и в наших новых условиях; в тех же немногих случаях, где потребуются изменения, мы эти изменения попутно внесем.

Функция

$$\varphi_\alpha(\beta) = e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)$$

определяется так же, как в § 1; при этом можно, как мы уже заметили, считать α произвольным положительным числом. В § 1 мы имели $\varphi_\alpha(0)=\varphi(0)=1$; здесь мы вместо этого при любом $\alpha > 0$, очевидно, имеем $\varphi_\alpha(\beta) \to \infty$ $(\beta \to 0)$. С другой стороны, предельное соотношение $\varphi_\alpha(\beta) \to \infty$ $(\beta \to \infty)$, как и его доказательство, полностью остается в силе. Полностью сохраняется и доказательство того, что при любом постоянном $\alpha > 0$ и при любом $\beta > 0$

$$\frac{d^2 \ln \varphi_\alpha(\beta)}{d\beta^2} > 0.$$

Таким образом, функция $\ln \varphi_\alpha(\beta)$, будучи всюду выпуклой и обращаясь в $+\infty$ как при $\beta \to 0$, так и при $\beta \to \infty$, имеет в области $0 < \beta < +\infty$ единственный минимум, характеризуемый уравнением

$$\frac{d \ln \varphi_\alpha(\beta)}{d\beta} = \alpha + \frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = 0;$$

однако, в отличие от предыдущего, мы здесь уже не можем утверждать, что минимальное значение функции $\varphi_\alpha(\beta)$ всегда меньше единицы; напротив, оно может оказаться и больше, и меньше единицы, в зависимости от выбора числа α.

Мы уже говорили о том, что функция $\Omega_n(x)$ попрежнему определяется соотношением (1), причем сходимость интеграла не вызывает сомнений, так как подинтегральная функция отлична от нуля только в конечной области $x_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\sum_{i=1}^{n-1} x_i < x$. Все дальнейшее протекает в точности, как в случае нормированного исходного закона $\omega(x)$, так как нормировочное условие

$$\int_0^\infty \omega(x)\, dx = 1$$

нигде более не используется. Функции $\Phi_n(\beta)$, $u(x)$ и $U_n(x)$ определяются, как в § 1, причем две последние представляют собою обычные, нормированные законы распределения. Все рассуждения, приводящие к асимптотической оценке (5), остаются в полной силе, а из (5) попрежнему следует (7). Наконец, в формулировке теоремы 1 мы имеем возможность заменить предпосылку $0 < \alpha < a$ более широкой $0 < \alpha < +\infty$, оставляя текст во всем остальном неизменным. Имеется, впрочем, одно различие, не находящее себе места в формулировке теоремы: величина $e^{\alpha\beta}\varphi(\beta)$ в § 1 была всегда меньше единицы; здесь же она может оказаться и больше, и меньше единицы, в зависимости от выбора числа α (напомним, что β есть функция от α, определяемая соотношением (6)). Что касается исходного закона $\omega(x)$, то и здесь, кроме предпосылок общего характера, мы должны предположить, что он удовлетворяет специальному условию (8).

Все последующие рассуждения и выводы § 1 и 2 стоят вне всякой зависимости от нормируемости закона $\omega(x)$ и не претерпевают поэтому никаких изменений. В частности, имеют место теоремы 2, 3 и 4. В последних двух случаях толкование выражения (11) как условного (*нормируемого*) закона распределения компоненты при данном значении A всей суммы (закон распределения которой, $\Omega_n(x)$, *ненормируем*), не вызывает никаких затруднений, но вместе с тем и ни в какой мере не является обязательным.

Таким образом, вся построенная в § 1—2 элементарная теория в одинаковой мере пригодна в случаях нормируемого и ненормируемого исходного закона $\omega(x)$. В первом случае она дает нам предельные теоремы нового типа для сумм взаимно независимых положительных случайных величин, позволяющие исследовать законы распределения таких сумм в областях, не охватываемых известными до сих пор предельными теоремами. Вместе с тем надо отметить, что эти новые теоремы, как мы видели, являются элементарными следствиями классических предельных закономерностей.

Однако во всех физических приложениях, примеры которых мы приведем в следующем параграфе, установленные нами теоремы всегда приходится применять в условиях ненормируемого исходного закона $\omega(x)$.

