О движении по одной прямой системы трех материальных точек, взаимодействующих с силами, пропорциональными логарифмам взаимных расстояний

Ю. Д. Соколов

I

В работе „О движении системы трех материальных точек по одной прямой“ (Укр. мат. жур. АН УССР № 3, 1949) были исследованы особые точки интегралов движения трех материальных точек, взаимодействующих с силами, пропорциональными некоторой аналитической функции взаимного расстояния $f(r)$, для которой

$$\lim_{r\to+0} r^{2\alpha+1} f(r) = \pm 2\alpha,$$

где α — действительное число, отличное от нуля.

В настоящей статье рассматривается движение по одной неподвижной прямой трех материальных точек P_0, P_1, P_2, с массами m_0, m_1, m_2, взаимно притягивающихся или отталкивающихся, с силами, по модулю равными

$$g^2 m_i m_j \left| \ln \frac{r_k}{a} \right| \qquad (i, j, k = 0, 1, 2; \quad i \neq j \neq k), \tag{1}$$

где r_k — взаимное расстояние точек P_i, P_j, а g^2 и a — положительные постоянные. В дальнейшем, для упрощения записи, будем полагать, что единицы выбраны так, что $g^2=1$, $a=1$.

Примем прямую, вдоль которой происходит движение, за ось абсцисс и положим, что точки расположены в порядке P_0, P_1, P_2 в сторону возрастающих абсцисс. Обозначим через $x=r_2$ абсциссу точки P_1 относительно P_0 и через ξ — абсциссу точки P_2 относительно центра инерции точек P_0 и P_1. Тогда, введя обозначения

$$M = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$\mu_0 = \frac{m_0}{m_0+m_1}, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu_3 = \frac{m_2(m_0+m_1)}{M}, \tag{2}$$

получим, при законе взаимодействия (1), такие диференциональные уравнения относительно движения точек P_1 и P_2:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=x', \quad \pm\mu_2\frac{dx'}{dt}=m_0m_1\ln r_2-\mu_2m_2(\ln r_0-\ln r_1)=\pm\frac{\partial U}{\partial x}, \\ &\frac{d\xi}{dt}=\xi', \ \pm\mu_3\frac{d\xi'}{dt}=m_1m_2\ln r_0+m_2m_0\ln r_1=\pm\frac{\partial U}{\partial\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$U=\pm\sum m_im_jr_k(\ln r_k-1), \quad r_0=\xi-\mu_0x, \ r_1=\xi+\mu_1x, \ r_2=x, \tag{4}$$

верхним знакам соответствует притяжение при $r_k<1$, а нижним — отталкивание.

Интеграл энергии будет иметь вид

$$\mu_2x'^2+\mu_3\xi'^2=2U+2h, \tag{5}$$

где h — постоянная интегрирования.

Положив

$$\mu_2x^2+\mu_3\xi^2=\frac{1}{M}\sum m_im_jr_k^2=I^2, \tag{6}$$

при помощи (3) и (5) найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I^2}{dt^2}=\pm\sum m_im_jr_k(3\ln r_k-1)+2h. \tag{7}$$

2

Введя, вместо x, ξ, x', ξ', новые переменные I, R, φ, Φ по формулам

$$\begin{aligned} &\sqrt{\mu_2}\,x=I\cos\varphi, \ \sqrt{\mu_3}\,\xi=I\sin\varphi \quad \left(0<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,\mu_0=\chi\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right), \\ &\frac{\mu_2xx'+\mu_3\xi\xi'}{I}=\frac{dI}{dt}=R, \quad \sqrt{\mu_2\mu_3}\,\frac{x\xi'-\xi x'}{I}=I\frac{d\varphi}{dt}=\Phi, \end{aligned} \tag{8}$$

заменим уравнения (3) системой[1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dI}{dt}=R, \quad I\frac{dR}{dt}=\Phi^2+I\frac{\partial U}{\partial I}, \\ &I\frac{d\varphi}{dt}=\Phi, \ I\frac{d\Phi}{dt}=-R\Phi+\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

[1]) См. вышецитированную статью, § 3.

