О прямолинейном движении с общим соударением системы трех материальных точек, взаимно притягивающихся по экспоненциальному закону

Ю. Д. Соколов

1

В статье „О движении трех материальных точек по одной прямой" (Укр. мат. журн. АН УССР № 3, 1949) было исследовано движение с общим соударением точек, взаимодействующих с силами, пропорциональными некоторой аналитической функции взаимного расстояния $f(r)$, причем принималось, что

$$\lim_{r\to+0} r^{2\alpha+1} f(r) = \pm 2\alpha,$$

где α — отличное от нуля действительное число.

В настоящей статье рассмотрим движение по одной прямой трех материальных точек P_0, P_1, P_2, с массами m_0, m_1, m_2, взаимно притягивающихся с силами, по модулю равными

$$g^2 m_i m_j e^{\frac{a}{r_k}} \qquad (i,\ j,\ k=0,\ 1,\ 2;\quad i\neq j\neq k), \tag{1}$$

где r_k — взаимное расстояние точек P_i, P_j, а g^2 и a — положительные постоянные. В дальнейшем, для упрощения записи, будем считать, что единицы выбраны так, что $g^2=1$, $a=1$.

Положив

$$r_1 = r_0 + r_2,$$

будем иметь для определения взаимных расстояний систему диференциальных уравнений

$$\frac{dr_0}{dt} = r_0',\quad \frac{dr_0'}{dt} = -(m_1+m_2)\,e^{\frac{1}{r_0}} + m_0\left(e^{\frac{1}{r_2}} - e^{\frac{1}{r_1}}\right), \tag{2}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = r_2',\quad \frac{dr_2'}{dt} = -(m_0+m_1)\,e^{\frac{1}{r_2}} + m_2\left(e^{\frac{1}{r_0}} - e^{\frac{1}{r_1}}\right), \tag{3}$$

имеющую интеграл энергии

$$m_0 m_1 r_2'^2 + m_1 m_2 r_0'^2 + m_2 m_0 r_1'^2 = m_0 (m_1 + m_2) r_2'^2 + m_2 (m_0 + m_1) r_0'^2 + 2 m_0 m_2 r_0' r_2' =$$

$$= 2M \left[m_0 m_1 \int_{r_2}^{1} e^{\frac{1}{r}} dr + m_1 m_2 \int_{r_0}^{1} e^{\frac{1}{r}} dr + m_2 m_0 \int_{r_1}^{1} e^{\frac{1}{r}} dr + h \right], \tag{4}$$

где h — постоянная интегрирования, а $M = m_0 + m_1 + m_2$.

Из (2) и (3):

$$\frac{dr_1'}{dt} = \frac{d(r_0' + r_2')}{dt} = -m_1 \left(e^{\frac{1}{r_2}} + e^{\frac{1}{r_0}} \right) - (m_0 + m_2) e^{\frac{1}{r_1}}. \tag{5}$$

2

Пусть движение системы происходит регулярно при $0 \leqslant t < t_1$, а в момент t_1 перестает быть таким. Тогда из известной теоремы Пенлеве „о минимуме трех величин“ [1]) легко заключить, что в данном случае при $t \to t_1$ минимум двух величин $\frac{1}{r_1}$ и $\underline{r}$ (где $\underline{r}$ — меньшее из расстояний r_0, r_2 в момент t) стремится к нулю. По уравнению (5) r_1' монотонно убывает и, следовательно, стремится к некоторому конечному пределу или $k - \infty$, а тогда и $r_1 = r_0 + r_2$ стремится при $t \to t_1$ к определенному конечному пределу. Таким образом, в данном случае $\lim\limits_{t \to t_1} \underline{r} = 0$ и возможны два случая:

1) $r_1 \to +0$, а тогда и $r_0 \to +0$, $r_2 \to +0$,

2) r_1 стремится к определенному положительному пределу [2]).

В дальнейшем рассмотрим первый случай, в котором в конечный момент t_1 имеет место общее соударение всех трех точек, тогда:

$$\lim_{t \to t_1} (r_0' + r_2') = -\infty \text{ [3])}. \tag{6}$$

3

Рассмотрим отношение $\frac{r_2}{r_0} = p$, так что $\frac{dp}{dt} = \frac{r_0 r_2' - r_2 r_0'}{r_0^2}$ и по (1) и (2):

$$\frac{d}{dt}\left(r_0^2 \frac{dp}{dt} \right) = r_0^2 \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{dr_0^2}{dt} \frac{dp}{dt} = r_0 \frac{dr_2'}{dt} - r_2 \frac{dr_0'}{dt} =$$

$$= r_0 e^{\frac{1}{r_2}} \left\{ -m_0 - m_1 - m_0 p + [m_2 + (m_1 + m_2) p] e^{\frac{p-1}{r_2}} + (m_0 p - m_2) e^{-\frac{1}{(p+1) r_2}} \right\}. \tag{7}$$

[1]) Стокгольмские лекции, стр. 571.