§ 4. Физические приложения

Пусть $V(x)$ означает объем той области фазового пространства данной механической системы, в которой энергия системы, выражаемая гамильтоновой функцией $H(q_i, p_k)$, меньше положительного числа x. Функцию $\Omega(x)=dV(x)/dx$ будем называть **структурной функцией** данной системы. Если данная система состоит из большого числа n одинаковых частиц, так что энергия системы есть сумма энергий составляющих ее частиц, и если структурная функция частицы есть $\omega(x)$, то, как известно,

$$\Omega(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n-1} \omega(x_1) \ldots \omega(x_{n-1})\, \omega\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Так как в задачах статистической физики функция $\omega(x)$, будучи ненормируемой, обычно удовлетворяет всем требованиям, о которых мы говорили в § 1—2, то полученные нами там результаты дают нам удобные приближенные выражения большой точности для структурной функции $\Omega(x)$. При аналитической трактовке задач статистической физики обычно полная энергия $\mathcal{E}$ системы предполагается бесконечно большой величиной, пропорциональной числу частиц n, так что средняя энергия частицы $\mathcal{E}/n=a$ сохраняет постоянное значение. При этом нас обычно интересуют значения функции $\Omega(x)$ при x, близком к $\mathcal{E}=na$, для оценки которых, очевидно, приближенные формулы § 1—2 как раз и приспособлены.

Рассмотрим пример. Если полная энергия системы равна $\mathcal{E}$, то вероятность того, что энергия данной отдельной частицы окажется заключенной между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$, как известно, равна

$$\frac{\omega(\varepsilon)\, \Omega_{n-1}(\mathcal{E}-\varepsilon)\, d\varepsilon}{\Omega_n(\mathcal{E})}, \tag{14}$$

где $\Omega_n(\mathcal{E}) = \Omega(\mathcal{E})$, а $\Omega_{n-1}(x)$ — структурная функция системы, состоящей из $n-1$ частиц того же типа. Множитель при $d\varepsilon$ имеет в точности вид выражения (11) § 2, если положить $k=1$, $A=\mathcal{E}=na$, $x=\varepsilon$. Поэтому формула (13) § 2 для закона распределения малой компоненты дает нам для вероятности (14) приближенное выражение

$$\frac{\omega(\varepsilon)\, e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon}{\int\limits_0^\infty \omega(x)\, e^{-\beta x}\, dx}.$$

Среднее число частиц, энергии которых заключены между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$, приближенно равно поэтому

$$\frac{n\omega(\varepsilon)\, e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon}{\int\limits_0^\infty \omega(x)\, e^{-\beta x}\, dx}.$$

Это — закон распределения Максвелла-Больцмана, для которого мы таким образом получаем чрезвычайно простое и вполне строгое доказательство в весьма общих предположениях. Значение параметра β определяется уравнением

$$-\frac{\varphi'(\beta)}{\varphi(\beta)} = \alpha = \frac{\mathcal{E}}{n},$$

где, как всегда,

$$\varphi(\beta) = \int_0^\infty \omega(x) e^{-\beta x}\, dx.$$

С физической стороны, как известно, β связано с абсолютной температурой T системы универсальным соотношением $\beta = 1/kT$, где k постоянная Больцмана.

Более точным образом, если энергия системы равна $\mathcal{E}$, то закон распределения состояний отдельной частицы в ее фазовом пространстве дается плотностью

$$\frac{\Omega_{n-1}(\mathcal{E}-\varepsilon)}{\Omega_n(\mathcal{E})},$$

где под ε надо понимать энергию частицы, как функцию точки ее фазового пространства (или, что то же, как функцию ее гамильтоновых переменных). Полагая, как выше, $\mathcal{E} = n\alpha$, мы находим в силу формулы (12) § 2

$$\frac{\Omega_{n-1}(\mathcal{E}-\varepsilon)}{\Omega_n(\mathcal{E})} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\varphi(\beta)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1+\varepsilon^2}{n}\right) \right\}. \tag{15}$$