где

$$U = \mp(-I \ln I) \sum m_i m_j p_k \left(1 - \frac{1 - \ln p_k}{\ln I}\right) = -I \ln I V, \tag{10}$$

$$I\frac{\partial U}{\partial I} = \mp(-I \ln I) \sum m_i m_j p_k \left(1 + \frac{\ln p_k}{\ln I}\right), \tag{10$_1$}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mp(-I \ln I) \sum m_i m_j p'_k \left(1 + \frac{\ln p_k}{\ln I}\right) = -I \ln I \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \tag{10'}$$

$$p_0 = \frac{r_0}{I} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_3}} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_2}}\cos\varphi, \quad p_1 = \frac{r_1}{I} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_3}} +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}}\cos\varphi, \; p_2 = \frac{r_2}{I} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_2}}, \tag{11}$$

$$p'_0 = \frac{dp_0}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_3}} + \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_2}}\sin\varphi, \; p'_1 = \frac{dp_1}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_3}} -$$

$$- \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}}\sin\varphi, \; p'_2 = \frac{dp_2}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_2}}. \tag{11'}$$

Интеграл энергии примет вид

$$R^2 + \Phi^2 = 2U + 2h. \tag{12}$$

3

Если движение системы происходит регулярно при $0 \leqslant t < t_1$, а в момент t_1 перестает быть таким, то из известной теоремы Пенлеве [1]) следует, что при $t \to t_1$ минимум двух величин $\frac{1}{I}$ и $\underline{r}$ (где $\underline{r}$ — меньшее из расстояний r_0, r_2 в момент t) стремится к нулю. Так как правая часть уравнения (7) ограничена снизу (при верхнем знаке) или сверху (при нижнем знаке) при изменении r_k от 0 до $+\infty$, то I стремится при $t \to t_1$ к определенному пределу I_1 [2]).

Если $I_1 > 0$, то $\lim\limits_{t \to t_1} \underline{r} = 0$ и тогда одно и то же расстояние (r_0 или r_2) стремится к нулю. В самом деле, в противном случае существовал бы момент $\tau < t_1$, как угодно близкий к t_1, до и после которого минимум $\underline{r}$, меньший произвольно малого положительного числа ε при $t = \tau$, представлялся бы двумя разными расстояниями; при $t = \tau$ они

---

[1]) Стокгольмские лекции, стр. 571.

[2]) Допущение $I_1 = +\infty$ (в первом случае) при конечном t_1 сразу приводит к противоречию. В самом деле, если допустить, что $I_1 = +\infty$, то по (10) и (12) найдем, что $\frac{1}{\sqrt{I \ln I}} \frac{dI}{dt}$ остается ограниченной при $t \to t_1$, что противоречит допущению.

были бы равны между собою и оба $<\varepsilon$, а тогда и $r_1 = r_0 + r_2$ было бы $<2\varepsilon$, а $I < 2\varepsilon\sqrt{\frac{\Sigma m_i m_j}{M}}$, что противоречит условию $I_1 > 0$.

В случае $I_1 = 0$ все r_k стремятся к нулю при $t \to t_1$ и в момент t_1 имеет место общее соударение всех трех точек.

4

Допустим сначала, что при $t \to t_1$:

$$\lim I = I_1 > 0, \quad \lim x = 0;$$

тогда, по (6):

$$\lim_{t \to t_1} \xi = \xi_1 = \frac{I_1}{\sqrt{\mu_3}} > 0.$$

На основании этого, из четвертого уравнения (3) найдем, что $\frac{d\xi'}{dt}$ и ξ' стремятся при $t \to t_1$ к определенным конечным пределам

$$\lim_{t \to t_1} \xi' = \xi_1',$$

а тогда, по (5)

$$\lim_{t \to t_1} x' = x_1' = -\sqrt{\frac{\pm 2m_2(m_0 + m_1)\xi_1(\ln \xi_1 - 1) + 2h - \mu_3 \xi_1'^2}{\mu_2}}. \tag{13}$$

Следовательно, в момент t_1 имеет место соударение двух точек P_0, P_1 на конечном расстоянии от P_2, причем в этот момент все точки имеют конечные скорости.

