К теории диференциальных уравнений случайных процессов

И. И. Гихман

Задача настоящей работы — дать достаточно общее определение диференциального уравнения для случайных функций, установить соответствующие теоремы существования и единственности и, исходя из введенного понятия диференциального уравнения, получить возможно более широкий класс процессов Маркова.

Определение диференциального уравнения для случайных функций, предлагаемое в этой работе, можно рассматривать как видоизменение соответствующих построений теории диференциальных стохастических уравнений, предложенной С. Н. Бернштейном [1, 2] [1].

Наиболее существенным отличием предлагаемой в настоящей работе схемы образования диференциального уравнения от построений С. Н. Бернштейна является следующее.

Основное в работе — это представление о случайной функции как о траектории некоторой динамической системы. В связи с этим представляется недостаточным ограничиться доказательством существования предельной функции распределения в некоторый момент времени, а необходимо также установить существование, хотя бы в некотором теоретико-вероятностном смысле, самих случайных траекторий, определяемых диференциальными стохастическими уравнениями. В работах же Бернштейна рассматривается только вопрос о существовании предельных функций распределения (плотностей распределения).

В некоторых работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (например [3]) развивается важная точка зрения, согласно которой процессы Маркова могут быть получены исходя из динамических систем, в результате некоторых предельных переходов в уравнениях динамики этих систем.

Если исходить из такой точки зрения, то приходится рассматривать динамические системы, на которые действуют случайные импульсы с коррелятивно связанными приращениями. Таким образом, возникает

---

[1]) Указание на возможность определения, почти совпадающего с данным в настоящей работе, имеется в книге Леви [4]. Отметим, что основные результаты настоящей работы были опубликованы в заметке автора [5].

необходимость рассматривать диференциальные уравнения, не предполагая независимости приращений случайных возмущающих функций на непересекающихся интервалах времени. В работах же С. Н. Бернштейна и в упомянутой книге Леви случай коррелятивно связанных во времени случайных возмущений не рассматривается.

Работа состоит из двух частей. Настоящая, первая часть, содержит два параграфа.

В § 1 даются абстрактные определения и приводится одна теорема, устанавливающая связь между процессами Маркова и процессами с независимыми приращениями.

Основой всех определений служит общая концепция случайного процесса, развитая А. Н. Колмогоровым [6].

По поводу вводимых определений следует сделать следующие замечания.

Рассматриваемые в настоящей работе случайные функции зависят не только от одного параметра — времени, но еще и от другого — „пространственного" параметра x (многомерного или даже бесконечномерного).

Это означает, что, рассматривая движение динамической системы, находящейся под воздействием случайных возмущений, эти возмущения принимаются, вообще говоря, различными в различных точках фазового пространства в один и тот же момент времени. Рассмотрение таких случайных возмущений кажется не только вполне естественным, но и необходимым для получения общего непрерывного (в смысле определения в [7]) многомерного марковского процесса.

Что касается пространства значений принимаемых случайными функциями, то по крайней мере в § 1—2 не имело смысла ограничиваться конечномерным случаем, хотя бы потому, чтобы иметь возможность охватить бесконечномерный случай квантовой механики. С другой стороны, ограничение конечномерным случаем в § 1—2 не вносит никаких упрощений в рассуждениях. Не стремясь к наибольшей общности, можно ограничиваться случаем гильбертового пространства (§ 2).

В § 2 дается определение и доказывается существование решения диференциального уравнения со случайными функциями.

Поясним приводимые там построения на простом примере.

Будем исходить из схемы точки $x(t)$, блуждающей вдоль вещественной оси OX, причем будем считать, что смещение $\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t)$ точки $x(t)$ за малый промежуток времени Δt отличается от выражения

$$A(t, x(t))\Delta t + B(x(t))(\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)) \qquad (1)$$

на величину „малую" по сравнению с Δt. Выражение (1) представляет собой сумму двух смещений: смещения „регулярного" — $A(t, x(t))\Delta t$, характерного для динамической системы, определяемой обычным диференциальным уравнением, и из случайного смещения $B(x(t))(\alpha(t+\Delta)-\alpha(t))$, пропорционального приращению случайной функции $\alpha(t)$. Множитель $B(x)$ характеризует анизотропность пространства по отношению к случайным возмущениям.

Характерной особенностью случайных функций является то, что, вообще говоря, отношение

$$\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$

не имеет определенного смысла, когда $\Delta t \to 0$, и ведет себя в наиболее интересных случаях примерно как $\xi(t)/\sqrt{\Delta t}$, где $\xi(t)$ случайные функции, независимые при разных t.

Это обстоятельство и привело С. Н. Бернштейна к определению диференциального стохастического уравнения как уравнения, имеющего вид

$$\Delta x = A\Delta t + B\sqrt{\Delta t} = A(x, t, \xi_t)\Delta t + B(x, t, \xi_t)\sqrt{\Delta t}. \tag{2}$$

Уравнение (2) следует понимать только в том смысле, что оно позволяет определить закон распределения величины $x(t)$ как предел законов распределения случайных величин $x_n(t)$ $(n\to\infty)$, определяемых рекуррентной последовательностью равенств

$$x(t_{i+1})-x(t_i)=A(t_i, x(t_i), \xi_{t_i})\Delta t_i+B(t_i, x(t_i), \xi_{t_i})\sqrt{\Delta t_i},$$

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t,$$

при условии

$$\sigma_n=\max_i(t_{i+1}-t_i)\to 0, \text{ когда } n\to\infty.$$

При такой постановке вопроса существование самих предельных случайных функций $x(t)=\lim x_n(t)$, где предел понимается в некотором теоретико-вероятностном смысле, не рассматривается.