[2]) В этом случае, как легко видеть, в окрестности $t = t_1$ $\underline{r}$ представляется одним и тем же расстоянием — r_0 или r_2.

[3]) Если допустить, что $r_0' + r_2'$ стремится к определенному пределу, то из (4) следовало бы, что одна из величин r_0', r_2' стремилась бы к $-\infty$, а тогда другая — к $+\infty$, что, конечно, невозможно.

Если в окрестности $t=t_1$ p изменяется монотонно, то его предельное значение p_1 не может быть отличным от единицы. В самом деле, пусть, например, $p_1>1$; тогда уравнение (2) имеет вид

$$e^{-\frac{1}{r_0}}\frac{dr_2'}{dt}=m_2-(m_0+m_1)e^{-\frac{p-1}{r_2}}-m_2e^{-\frac{p}{r_1}}=m_2+\varepsilon,\ \text{где}\ \varepsilon\to 0\ \text{при}\ t\to t_1.$$

Следовательно, $\frac{dr_2'}{dt}\to+\infty$ и r_2', возрастая, стремится к конечному (неположительному[1])) пределу; тогда, по (6), $r_0'\to-\infty$ и $\frac{r_2'}{r_0'}\to 0$, что противоречит условию.

Так же по уравнению (1) докажем невозможность допущения $p_1<1$. Если p неограниченно осциллирует при $t\to t_1$, то его максимальные значения p_μ стремятся к единице. В самом деле, в противном случае существовало бы такое число $b\,(1>b>0)$, что в моменты достижения максимума, как угодно близкие к t_1, было бы $|p_\mu-1|>b$. Если при этом $p_\mu>1+b$, то по (7), при достаточно малом r_2, было бы $\left(\frac{dp}{dt}=0\right)$ $\frac{d^2p}{dt^2}>0$, что противоречит условию.

Если $p_\mu<1-b$, то смежный минимум p_m будет $<1-b$ и в момент достижения этого минимума, достаточно близкий к t_1: $\frac{dp}{dt}=0$ и по (7) $\frac{d^2p}{dt^2}<0$, что невозможно. Совершенно аналогично докажем, что и минимальные значения p_m стремятся к единице при $t\to t_1$. Следовательно, во всех случаях

$$\lim_{t\to t_1}p=1 \tag{8}$$

и

$$\lim_{t\to t_1}\frac{r_1}{r_0}=\lim_{t\to t_1}\frac{r_0+r}{r_0}=\lim_{t\to t_1}(1+p)=2. \tag{8'}$$

Рассмотрим теперь разность

$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_2}=2y, \tag{9}$$

так что

$$2\frac{dy}{dt}=\frac{r_2'}{r_2^2}-\frac{r_0'}{r_0^2}. \tag{9'}$$

Если в окрестности $t=t_1$ y изменяется монотонно и, следовательно, стремится к определенному пределу y_1[2]), то, на основании (9') и (6),

[1]) Иначе r_2 не стремилось бы к нулю.

[2]) Допущение $y_1=\pm\infty$ на основании (2) и (3) приводит к противоречию с результатом (8).

по крайней мере одна из величин r_0', r_2' стремится к $-\infty$. Тогда по (8') найдем

$$\lim_{t\to t_1}\frac{r_1'}{r_i'}=\lim_{t\to t_1}\frac{\dfrac{dr_1'}{dt}}{\dfrac{dr_i'}{dt}}=2 \qquad (i=0 \text{ или } i=2),$$

откуда, на основании (2), (5) или (3) и (5):

$$\frac{-m_1(1+e^{2y_1})}{-(m_0+m_1)+m_2e^{2y_1}}=2 \quad \text{или} \quad \frac{-m_1(1+e^{2y_1})}{m_0-(m_1+m_2)e^{2y_1}}=2;$$

оба уравнения дают

$$e^{2y_1}=\frac{2m_0+m_1}{2m_2+m_1} \text{ и } \lim_{t\to t_1}y=y_1=\frac{1}{2}\ln\frac{2m_0+m_1}{2m_2+m_1}. \tag{10}$$

Допустим теперь, что при $t\to t_1$ y неограниченно осциллирует. Из (9') имеем

$$2\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{r_2^2}\frac{dr_2'}{dt}-\frac{1}{r_0^2}\frac{dr_0'}{dt}+\frac{2r_0'^2}{r_0^3}-\frac{2r_2'^2}{r_2^3},$$