Пусть $x_1' < 0$ [1]; тогда, вследствие монотонности изменения x в некотором интервале (t_0, t_1), можно принять в этом интервале x за аргумент и заменить уравнения (3) системой

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\xi'}{x'}, \ \pm\frac{d\xi'}{dx} = \frac{M}{m_0 + m_1}\,\frac{m_1 \ln r_0 + m_0 \ln r_1}{x'} = \pm\frac{1}{\mu_3}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}, \tag{14}$$

где

$$x' = -\sqrt{\frac{\pm 2\Sigma m_i m_j r_k(\ln r_k - 1) + 2h - \mu_3 \xi'^2}{\mu_2}}.$$

Правые части уравнений (14) и их частные производные по ξ, ξ' — непрерывны в окрестности системы значений $x=0$, $\xi=\xi_1$, $\xi'=\xi_1'$, при всяких действительных конечных значениях $\xi_1 > 0$, ξ_1', при которых подкоренное выражение (13) будет положительным; следовательно, существует единственная система функций $\xi(x)$, $\xi'(x)$, $t(x)$, непрерывных в некотором интервале и при $x=0$ принимающих значения ξ_1, ξ_1', t_1.

---

[1]) Допущение $x_1' > 0$ очевидно противоречит условию $x \to +0$.

Пусть $x_1'=0$, что, по второму уравнению (3), возможно только при нижнем знаке в формуле (4)[1]) (отталкивание при $r_k<1$).

Из этого же уравнения тогда легко найдем, что $x'\to -0$ монотонно и

$$\lim_{t\to t_1}\frac{x'}{\sqrt{-x\ln x}}=-\sqrt{2(m_0+m_1)}. \tag{15}$$

Из уравнений (3) также следует, что $\xi-\xi_1$, $\xi'-\xi_1'$ — бесконечно малые порядка $\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}$. Введем вместо x, x', ξ, ξ' новые переменные v, u, y, $\bar{Y}$ по формулам

$$\begin{gathered}v=-\ln\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}},\quad u=-\frac{x'}{\sqrt{-x\ln x}},\\ y=\frac{\xi-\xi_1}{\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}}=(\xi-\xi_1)e^v,\quad \bar{Y}=\frac{\xi'-\xi_1'}{\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}}=(\xi'-\xi_1')e^v,\end{gathered} \tag{16}$$

так что

$$x=\zeta(v),\quad x'=-\sqrt{-\zeta(v)\ln\zeta(v)}\,u,\quad \xi=\xi_1+e^{-v}y,\quad \xi'=\xi_1'+e^{-v}\bar{Y} \tag{16'}$$

и при $t\to t_1$:

$$\begin{gathered}\lim v=+\infty,\quad \lim u=+\sqrt{2(m_0+m_1)},\\ \lim y=y_1=-\frac{\xi_1'}{\sqrt{2(m_0+m_1)}},\ \lim\bar{Y}=\bar{Y}_1=\frac{M\ln\xi_1}{\sqrt{2(m_0+m_1)}}.\end{gathered} \tag{17}$$

Диференцируя (16), по t получим, на основании (3):

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{x'}{\sqrt{-x\ln x}\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}}=ue^v,$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\frac{1}{\sqrt{-x\ln x}}\frac{dx'}{dt}-\frac{1+\ln x}{2(-x\ln x)^{\frac{3}{2}}}x'^2=\\ &=-\frac{1}{\sqrt{-x\ln x}}\left[\frac{u^2-2(m_0+m_1)}{2}\ln x+\frac{u^2}{2}+m_2(\ln r_0-\ln r_1)\right],\end{aligned}$$

---

[1]) В противном случае из этого уравнения получили бы: $\lim\frac{dx'}{dt}=-\infty$, x' стремилась бы к нулю монотонно, т. е. — по положительным значениям, что противоречит условию $x\to+0$.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\xi'}{\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}}+\frac{\xi-\xi_1}{\left(\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}\right)^2}u=(\xi_1'+e^{-v}\overline{Y}+uy)\,e^{v},$$

$$\frac{d\overline{Y}}{dt}=\frac{1}{\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}}\frac{d\xi'}{dt}+\frac{\xi'-\xi_1'}{\left(\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{-x\ln x}}\right)^2}u=\left[-\frac{M}{m_0+m_1}(m_1\ln r_0+m_0\ln r_1)+u\overline{Y}\right]e^{v}.$$

Введя обозначения

$$\frac{e^{-v}}{\sqrt{-\zeta(v)\ln\zeta(v)}}=\eta(v),\quad \sqrt{-\frac{\ln\zeta(v)}{\zeta(v)}}\,e^{-v}=-\eta(v)\ln\zeta(v)=2+2\omega(v),$$