В соответствии с § 2 диференциальное уравнение

$$dx = A(t, x)\,dt + B(x)\,d\alpha(t), \tag{3}$$

соответствующее схеме (1), определяет функцию $x(t)$ как предел (в смысле сходимости в среднем квадратическом) последовательности функционалов, определенных на пространстве случайных функций $\alpha(t)$ посредством рекуррентных соотношений

$$x(t_{i+1})-x(t_i)=A(t_i, x(t_i))\Delta t_i+B(x(t_i))\Delta\alpha(t_i),$$

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t, \quad \Delta\alpha(t_i)=\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i), \quad x(0)=x_0.$$

При этом уже не предполагается, что случайные функции $\alpha(t)$ имеют независимые приращения, а рассматриваются более общие предположения.

Доказывается (теорема II), что при известных предположениях относительно $A(t, x)$, $B(x)$ (требуется, чтобы они удовлетворяли условию Липшица с одной и той же константой на всей прямой $-\infty < x < \infty$) и случайных функций $\alpha(t)$ (условные математические ожидания приращения $\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ и его квадрата $[\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)]^2$ имеют величину порядка Δt), решение в указанном смысле уравнения (3) существует.

Заметим, что сделанные предположения не означают непрерывности случайных функций $\alpha(t)$. Требуемые условия будут, например, выполнены, если функции $\alpha(t)$ изменяются скачками, причем величины этих скачков независимы и среднее число скачков в течение единицы времени так же, как и средняя величина скачка, конечны.

Данное определение диференциального уравнения (3) является, по сути, не определением диференциального уравнения, а лишь некоторой конструкцией решения уравнения (3), причем само уравнение имеет лишь постольку смысл, поскольку именно эта конструкция может быть осуществлена.

В работе дается другое определение решения диференциального стохастического уравнения, не зависящее от способа построения этого решения. В случае уравнения (3) и функций $\alpha(t)$ с независимыми приращениями это определение означает следующее:

а) математическое ожидание абсолютной величины разности

$$x(t+\Delta t) - x(t) - \{A(t, x(t))\Delta t + B(x(t))(\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t))\} \tag{4}$$

есть величина $o(\sqrt{\Delta t})$,

б) условное математическое ожидание разности (4) в предположении

$$x(t) = y$$

есть величина $o(\Delta t)$.

Доказывается, что предлагаемая конструкция решения уравнения (3) действительно является решением уравнения в только что указанном новом смысле и что это решение в рассматриваемом классе случайных функций единственно (лемма 2,6, теорема 3).

В силу теоремы 1 (§ 1), если случайные функции $\alpha(t)$ имеют независимые приращения, случайный процесс, определяемый уравнением (3), является процессом Маркова. Далее, если функции $\alpha(t)$ непрерывны, естественно ожидать, что и соответствующий марковский процесс также непрерывен и удовлетворяет диференциальным уравнениям Колмогорова [7]

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial \tau} + a(\tau, \xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2} b(\tau, \xi)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(a(t, x) f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(t, x) f], \end{gathered} \tag{4}$$

где $f=f(\tau, \xi, t, x)$ — плотность распределения вероятности перехода из точки ξ в момент τ в точку x в момент времени $t(t>\tau)$, и

$$a(t, x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M\{(x(t+\Delta)-x(t))\quad \psi_{\mathfrak{A}}[x(t+\Delta)]\,/\,x(t)=x\},$$

$$b(t, x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M\{(x(t+\Delta)-x(t))^2\psi_{\mathfrak{A}}[x(t+\Delta)]\,/\,x(t)=x\},$$

где $\psi_{\mathfrak{A}}(x)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ — некоторая фиксированная сфера с центром в точке x, $M(L|K)$ — условное математическое ожидание величины L при гипотезе K.

Можно также ожидать, что в силу уравнения (3) коэфициенты $a(t, x)$, $b(t, x)$ уравнений (4) окажутся равными $A(t, x)$, $B(x)\sigma(t)$ соответственно. Доказательству соответствующих предложений в многомерном случае посвящен § 4.

По поводу многомерного случая сделаем еще следующее замечание.

Для случайного блуждания в n-мерном пространстве естественным обобщением уравнения (3) является уравнение

$$dx^i=A^i(t, x)\,dt+\sum_{k=1}^{m}B^{ik}(x)\,d\alpha_k(t),\quad i=1,\dots n, \tag{5}$$

где уже x обозначает точку в n-мерном пространстве $x=\{x^1, x^2,\dots, x^n\}$ и

$$\alpha(t)=\{\alpha_1(t),\dots,\alpha_m(t)\}$$

случайные m-мерные вектор-функции.