или, на основании (2) и (3):

$$2r_2^2e^{-\frac{1}{r_2}}\frac{d^2y}{dt^2}=-(m_0+m_1)+m_2\left(e^{2y}-e^{-\frac{1}{pr_1}}\right)-$$

$$-\left[m_0\left(1-e^{-\frac{1}{pr_1}}\right)-(m_1+m_2)e^{2y}\right]p^2+2r_2^2e^{-\frac{1}{r_2}}\left(\frac{r_0'^2}{pr_0^4}-\frac{r_2'^2}{r_2^4}\right). \tag{11}$$

Обозначая через ε_i всякую функцию, стремящуюся к нулю при $t\to t_1$, из (11) видим, что в момент достижения экстремума y будет

$$2r_2^2e^{-\frac{1}{r_2}}\frac{d^2y}{dt^2}=-(2m_0+m_1)+(2m_2+m_1+\varepsilon)e^{2y}+\varepsilon_1+2\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{r_2'^2e^{-\frac{1}{r_2}}}{r_2}. \tag{11'}$$

Но из (4) при $y'=0$ $\left(\frac{r_0'}{r_0^2}=\frac{r_2'}{r_2^2}\right)$ следует для этого момента:

$$\frac{r_2'^2e^{-\frac{1}{r_2}}}{r_2}=2M\frac{m_0m_1\dfrac{\int_{r_2}^{1}e^{\frac{1}{r}}dr}{r_2^2e^{\frac{1}{r_2}}}+m_1m_2\dfrac{e^{2y}}{p^2}\dfrac{\int_{r_0}^{1}e^{\frac{1}{r}}dr}{r_0^2e^{\frac{1}{r_0}}}+m_2m_0\left(1+\dfrac{1}{p}\right)^2e^{-\frac{1}{pr_1}}\dfrac{\int_{r_1}^{1}e^{\frac{1}{r}}dr}{r_1^2e^{\frac{1}{r_1}}}+\dfrac{h}{r_2^2e^{\frac{1}{r_2}}}}{m_0(m_1+m_2)+\dfrac{m_2(m_0+m_1)}{p^4}+2\dfrac{m_0m_2}{p^2}}r_2=$$

$$=\varepsilon_2+\varepsilon_3e^{2y}.$$

Тогда (11′) принимает вид

$$2r_2^2 e^{-\frac{1}{r_2}} \frac{d^2y}{dt^2} = -(2m_0 + m_1) + (2m_2 + m_1 + \varepsilon_4) e^{2y} + \varepsilon_5 =$$

$$= (2m_2 + m_1 + \varepsilon_4)\left(e^{2y} - \frac{2m_0 + m_1}{2m_2 + m_1} + \varepsilon_6\right). \tag{11''}$$

Основываясь на (11″), при помощи вышеизложенных соображений, докажем, что при $t \to t_1$ все максимальные и минимальные значения $2y$ стремятся к $\ln \frac{2m_0 + m_1}{2m_2 + m_1}$. Следовательно, во всех случаях получим заключение (10) и тогда, по (2) и (3), $r_0' \to -\infty$, $r_2' \to -\infty$, так что в окрестности $t = t_1$ r_0 и r_2 стремятся к нулю монотонно и по (4), на основании (8) и (10), получим

$$\lim_{t \to t_1} \frac{r_2'}{\sqrt{\int\limits_{r_2}^{1} e^{\frac{1}{r}} dr}} = \lim_{t \to t_1} \frac{r_0'}{\sqrt{\int\limits_{r_2}^{1} e^{\frac{1}{r}} dr}} = -\sqrt{\frac{2m_1 M}{m_1 + 2m_2}}. \tag{12}$$

4

Введем теперь вместо r_0, r_2, r_0', r_2' новые переменные x, y, u, v по формулам

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_2}\right), \quad u = -\frac{r_0'}{r_0^2 x e^{\frac{x}{2}}}, \quad v = -\frac{r_2'}{r_2^2 x e^{\frac{x}{2}}}, \tag{13}$$

так что, на основании (10) и (12), при $t \to t_1$:

$$\lim x = +\infty, \quad \lim y = y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2m_0 + m_1}{2m_2 + m_1},$$
$$\lim u = \lim v = u_1 = \sqrt[4]{\frac{4m_1^2 M^2}{(2m_0 + m_1)(2m_2 + m_1)}}. \tag{14}$$