так что при $v\to+\infty$:

$$\lim\eta(v)=\lim\omega(v)=0,$$

и приняв v за аргумент, получим окончательно, вместо (3), систему

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dv}&=\omega(v)\left[u-\frac{2(m_0+m_1)}{u}\right]-\eta(v)\left[\frac{u}{2}+\frac{m_2(\ln r_0-\ln r_1)}{u}\right],\\
\frac{dy}{dv}&=y+\frac{\xi_1'}{u}+e^{-v}\frac{\overline{Y}}{u},\\
\frac{d\overline{Y}}{dv}&=\overline{Y}-\frac{M}{m_0+m_1}\frac{m_1\ln r_0+m_0\ln r_1}{u},
\end{aligned}\right|\tag{18}$$

$$\frac{dt}{dv}=\frac{e^{-v}}{u},\tag{18'}$$

где

$$r_0=\xi_1+e^{-v}y-\mu_0\zeta(v),\quad r_1=\xi_1+e^{-v}y+\mu_1\zeta(v).$$

Правые части уравнений (18) и их частные производные по u, y, $\overline{Y}$ — непрерывны в окрестности системы значений $v=+\infty$, $u=u_1$, $y=y_1$, $\overline{Y}=\overline{Y}_1$, и характеристическое уравнение имеет корни 1, 1 и 2; следовательно, на основании теорем Боля-Коттона об асимптотических решениях диференциальных уравнений (в несколько обобщенном виде), существует единственное решение системы (18)—(18′) такое, что при $v\to+\infty$: $u\to u_1$, $y\to y_1$, $\overline{Y}\to\overline{Y}_1$, $t\to t_1$, причем ξ_1, ξ_1', t_1 — произвольны.

5

Рассмотрим теперь случай $I_1=0$; тогда при $t\to t_1$:

$$x\to+0,\quad \xi\to+0,\quad r_k\to+0,\qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Вследствие того, что по (4)

$$\lim_{t\to t_1}U=\mp 0,$$

из уравнения (5) заключаем, что в случае верхнего знака должно быть $h > 0$, а в случае нижнего $h \geqslant 0$.

Так как правая часть четвертого из уравнений (3) в окрестности $t=t_1$ сохраняет свой знак, то функция ξ', ограниченная по (5), изменяется в некотором интервале монотонно и, следовательно, стремится при $t \to t_1$ к некоторому пределу $\xi_1' \leqslant 0$; тогда, на основании того же уравнения (5) и $x' \to x_1' \leqslant 0$.

Положим, сначала, $h > 0$; тогда должно быть $\xi_1' < 0$[1]).

Таким образом, при $h > 0$ $\frac{x'}{\xi'}$, а потому и $q = \frac{x}{\xi}$, стремится к определенному пределу q_1, причем $0 \leqslant q_1 \leqslant \frac{1}{\mu_0}$; тогда и $\varphi \to \varphi_1$ $\left(\chi \leqslant \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Так как случай $q_1 = \frac{1}{\mu_0}$ $(\varphi_1 = \chi)$ изменением ролей точек P_0 и P_2 сводится к случаю $q_1 = 0$ $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, то в дальнейшем рассмотрим этот последний, а также случай $\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$.

При верхнем знаке в формуле (4) случай $q_1 = 0$ невозможен, так как иначе по второму из уравнений (3) было бы: $\lim \frac{dx'}{dt} = -\infty$ и x' стремилась бы к нулю, монотонно убывая, что противоречит условию $x \to +0$.

На основании того, что $q \to q_1$, по (8) будем иметь

$$\lim_{t \to t_1} \Phi = 0$$

и тогда по (12):

$$\lim_{t \to t_1} R = \lim_{t \to t_1} \frac{dI}{dt} = -\sqrt{2h};$$

следовательно, в некотором интервале I убывает монотонно. Четвертое и первое из уравнений (9) дают

$$\frac{d(\Phi I)}{dI} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{I \ln I}{R} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

откуда видно, что Φ — бесконечно малая, порядка не ниже $I \ln I$. Из третьего и первого уравнений (9)

$$\frac{d\varphi}{dI} = \frac{\Phi}{IR},$$

откуда такое же заключение получим относительно $\varphi - \varphi_1$. Если $\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, то положив

$$-\frac{\varphi - \varphi_1}{I \ln I} = \psi, \quad -\frac{\Phi}{I \ln I} = \Psi$$

---

[1]) Если положить $\xi_1' = 0$, то по (5): $x_1' = -\sqrt{\frac{2h}{\mu_2}}$ и $\frac{\xi}{x'} \to 0$, что невозможно.