Опять, в случае непрерывных функций $\alpha(t)$ с независимыми приращениями, можно получить для вероятностей перехода диференциальные уравнения Колмогорова, например уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i(t, x)f)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}[b^{ij}(t, x)f], \tag{6}$$

где

$$a^i(t, x)=A^i(t, x),$$

$$b^{ij}(t, x)=\sum_{r,s=1}^{m}B^{ir}(x)\,B^{js}(x)\,\sigma_{rs}(t),$$

$$\sigma_{rs}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M(\alpha^r(t+\Delta)-\alpha^r(t))\,(\alpha^s(t+\Delta)-\alpha^s(t)).$$

Чтобы получить диференциальное уравнение Колмогорова с произвольной квадратической формой

$$\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(t, x)\,\xi_i\xi_j,$$

откажемся от предположения, что случайная часть бесконечно малого смещения точки имеет специальный вид

$$\left\{ \sum_{k=1}^{m} B^{ik}(x)\left(\alpha_k(t+\Delta t) - \alpha_k(t)\right) \right\},$$

заменив его смещением вида

$$\psi(t+\Delta t, x) - \psi(t, x),$$

где $\psi(t, x)$ — случайные функции, аргументом которых является не только время t, но и координаты движущейся точки.

Именно поэтому в настоящей работе пришлось несколько усложнить понятие случайного процесса, рассматривая случайные функции, зависящие не только от времени, но и от „пространственной" координаты.

Заметим, что характер зависимости случайных функций от времени и от пространственных координат существенно различен. В то время как по отношению ко времени случайные функции не диференцируемы, во II части работы предполагается, что по отношению к пространственным координатам случайные функции диференцируемы достаточное число раз.

В § 2 доказывается также теорема (теорема 4) о непрерывной зависимости решения уравнения (5) от возмущающего случайного процесса (характеризуемого функциями $\alpha(t)$). Эта теорема, в частности, может служить обоснованием перехода, в соответствующих случаях, от немарковских процессов к марковским (ср. например [3], где рассматривается несколько более сложный случай, но доказательства до конца не доведены).

Во второй части работы (§ 3—4) полученные результаты будут применены к теории процессов Маркова.

В § 3 рассматривается зависимость решений диференциальных уравнений от начальных данных. Строятся функции, соответствующие первому и второму приближениям решения диференциального уравнения и доказываются предложения, аналогичные теоремам о диференцируемости по начальным значениям решений обыкновенных диференциальных уравнений.

В § 4, как уже упоминалось, рассматривается случай, когда случайные функции $\alpha(t)$ имеют независимые приращения.

После анализа применимости предыдущих результатов к рассматриваемому случаю выводится первое уравнение Колмогорова для функции

$$f(\tau, \xi) = MF(X(t)),$$

где $X(\tau, \xi; t)$ — решение диференциального стохастического уравнения в момент времени t при начальных условиях

$$X(\tau) = X(\tau, \xi, \tau) = \xi.$$

Уравнения (4) для плотностей могут быть получены совершенно аналогично; соответствующий вывод не приведен, чтобы не увеличить объема статьи. Приводимый вывод уравнения Колмогорова не опирается на теоремы существования решения задачи Коши для параболических уравнений или на априорное существование процесса Маркова, а, наоборот, содержит в себе теорему существования решения определенной задачи Коши для параболических уравнений.

§ 1

Пусть Γ и Φ — некоторые множества. Через Γ^c обозначим произвольное множество функций $\alpha(t, x)$, принимающих значения α из Γ и определенных для всех неотрицательных вещественных чисел t и всех $x \in \Phi$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое борелевское тело подмножеств Γ^c, $\Gamma^c \in \mathfrak{F}$, и P — вполне аддитивная функция множеств, определенная на $\mathfrak{F}$, образующая вместе с $\mathfrak{F}$ поле вероятностей $\{\mathfrak{F}, P\}$ в смысле Колмогорова [6].

В дальнейшем поле вероятностей $\{\mathfrak{F}, P\}$, имеющее указанную структуру, будем называть случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$ в Φ.

В настоящем параграфе предположено, что Γ линейное и Φ произвольное — топологические пространства.

Обозначим через Γ^n n-ую топологическую степень пространства Γ, A^n — произвольное борелевское множество в Γ^n и через

$$D(t_0, t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n; A^n),$$

где $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, — множество всех функций $\alpha(t, x) \in \Gamma^c$, удовлетворяющих соотношению

$$\{\alpha(t_1, x_1) - \alpha(t_0, x_1), \ldots, \alpha(t_n, x_n) - \alpha(t_{n-1}, x_n)\} \in A^n.$$

Множества $D(t_0, t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n; A^n)$ назовем диференциальными цилиндрическими множествами [8].

Определение. *Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ называется процессом класса D, если каждое его диференциальное цилиндрическое множество содержится в $\mathfrak{F}$.*

Пусть λ — произвольное множество вещественных чисел. Каждому множеству A_λ функций $\alpha(t, x)$ со значениями в Γ, определенных на λ и на произвольном множестве точек x из Φ, можно поставить в соответствие цилиндрическое множество A функций из Γ^c, определяя A как множество всех функций из Γ^c, совпадающих с некоторой функцией из A_λ, в области определения последней.