Диференцируя (13) по t, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{r_0'}{r_0^2} - \frac{r_2'}{r_2^2}\right) = \frac{u+v}{2} x e^{\frac{x}{2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{r_0'}{r_0^2} + \frac{r_2'}{r_2^2}\right) = \frac{u-v}{2} x e^{\frac{x}{2}}, \tag{15}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\frac{dr_0'}{dt}}{r_0^2 x e^{\frac{x}{2}}} + \frac{2r_0'^2}{r_0^3 x e^{\frac{x}{2}}} + \frac{r_0'(x+2)}{2r_0^2 x^2 e^{\frac{x}{2}}} \frac{dx}{dt} = -\frac{(x+y)^2}{x e^{\frac{x}{2}}} \frac{dr_0}{dt} + \frac{2u^2}{x+y} x e^{\frac{x}{2}} - \frac{u}{2}\left(1 + \frac{2}{x}\right) \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{dr_2'}{dt}}{r_2^2 x e^{\frac{x}{2}}} + \frac{2r_2'^2}{r_2^3 x e^{\frac{x}{2}}} + \frac{r_2'(x+2)}{2r_2^2 x^2 e^{\frac{x}{2}}} \frac{dx}{dt} = -\frac{(x-y)^2}{x e^{\frac{x}{2}}} \frac{dr_2'}{dt} + \frac{2v^2}{x-y} x e^{\frac{x}{2}} - \frac{v}{2}\left(1 + \frac{2}{x}\right) \frac{dx}{dt},$$

или, приняв x за аргумент, на основании (2), (3) и (15):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u-v}{u+v}, \tag{16_1}$$

$$\frac{du}{dx}=2\,\frac{(m_1+m_2)\,e^{y}-m_0\left(e^{-y}-e^{-\frac{x^2+y^2}{2x}}\right)}{u+v}\left(1+\frac{y}{x}\right)^2+\frac{4u^2}{(x+y)\,(u+v)}-\frac{u}{2}\left(1+\frac{2}{x}\right), \tag{16_2}$$

$$\frac{dv}{dx}=2\,\frac{(m_0+m_1)\,e^{-y}-m_2\left(e^{y}-e^{-\frac{x^2+y^2}{2x}}\right)}{u+v}\left(1-\frac{y}{x}\right)^2+\frac{4v^2}{(x-y)\,(u+v)}-\frac{v}{2}\left(1+\frac{2}{x}\right), \tag{16_3}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{(u+v)\,x}\,e^{-\frac{x}{2}}. \tag{17}$$

После интегрирования системы (16_1) — (16_3) связь t с x определится по (17) при помощи квадратуры.

Правые части уравнений (16_1)—(16_3) и их частные производные по y, u, v — непрерывны в окрестности системы значений $x=+\infty$, $y=y_1$, $u=v=u_1$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2u_1} & -\frac{1}{2u_1} \\ \frac{(m_1+m_2)\,e^{y_1}+m_0e^{-y_1}}{u_1}-\frac{1}{2} & -\frac{(m_1+m_2)\,e^{y_1}-m_0e^{-y_1}}{2u_1^2}-\lambda & -\frac{(m_1+m_2)\,e^{y_1}-m_0e^{-y_1}}{2u_1^2} \\ -\frac{(m_0+m_1)\,e^{-y_1}+m_2e^{y_1}}{u_1} & -\frac{(m_0+m_1)\,e^{-y_1}-m_2e^{y_1}}{2u_1^2}-\frac{1}{2} & -\frac{(m_2+m_1)\,e^{-y_1}-m_2e^{y_1}}{2u_1^2}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Умножив элементы 1-ой горизонтали на $2u_1$, поделив на эту величину элементы 1-ой колонки и вычтя затем из элементов 2-ой горизонтали элементы 3-ей, получим, на основании (14):

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ \frac{(m_1+2m_0)\,(m_1+2m_2)}{2m_1M} & -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2}+\lambda \\ -\frac{m_2e^{y_1}}{u_1^2}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Добавив, наконец, к элементам 3-ей колонки элементы 2-ой, найдем

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{(m_1+2\,m_0)\,(m_1+2m_2)}{2m_1M} & -\frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ -\frac{m_2e^{y_1}}{u_1^2}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$(\lambda+1)\left[\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-\frac{(2m_0+m_1)(2m_2+m_1)}{2m_1M}\right]=0. \tag{18}$$

Корни уравнения (18)

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=-\frac{1}{4}\mp\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{(2m_0+m_1)(2m_2+m_1)}{2m_1M}};$$

следовательно: $\lambda_2<0$, $\lambda_3>0$.

На основании некоторого обобщения известных теорем Боля-Коттона об асимптотических решениях диференциальных уравнений получим заключение, что семейство решений, соответствующих движению с общим соударением, зависит от трех произвольных параметров: h, t_1 и одного параметра, соответствующего корню λ_2.

Поступило 25.VII 1950 г.