и приняв в уравнениях (9) I за аргумент, заменим (9) системой двух уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} I\frac{d\psi}{dI}+\psi-\psi_1-\frac{\Psi-\Psi_1}{R_1}&=-\frac{\psi}{\ln I}+\Psi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right),\\ I\frac{d\Psi}{dI}+2(\Psi-\Psi_1)&=-\frac{\Psi}{\ln I}+\frac{\frac{\partial V}{\partial\varphi}}{R}-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_1}{R_1}. \end{aligned}\right\}\tag{19}$$

уравнением

$$R=-\sqrt{2h+2U-I^2\ln^2 I\,\Psi^2}\tag{19'}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dI}=\frac{1}{R},\tag{19''}$$

из которого, после интегрирования системы (19), t определяется при помощи квадратуры.

В уравнениях (19) положено:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_1=\lim_{\substack{I\to+0\\ \varphi\to\varphi_1}}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\mp\lim_{\varphi\to\varphi_1}\sum m_i m_j p_k';\quad R_1=-\sqrt{2h},$$

$$\Psi_1=\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_1}{2R_1},\quad \psi_1=\frac{\Psi_1}{R_1}=\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_1}{2R_1^2}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)=\pm(-I\ln I)\sum m_i m_j p_k\left(1+\frac{\ln p_k}{\ln I}-\frac{p_k'^2}{p_k^2\ln I}\right).$$

Правые части уравнений (19) и их частные производные по ψ, Ψ — непрерывны в окрестности системы значений $I=0$, $\psi=\psi_1$, $\Psi=\Psi_1$ и стремятся к нулю при $I\to+0$, $\psi\to\psi_1$, $\Psi\to\Psi_1$, а корни характеристического уравнения — оба отрицательны. Следовательно, существует единственное решение системы (19), такое, что при $I\to+0$:

$$\psi\to\psi_1,\quad \Psi\to\Psi_1.$$

6

Случай $q_1=0$ $\left(x_1'=0,\ \xi_1'=-\sqrt{\frac{2h}{\mu_3}}\right)$, как указано в п. 5, возможен только при нижнем знаке в формуле (4). Так как в данном случае

$$\lim_{t\to t_1}(\ln r_0-\ln r_1)=\lim_{t\to t_1}\ln\frac{\xi-\mu_0 x}{\xi+\mu_1 x}=0,$$

то второе из уравнений (3) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(m_0+m_1)\ln x + \varepsilon, \tag{20}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $t \to t_1$; следовательно, $\frac{d^2x}{dt^2} \to +\infty$ и в некотором интервале x' стремится к нулю монотонно возрастая.

Из уравнения (20) найдем

$$x' = \left[-\sqrt{2(m_0+m_1)} + \varepsilon_1\right]\sqrt{-x\ln x} \quad (\varepsilon_1 \to 0 \text{ при } t \to t_1),$$

откуда видим, что $t_1 - t$ и ξ — бесконечно малые порядка $\sqrt{-\frac{x}{\ln x}}$ и, наоборот, x — бесконечно малая порядка $-\xi^2\ln\xi$, а x' — порядка $-\xi\ln\xi$. Приняв тогда в уравнениях (3) ξ за аргумент и введя новые переменные z, Z по формулам

$$x = -\xi^2\ln\xi z, \quad x' = -\xi\ln\xi Z,$$

придем к рассмотрению системы типа (19):

$$\xi\frac{dz}{d\xi} + 2(z-z_1) - \frac{Z-Z_1}{\xi_1'} = -\frac{z}{\ln\xi} + Z\left(\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi_1'}\right),$$

$$\xi\frac{dZ}{d\xi} + Z - Z_1 = -\frac{Z}{\ln\xi} + \frac{1}{\xi'}\left[(m_0+m_1)\left(2 - \frac{2\xi'}{\xi_1'} + \frac{\ln(-\ln\xi)}{\ln\xi} + \frac{\ln z}{\ln\xi}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m_2}{\ln\xi}\ln\frac{1+\mu_0\xi\ln\xi z}{1-\mu_1\xi\ln\xi z}\right], \tag{21}$$