Определение. *Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ называется процессом класса W, если: 1) $\{\Gamma^c, P\}$ — процесс класса D, 2) для любых P-измеримых множеств A_1, A_2, соответствующих некоторым множествам $A_{[\tau_1, \tau_2]}$, $A_{[\tau_3, \tau_4]}$, где $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_3, \tau_4]$ непересекающиеся сегменты, выполнено соотношение*

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2)\,^{1)}.$$

¹) Через $A_1 A_2$ обозначено пересечение множеств A_1, A_2.

Это определение естественно только в том случае, когда вероятность P определена только на лебеговом расширении тела диференциальных цилиндрических множеств.

Если $F[\alpha(\tau, y)]$ некоторый P-измеримый на Γ^c функционал, то через $MF[\alpha(\tau, y)]$ обозначим математическое ожидание функционала $F[\alpha(\tau, y)]$,

$$MF[\alpha(\tau, y)] = \int\limits_{\Gamma^c} F[\alpha(\tau, y)]\, P(d\Gamma^c),$$

через

$$M\left\{F[\alpha(\tau, y)] \mid \beta(\tau, y_1)\Big|_{t_1}^{t_2}, \ldots, \beta(\tau, y_n)\Big|_{t_{2n-1}}^{t_{2n}}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma^c} F[\alpha(\tau, y)]\, P\left\{d\Gamma^c \mid \beta(\tau, y_1)\Big|_{t_1}^{t_2}, \ldots, \beta(\tau, y_n)\Big|_{t_{2n-1}}^{t_{2n}}\right\}$$

условное математическое ожидание функционала $F[\alpha(\tau, y)]$ при гипотезах

$$\alpha(\tau, y_k) = \beta(\tau, y_k) \qquad t_{2k-1} \leqslant \tau < t_{2k}, \tag{1,1}$$

где

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и $P\left\{A/\beta(\tau, y_1)\Big|_{t_1}^{t_2}, \ldots, \beta(\tau, y_n)\Big|_{t_{2n-1}}^{t_{2n}}\right\}$ условная вероятность множества A при тех же гипотезах (1, 1).

Среди случайных процессов особенно важную роль играют процессы Маркова, математическая теория которых была создана А. Н. Колмогоровым [6]. Можно дать следующее, удобное в настоящей работе, определение процессов Маркова.

Пусть Γ^c состоит из функций $\alpha(t)$, зависящих только от t.

Допустим, что для любого борелевского множества A^n из Γ^n, множество всех функций $\alpha(t) \in \Gamma^c$, удовлетворяющих соотношению

$$\{\alpha(t_1), \alpha(t_2), \ldots, \alpha(t_n)\} \in A^n,$$

P-измеримо.

Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ называется процессом Маркова, если для произвольной ограниченной борелевской функции $f(\alpha)$, определенной на Γ,

$$M\{f[\alpha(\tau)] \mid \alpha(t)\} = M\{M\{f[\alpha(\tau)] \mid \alpha(t')\} \mid \alpha(t)\} \tag{1, 2}$$

$$t < t' < \tau.$$

В дальнейшем определяются случайные процессы посредством некоторых специальных классов функций, заданных на Γ^c, причем о последних будем говорить, что они определяют динамическую систему, находящуюся под воздействием некоторого случайного процесса.

Под этой терминологией подразумевается следующее.

Пусть в пространстве $\Phi \times \Gamma^c$ (знаком $\times$ здесь и в дальнейшем обозначено топологическое произведение пространств) определена (при фиксированных x, τ почти всюду в Γ) совокупность функций, принимающих значения в Φ,

$$X(t) = S[\tau, x \mid t, \alpha(\theta, y)], \tag{1, 3}$$

зависящая от двух параметров t и τ ($t \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$).

Совокупность функций (1, 3) определяет динамическую систему Σ, находящуюся под воздействием случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$, если выполнены следующие условия:

1) отображение пространства Γ^c на множество функций $X(t)$- определяемое соотношением (1, 3) при τ и x фиксированных, P-изме, римо, то есть, если $\tau < t_1 < \ldots < t_n$ произвольная система положительных чисел и Ω^n произвольное борелевское множество в Φ^n, то множество всех функций $\alpha(\theta, y) \in \Gamma^c$, для которых

$$\{S[\tau, x \mid t_1, \alpha(\theta, y)], \ldots, S[\tau, x \mid t_n, \alpha(\theta, y)]\} \in \Omega^n,$$

P-измеримо;

2) $$S[\tau, x \mid \tau, \alpha(\theta, y)] = x;$$

3) при $t < t' < t''$ имеет место следующее функциональное уравнение

$$S[t, x \mid t'', \alpha(\theta, y)] = S[t', S[t, x \mid t', \alpha(\theta, y)] \mid t'', \alpha(\theta, y)];$$

4) функция $S[\tau, x \mid t, \alpha(\theta, y)]$ зависит только от совокупности значений случайных функций $\alpha(\theta, y)$ для значений θ в $[\tau, t]$.

В рассматриваемом случае пространство Φ будем называть фазовым пространством системы Σ.