Если мы теперь будем смотреть на нашу систему как на одну частицу среди n ей подобных, находящихся с ней в тепловом контакте „частиц" того же типа, то она уже не будет изолированной и энергия ее будет претерпевать изменения. Если n велико, то такое семейство систем, охватывающих данную, с термодинамической точки зрения можно отождествить с термостатом любой структуры. Закон распределения данной системы в ее фазовом пространстве тогда дается попрежнему формулой (15), в левой части которой $\mathcal{E}$ на этот раз означает (постоянную) энергию термостата, а ε — (переменную) энергию данной системы, как функцию ее гамильтоновых переменных. Асимптотическое распределение, даваемое плотностью $e^{-\beta\varepsilon}/\varphi(\beta)$ (где $\beta = 1/kT$, T — температура термостата), есть „каноническое" распределение Гиббса. Таким образом, важная теорема о том, что система, погруженная в термостат, распределена канонически, также является непосредственным следствием наших предельных теорем.

Рассмотрим еще пример из области квантовой физики. Пусть мы имеем дело с системой, состоящей из фотонов (световых квантов). Обозначим через

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_r, \ldots$$

возможные уровни энергии фотона при условии, что занимаемый системою объем равен V (эти уровни в порядке приближения предполагаются целыми числами, что может быть осуществлено выбором достаточно малой единицы энергии). Пусть в некотором стационарном состоянии системы, соответствующем уровню энергии $\mathcal{E}$, имеется a_r фотонов, находящихся в состоянии, характеризуемом уровнем энергии ε_r, так что

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \varepsilon_r = \mathcal{E}. \tag{16}$$

Каждому набору этих „чисел заполнения" a_r, удовлетворяющих уравнению (16), соответствует определенное стационарное состояние системы, соответствующее уровню энергии $\mathcal{E}$, и обратно — каждому такому состоянию соответствует определенный набор чисел a_r, удовлетворяющих уравнению (16). Таким образом, число $\Omega(\mathcal{E})$ линейно независимых состояний системы при данном значении $\mathcal{E}$ ее полной энергии равно числу решений уравнения (16) в целых $a_r \geqslant 0$. Функция $\Omega(x)$, играющая здесь роль структурной функции системы, является композицией V одинаковых функций $\omega(x)$; при этом функция $\omega(x)$ определяется так же, как функция $\Omega(x)$, но при условии, что занимаемый системою объем равен 1. Предполагается, что $\mathcal{E}$ и V безгранично возрастают, причем $\mathcal{E}/V=\alpha$ сохраняет постоянное значение. Очевидно, что для нахождения асимптотических выражений для функции $\Omega(x)$ вблизи значения $x=\mathcal{E}=V\alpha$ мы можем тогда воспользоваться формулами § 1—2.

Основное значение для всех расчетных формул статистики фотонов имеют средние значения $\overline{a_r}$ чисел заполнения. Статистическая теория (см. вторую из работ автора, цитированных на стр. 3) дает для них выражение

$$\overline{a_r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega(\mathcal{E}-k\varepsilon_r)}{\Omega(\mathcal{E})}.$$

Наша теорема 2 дает

$$\frac{\Omega(\mathcal{E}-k\varepsilon_r)}{\Omega(\mathcal{E})} = e^{-\beta k\varepsilon_r}\left\{1+O\left(\frac{1+k^2\varepsilon_r^2}{V}\right)\right\},$$

откуда

$$\overline{a_r} = \frac{e^{-\beta\varepsilon_r}}{1-e^{-\beta\varepsilon_r}} + O\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_r}-1} + O\left(\frac{1}{V}\right).$$

При этом значение параметра β определяется как корень уравнения

$$\frac{\mathcal{E}}{V} + \frac{d \ln \Phi(\beta)}{d\beta} = 0,$$

где

$$\Phi(\beta) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\beta x} \Omega(x).$$

Само собой разумеется, что во всей этой проблеме функции $\Omega(x)$ и $\omega(x)$ зависят от целочисленного аргумента, так что с точки зрения теории вероятностей мы имеем дело с дискретными распределениями. Все наши формулы, однако, остаются для этого случая в полной силе, и оценки остаточных членов не требуют никаких изменений.

Заметим, наконец, что в случае, когда система состоит из материальных частиц, для получения всех нужных расчетных формул можно воспользоваться двухмерным обобщением развитой в настоящей статье элементарной теории. Причина этого небольшого усложнения заключается, разумеется, в том, что число элементарных частиц, в случае фотонов остававшееся неопределенным, теперь должно сохранять заданное неизменное значение.

Поступило 6. VII 1950 г.