где

$$\xi' = -\sqrt{\frac{2h+2U-\mu_2\xi^2\ln^2\xi Z}{\mu_3}}, \tag{21'}$$

$$U = -\Sigma m_i m_j r_k(\ln r_k - 1), \quad r_0 = \xi(1+\mu_0\xi\ln\xi z),$$

$$r_1 = \xi(1-\mu_1\xi\ln\xi z), \quad r_2 = -\xi^2\ln\xi z,$$

$$Z_1 = \frac{2(m_0+m_1)}{\xi_1'} = -\sqrt{\frac{2m_2(m_0+m_1)^3}{Mh}}, \quad z_1 = \frac{Z_1}{\xi_1'} = \frac{m_2(m_0+m_1)^2}{Mh}.$$

Так как правые части уравнений (21) удовлетворяют тем же условиям, что и правые части (19) [1]), то приходим к выводу, что существует единственное решение системы (21), такое, что при $\xi \to 0$:

$$z \to z_1, \quad Z \to Z_1.$$

---

[1]) Характеристическое уравнение имеет отрицательные корни: -1 и -2.

7

Рассмотрим, наконец, случай: $I_1=0$, $h=0$ $(x_1'=0,\ \xi_1'=0)$. В этом случае, согласно п. 5, в окрестности $r_k=0$ возможно только отталкивание.

Из четвертого уравнения (3) и из (7) следует, что в окрестности $t=t_1$ $\frac{d\xi'}{dt}$ и $\frac{d^2I^2}{dt^2}$ постоянно положительны; следовательно, ξ' и $\frac{dI^2}{dt}$ стремятся к нулю, монотонно возрастая, то есть ξ' и I в окрестности $t=t_1$ убывают монотонно.

Положив

$$\frac{R}{\sqrt{-I\ln I}}=P,\quad \frac{\Phi}{\sqrt{-I\ln I}}=\Psi, \tag{22}$$

заменим уравнения (9) системой

$$\frac{1}{\sqrt{-I\ln I}}\frac{dI}{dt}=P,\ \frac{I}{\sqrt{-I\ln I}}\frac{dP}{dt}=\Psi^2-\frac{P^2}{2}\left(1+\frac{1}{\ln I}\right)+\sum m_im_jp_k\left(1+\frac{\ln p_k}{\ln I}\right),$$

$$\frac{I}{\sqrt{-I\ln I}}\frac{d\varphi}{dt}=\Psi,\quad \frac{I}{\sqrt{-I\ln I}}\frac{d\Psi}{dt}=-\left(3+\frac{1}{\ln I}\right)P\Psi+\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \tag{23}$$

где, в выражении (10′) для $\frac{\partial V}{\partial\varphi}$ надо брать нижний знак (+). Интеграл энергии (12) примет вид

$$P^2+\Psi^2=2V=2\sum m_im_jp_k\left(1+\frac{\ln p_k-1}{\ln I}\right). \tag{24}$$

Так как

$$p_k<\sqrt{\frac{M}{m_im_j}},\quad p_1>\sqrt{\frac{M}{\Sigma m_im_j}}, \tag{25}$$

то

$$m_2m_0\sqrt{\frac{M}{\Sigma m_im_j}}+\varepsilon<V<\sqrt{M}\sum\sqrt{m_im_j}+\varepsilon_1, \tag{26}$$

где $\varepsilon\to0$, $\varepsilon_1\to0$ при $t\to t_1$ (при $I\leqslant I_0<1$).

Следовательно, по (24) и (26), P^2 и Ψ^2 остаются ограниченными при $t\to t_1$. Исключив P^2 из второго уравнения (23) и (24), получим:

$$\frac{I}{\sqrt{-I\ln I}}\frac{dP}{dt}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{\ln I}\right)\Psi^2+I\frac{\partial V}{\partial I}\quad\left[I\frac{\partial V}{\partial I}=\frac{\Sigma m_im_jp_k(1-\ln p_k)}{\ln^2 I}\right],$$

или, приняв I за аргумент, на основании первого из (23):

$$I\frac{dP^2}{dI}=\left(3+\frac{1}{\ln I}\right)\Psi^2+2I\frac{\partial V}{\partial I}.$$