Обозначим через Φ^c множество всех функций $x(t)$ ($0 \leqslant t < \infty$), имеющих вид

$$x(t) = S[0, x \mid t, \alpha(\theta, y)].$$

Естественно рассматривать функции из Φ^c как случайные функции. Для того чтобы определить на Φ^c вероятность, поступим следующим образом.

Обозначим через $a = \{t_1, t_2, \ldots t_n\}$ произвольную возрастающую последовательность положительных чисел, $t < t_1$, и через Ω^a произвольное борелевское множество в Φ^n. Положим

$$\varphi(t, x \mid \Omega^a) = P[\{S[t, x \mid t_1, \alpha(\theta, y)], \ldots, S[t, x \mid t_n, \alpha(\theta, y)]\} \in \Omega^a] \tag{1, 4}$$

и

$$\varphi(x \mid \Omega^a_*) = \varphi(0, x \mid \Omega^a).$$

Допустим, что при фиксированных t и Ω^a, $\varphi(t, x/\Omega^a)$ есть борелевская функция аргумента x в Φ и что, кроме того, на теле борелевских множеств Φ задана некоторая вполне аддитивная положительная функция множеств $m(A)$, причем $m(\Phi)=1$.

На каждом множестве Ω^a определим функцию множеств $\overline{\Pi}(\Omega^a)$ равенствами:

$\overline{\Pi}(\Omega^a) = \int\limits_{\Phi} \varphi(x/\Omega^a)\, m(d\Phi)$, если $t_1 > 0$ и если $t_1 = 0$, $\Omega^a = A \times \Omega^{a'}$,

где $a' = \{t_2, t_3, \ldots, t_n\}$, $\overline{\Pi}(\Omega^a) = \int\limits_{A} \varphi(x/\Omega^{a'})\, m(dA)$.

Согласно одной теореме Колмогорова [6] функция $\overline{\Pi}(\Omega^a)$ может быть продолжена на некоторое борелевское тело $\overline{\mathfrak{F}}$ подмножеств из $\overline{\Phi}^c$, где $\overline{\Phi}^c$ — множество всех функций $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в Φ.

Легко убедиться, что

$$\overline{\Pi}^*(\Phi^c) = 1,$$

где $\overline{\Pi}^*$ — внешняя мера множеств.

Рассмотрим борелевское тело $\mathfrak{F}$ подмножеств Φ^c, состоящее из всех множеств A, представимых в виде $A = \Phi^c \overline{A}$, где $\overline{A}$ — произвольное множество из $\overline{\mathfrak{F}}$, и определим на нем функцию множеств $\Pi(A)$, положив

$$\Pi(A) = \overline{\Pi}(\overline{A}), \text{ если } A = \Phi^c \overline{A}$$

(однозначность такого определения см. в [8]).

Множество Φ^c и функцию множеств $\Pi(A)$, определенную на теле $\mathfrak{F}$, можно рассматривать как некоторый случайный процесс $\{\Phi^c, \Pi\}$.

О случайном процессе $\{\Phi^c, \Pi\}$ будем говорить, что он индуцирован в фазовом пространстве системы Σ случайным процессом $\{\Gamma^c, P\}$.

Можно установить весьма простую связь, существующую между динамической системой Σ, находящейся под влиянием случайного процесса класса W, и процессами Маркова.

Теорема 1. *Случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ класса W индуцирует в фазовом пространстве системы Σ процесс Маркова.*

Доказательство. Обозначим математическое ожидание некоторой Π-измеримой функции f, заданной на Φ^c, символом M^*f, оставив обозначение Mg для математического ожидания функции g, заданной на Γ^c.

Функцию $f[x(\tau)]$ (например, при фиксированном τ), борелевскую в Φ, можно рассматривать как P-измеримую функцию на Γ^c, если рассматривать $x(\tau)$ как функцию, заданную на Γ^c. Тогда имеет место соотношение

$$M^*f[x(\tau)] = \int\limits_{\Phi} Mf[S[0, x/\tau, \alpha(\theta, y)]]\, m(d\Phi), \tag{1,4}$$

вытекающее непосредственно из определения функции множеств Π.

Докажем теперь, что

$$M^*\{f[x(\tau)]/y(t)\} = Mf(S[t, y/\tau, \alpha(\theta, z)]). \qquad (1,5)$$

При $t=0$ это соотношение также следует непосредственно из определения функции H. Если же $t>0$, то для его доказательства достаточно показать, что для любой борелевской в Φ функции $\varphi(x)$, при $t<\tau$

$$M^*\varphi[x(t)]f[x(\tau)] = M^*[\varphi|y(t)]Mf(S[t, y/\tau, \alpha(\theta, z)])].$$

Действительно,

$$M^*\varphi[x(t)]f[x(\tau)] = \int_\Phi M\varphi(S[0, x/t, \alpha])f(S[0, x/\tau, \alpha])m(d\Phi) =$$

$$= \int_\Phi M\varphi(S[0, x/t, \alpha])f(S[t, S[0, x/t, \alpha]/\tau, \alpha])m(d\Phi).$$

Применяя теорему Фубини, что законно в силу определения процессов класса W, получим

$$M\varphi(S[0, x/t, \alpha])f(S[t, S[0, x/t, \alpha]/\tau, \alpha]) = M\{\varphi(y)Mf(S[t, y/\tau, \alpha])\}.$$

Таким образом,

$$M^*\varphi[x(t)]f[x(\tau)] = M^*(\varphi[y(t)]Mf[S[t, y/\tau, \alpha]]), \quad y=S[0, x/t, \alpha].$$

Тем самым равенство (1,5) доказано.

Докажем теперь, что процесс $\{\Phi^c, H\}$ есть процесс Маркова.

Применяя теорему Фубини, получим $(t>0)$

$$M^*\{f[x(\tau)]/y(t)\} = Mf[S[t', S[t, y/t', \alpha]/\tau, \alpha]] =$$

$$= M(Mf[S[t', u/\tau, \alpha]])_{u=S[t, y/t', \alpha]} = M^*\{M^*\{f[x(\tau)]/u(t')\}/y(t)\},$$

что и представляет собою требуемое.

§ 2

Допустим, что рассматривается некоторая система Σ в фазовом пространстве Φ и что в каждой точке пространства Φ на Σ действует некоторое случайное возмущение, зависящее от времени t и от положения Σ в Φ. Предположим, что смещение системы Σ за малый промежуток времени Δt, в некотором теоретико-вероятностном смысле, мало отличается от случайного возмущения в точке x, равного

$$\alpha(t+\Delta t, x) - \alpha(t, x),$$

где $\alpha(t, x)$ случайные функции, вообще говоря, недиференцируемые по t.

В настоящем параграфе рассматриваются, прежде всего, следующие вопросы.

Существуют ли движения в Φ описываемого типа?

Является ли система Σ динамической системой, находящейся под оздействием случайного процесса?

Прежде всего уточним постановку вопроса.

Пусть Φ и Γ два изоморфных (тождественных) гильбертовых пространства и на Φ издан случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ класса D.

Норму $x \in \Phi$ обозначим через $\|x\|$, скалярное произведение двух элементов x и y из Φ через (x, y). Через Mf будем обозначать математическое ожидание функции f, заданной на Γ^c, а через $M\left\{f \mid \beta(\theta, y)\Big|_{\tau}^{t}\right\}$ условное математическое ожидание функции f при гипотезе $\beta(\theta, y)$, где $\tau \leqslant \theta < t$.

Интересующий нас вопрос сформулируем следующим образом: существует ли для данного случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$ система Σ, находящаяся под влиянием случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$,

$$X(t) = X_t(\tau, \xi) = S[\tau, \xi \mid t, \alpha(\theta, y)], \tag{2,1}$$

$$X(\tau) = \xi,$$

удовлетворяющая условиям:

$$M\|X(t+\Delta) - X(t) - [\alpha(t+\Delta, X(t)) - \alpha(t, X(t))]\|^2 \leqslant \Delta\varphi(\Delta), \tag{2,2}$$

$$\left\| M\{X(t+\Delta) - X(t) - [\alpha(t+\Delta, X(t)) - \alpha(t, X(t))] / \beta(\theta, y)\Big|_{\tau}^{t}\}\right\| \leqslant L\Delta\varphi(\Delta), \tag{2,3}$$

где $\varphi(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$, $\Delta > 0$, $\varphi(\Delta) > 0$, $L = L[\beta(\theta, y)\Big|_{\tau}^{t}]$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких решений неравенств (2,2) и (2,3), для которых

$$ML^2[\beta(\theta, y)\Big|_{\tau}^{t}] < \infty. \tag{2,4}$$

В случае положительного ответа на поставленный вопрос будем говорить, что система $\Sigma\{X(t)\}$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$dX = \delta\alpha(t, X). \tag{2,5}$$

Когда случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ вырождается в фиксированную функцию $Y(t, x)$, условие (2,2) вытекает из условия (2,3) и, если $Y(t, x)$ диференцируема по t, из (2,3) вытекает уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} Y(t, x).$$

Наоборот, если рассматривать решения диференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} Y(t, x)$, для которых, например, $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ограничено, то из диференциального уравнения будет следовать (2,3).

Таким образом, поставленный ранее вопрос можно рассматривать как обобщение проблемы существования решений системы обычных диференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторый сегмент $[\tau, T]$ и систему $N+1$ чисел

$$\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T,$$

которую будем называть разбиением сегмента $[\tau, T]$ и обозначать через $\sigma = \sigma(N)$.

Для упрощения записи положим

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i, \quad \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta_i = |\sigma|,$$

$$\delta_i \alpha(t, x) = \alpha(t_{i+1}, x) - \alpha(t_i, x).$$

Пусть $\beta_0(y), \beta_1(y), \ldots, \beta_{i-1}(y)$ некоторые произвольные функции на Φ со значениями в Γ.