Вследствие ограниченности $|\Sigma m_i m_j p_k(1-\ln p_k)|$ по (25), $\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI$ существует, и последнее уравнение можно записать в виде

$$I\frac{d}{dI}\left(P^2-2\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI\right)=\left(3+\frac{1}{\ln I}\right)\Psi^2. \tag{27}$$

Следовательно, при достаточно малых значениях I, функция $P^2-2\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI$ монотонно убывает, а потому эта функция (и P^2) стремится при $t\to t_1$ к определенному пределу $P_1{}^2\geqslant 0$; тогда, по (27), в окрестности $t=t_1$ $\inf\Psi^2=0$, а по (24) и (26): $P_1{}^2>0$.

Если $\lim\limits_{t\to t_1}\Psi^2=0$[1], то при $t\to t_1$ $(I\to 0)$:

$$\lim 2V=\lim 2\sum m_i m_j p_k=P_1{}^2 \tag{28}$$

и φ стремится к определенному пределу φ_1, где φ_1 — корень уравнения $\lim\limits_{I\to 0}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$, лежащий между χ и $\frac{\pi}{2}$[2] (иначе $|\Psi|$ неограниченно возрастало бы при $I\to+0$).

При помощи (10′) и (11′) найдем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{m_2}{\sqrt{\mu\,\mu_3}}=\sqrt{\frac{Mm_2}{m_0\,m_1}}\quad\text{и}\quad P_1{}^2=2\sqrt{(m_0+m_1)(m_1+m_2)(m_2+m_0)}.$$

Приняв теперь в (23) I за аргумент, придем к рассмотрению системы двух уравнений первого порядка

$$I\frac{d\varphi}{dI}=\frac{\Psi}{P_1}+\Psi\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P_1}\right),\quad I\frac{d\Psi}{dI}=\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{P_1}(\varphi-\varphi_1)-$$

$$-3\Psi-\frac{3}{\ln I}\Psi+\left[\frac{\frac{\partial V}{\partial\varphi}}{P}-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{P_1}(\varphi-\varphi_1)\right], \tag{29}$$

где

$$P=-\sqrt{2V-\Psi^2}, \tag{30}$$

[1]) Вопрос о невозможности существования таких решений, при которых Ψ^2 неограниченно осциллирует между нулем и некоторой конечной верхней границей, требует особого исследования.

[2]) Если допустить, например, что $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial V}{\partial\varphi}$ в окрестности $t=t_1$ имело бы вид $-\frac{m_0 m_1\sin\varphi}{\sqrt{\mu_2}}\left(1+\frac{\ln\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_2}}}{\ln I}\right)+\varepsilon$ ($\varepsilon\to 0$ при $t\to t_1$); следовательно, $\inf\left|\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|>0$ в окрестности $t=t_1$ и тогда $|\Psi|$ неограниченно возрастало бы; так же убедимся, что $\varphi_1\neq\chi$.

и уравнения

$$\frac{dt}{dI}=\frac{P}{\sqrt{-I\ln I}}. \qquad (31)$$

При этом

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=-\sum m_i m_j\left[p_k\left(1+\frac{\ln p_k}{\ln I}\right)-\frac{p_k'^2}{p_k \ln I}\right],$$

$$(V_{\varphi\varphi})_1=\lim_{\substack{I\to+0\\ \varphi\to\varphi_1}}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=-V_1=-\frac{P_1^2}{2}.$$

Характеристическое уравнение системы (29)

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{1}{P_1} \\ \dfrac{(V_{\varphi\varphi})_1}{P_1} & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+\frac{1}{2}=0$$

имеет корни действительные и отрицательные.

Следовательно, в силу непрерывности правых частей уравнений (29) и их частных производных по φ, Ψ в окрестности $I=0$, $\varphi=\varphi_1$, $\Psi=0$, причем функции $\Psi\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P_1}\right)$, $-\frac{3}{\ln I}\Psi+\frac{\frac{\partial V}{\partial\varphi}}{P}-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{P_1}(\varphi-\varphi_1)$ и их частные производные по φ, Ψ стремятся к нулю при $I\to+0$, $\varphi\to\varphi_1$, $\Psi=0$, приходим к заключению о существовании единственного решения системы (29), такого, что при $I\to+0$:

$$\varphi\to\varphi_1, \quad \Psi\to 0.$$

Поступило 25.VII 1950 г.