В дальнейшем будем считать, что случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ для всех x и y почти всюду в Γ^c удовлетворяет группе условий

I
1. $\| M\{\delta_i \alpha(t, x) / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}\| \leq K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) \; (1 + \|x\|) \Delta_i.$
2. $M\{\|\delta_i \alpha(t, x)\|^2 / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leq K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) \; (1 + \|x\|^2) \Delta_i.$
3. $\|M\{\delta_i [\alpha(t, x) - \alpha(t, y)] / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}\| \leq C \Delta_i \|x - y\|.$
4. $M\{\|\delta_i [\alpha(t, x) - \alpha(t, y)]\|^2 / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leq C \Delta_i \|x - y\|^2,$

где $M\{f[\delta\alpha(t, x)] / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}$ обозначает условное математическое ожидание функции $f[\delta\alpha(t, x)]$ при гипотезах

$$\delta_k \alpha(t, y) = \beta_k(y)$$

и при фиксированном значении x, а квадраты функций $K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1})$ имеют равномерно ограниченные математические ожидания

$$MK^2(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) \leq C.$$

Сделаем два замечания к приведенным условиям:

а) в силу I. 3—4 из соотношений I. 1—2 вытекает

I
1'. $\|M\{\delta_i \alpha(t, x) / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}\| \leq \Delta_i (C\|x\| + K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1})),$
2'. $M\{\|\delta_i \alpha(t, x)\|^2 / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leq \Delta_i (C\|x\|^2 + K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}));$

б) из неравенств I.3 и I.4, вытекают неравенства

3'. $\|M\{\delta[\alpha(t, y) - \alpha(t, x)]^2 / \alpha(\theta, y)\Big|_0^t\}\| \leq C\Delta \|x - y\|,$

4'. $M\{\|\delta[\alpha(t, y) - \alpha(t, x)]\|^2 / \alpha(\theta, y)\Big|_0^t\} \leq C\Delta \|x - y\|^2,$

имеющие место для всех x и y почти всюду в Γ^c.

Перейдем теперь к построению системы Σ, дающей положительный ответ на поставленный нами вопрос для случайных процессов, удовлетворяющих условиям I. 1—4.

С этой целью, для произвольного σ определим на $[\tau, T]$ функцию

$$x(t/\sigma) = x_t(\tau, \xi/\sigma) = S^\sigma[\tau, \xi/t, \alpha(\theta, y)],$$

зависящую от разбиения σ, как от параметра, положив для $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$x(t/\sigma) = x(t_n/\sigma) + \alpha(t, x(t_n/\sigma)) - \alpha(t_n, x(t_n/\sigma)) \tag{2,6}$$

и

$$x(\tau/\sigma) = \xi.$$

В дальнейшем будет доказано, что при $|\sigma| \to 0$ определенные таким образом функции независимо от выбора последовательности σ, стремятся, в известном смысле, к некоторой предельной функции, удовлетворяющей условиям (2,2), (2,3) и (2,4) и определяющей в Φ систему Σ, находящуюся под влиянием случайного процесса $\{I^\omega, P\}$.

Введем символ $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, под которым будем понимать величину, имеющую тот же порядок возрастания, что и указанные параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и равномерно ограниченную относительно всех других величин, не указанных среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (в фиксированном сегменте $[\tau, T]$).

В дальнейшем неоднократно придется встречаться с одним рекурентным неравенством, решение которого дается следующей леммой.

Лемма 2,1. *Пусть на некотором разбиении σ сегмента $[\tau, T]$ определена положительная функция $\varphi(t_n)$, удовлетворяющая неравенству*

$$\varphi(t_{n+1}) \leqslant (1 + k_1 \Delta_n)\varphi(t_n) + k_2 \varphi^{\frac{1}{m}}(t_n)\Delta_n + k_3\Delta_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{2,7}$$

где $k_1, k_2, k_3 > 0$, m — целое положительное число.

Тогда

$$\varphi(t_n) < e^{k(t_n - \tau)}[\varphi(0) + (t_n - \tau)k'], \tag{2,8}$$

где

$$k = k_1 + \frac{k_2}{m}, \quad k' = k_2 + k_3.$$

Доказательство. Полагая $\varphi(t_n) = \varphi_n$ и применяя неравенство

$$\varphi^{\frac{1}{m}} \leqslant 1 + \frac{\varphi}{m},$$

перепишем неравенство (2,8) в виде

$$\varphi_{n+1} \leqslant (1 + k\Delta_n)\varphi_n + k'\Delta_n.$$

Полагая

$$\varphi_n = \psi_n \prod_{i=0}^{n-1}(1 + k\Delta_i), \quad i = 1, \ldots, N, \quad \varphi_0 = \psi_0,$$

получим для ψ_n неравенство

$$\psi_{n+1} \leqslant \psi_n + \frac{k'}{\prod\limits_{i=0}^{n}(1+k\Delta_i)} \leqslant \psi_0 + k' \sum_{m=0}^{n} \frac{\Delta_m}{\prod\limits_{i=0}^{n}(1+k\Delta_i)} < \varphi_0 + k'(t_{n+1}-\tau).$$

Таким образом,

$$\varphi_n < \prod_{i=0}^{n-1}(1+k\Delta_i)\left[\varphi_0 + k'(t_n-\tau)\right],$$

откуда, принимая во внимание, что $e^{kx} > 1 + kx$, следует доказываемое.

Доказанная лемма позволяет установить ряд оценок, относящихся к функциям $x(t|\sigma)$, равномерных относительно произвольных разбиений σ.

Для упрощения записи в дальнейшем индекс σ при функции $x(t|\sigma)$ будем опускать, предполагая, что обозначение $x(t) = x_t(\tau, \xi)$ отнесено к некоторому фиксированному σ и начальному значению ξ.

Положим

$$x_i = x(t_i).$$

Упомянутые оценки изложим в виде следующих лемм:

Лемма 2,2

$$M\|x_{p+n} - x_n\|^2 = C(\|\xi\|^2)(t_{p+n} - t_n).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$m_2(n, p) = M\|x_{n+p} - x_n\|^2.$$

Тогда

$$m_2(n, p+1) = M\|x_{n+p+1} - x_{n+p}\|^2 + 2M(x_{n+p+1} - x_{p+n};\ x_{p+n} - x_n) + m_2(n, p).$$

Имеем

$$M(x_{n+p+1} - x_{n+p};\ x_{n+p} - x_n) = M(\delta_{n+p}\alpha(t_{n+p}, x_{n+p});\ x_{n+p} - x_n) =$$
$$= M(\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)];\ x_{n+p} - x_n) + M(\delta_{n+p}\alpha(t_{n+p}, x_n);\ x_{n+p} - x_n) =$$
$$= MM\{(\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)];\ x_{n+p} - x_n) / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+p-1}\} +$$
$$+ MM\{(\delta_{n+p}\alpha(t_{n+p}, x_n);\ x_{n+p} - x_n) / \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+p-1}\},$$

где $M\{f \mid \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}$ обозначает условное математическое ожидание при гипотезах

$$\delta_0\alpha(t_1, y) = \beta_0(y), \ldots, \delta_{i-1}\alpha(t_{i-1}, y) = \beta_{i-1}(y).$$

Принимая во внимание соотношения I. 1 и 3, получим

$$M(x_{n+p+1} - x_{n+p};\ x_{n+p} - x_n) \leqslant C\Delta_{n+p} M\|x_{n+p} - x_n\|^2 +$$
$$+ M\Delta_{n+p}\|x_{n+p} - x_n\|(C\|x_n\| + K(\beta_0, \ldots, \beta_{n+p-1})) \leqslant C\Delta_{n+p} m_2(n, p) +$$
$$+ \Delta_{n+p} C(1 + M\|x_n\|^2).$$

Аналогично получим

$$M\|x_{n+p+1}-x_{n+p}\|^2 \leqslant C\Delta_{n+p}[m_2(n, p)+1+M\|x_n\|^2].$$

Таким образом,

$$m_2(n, p+1)\leqslant(1+C\Delta_{n+p})\, m_2(n, p)+C(1+M\|x_n\|^2)\Delta_{n+p}. \tag{2,9}$$

Полагая здесь $n=0$, получим

$$m_2(0, p+1)\leqslant(1+C\Delta_p)\, m_2(0, p)+C(1+\|\xi\|^2)\Delta_p.$$

В силу леммы 2,1,

$$m_2(0, p)\leqslant Ct_p(1+\|\xi\|^2)$$

и, так как

$$M\|x_p-\xi\|^2 = m_2(0, p),$$

$$M\|x_p\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2).$$

Используя это соотношение, запишем неравенство (2,9) в виде

$$m_2(n, p+1)\leqslant(1+C\Delta_{n+p})\, m_2(n, p)+C(\|\xi\|^2)\Delta_{n+p}.$$

Опять применяя лемму 2,1, получим

$$m_2(n, p+1)\leqslant C(\|\xi\|^2) \quad (t_{n+p+1}-t_n).$$

Л е м м а 2,3. *Пусть* $x(t)$ *и* $y(t)$ *две функции, построенные для данного разбиения* σ *сегмента* $[\tau, T]$ *по уравнениям* (2,6) *для начальных значений* ξ *и* η *соответственно*

$$x(\tau) = \xi, \quad y(\tau) = \eta.$$

Тогда

$$M\|x_{n+p}-y_{n+p}\|^2 \leqslant e^{C(t_{n+p}-t_n)}\, M\|x_n-y_n\|^2, \tag{2,10}$$

в частности

$$M\|x_n-y_n\|^2 \leqslant e^{C(t_n-\tau)}\|\xi-\eta\|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $a_n=M\|x_n-y_n\|^2$, получим

$$\begin{aligned}a_{n+p+1}&=M\|x_{n+p}-y_{n+p}\|^2+M\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, y_{n+p})]\|^2 + \\ &+2M(x_{n+p}-y_{n+p};\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, y_{n+p})])=a_{n+p}+ \\ &+MM\{\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, y_{n+p})]\|^2 \mid \beta_0, \beta_1,\ldots,\beta_{n+p-1}\}+ \\ &+2M(x_{n+p}-y_{n+p};\ M\{\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, y_{n+p})] \mid \beta_0, \beta_1,\ldots, \beta_{n+p-1}\})\leqslant \\ &\leqslant(1+C\Delta_{n+p})\,a_{n+p}.\end{aligned}$$

Л е м м а 2,4. *Если*

$$v_1(\tau, y|t) = y + \alpha(t, y) - \alpha(\tau, y), \tag{2,11}$$

то

$$M\|x_{n+p}-v_1(t_n, x_n|t_{n+p})\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)\,(t_{n+p}-t_n)^2. \tag{2,12}$$

Доказательство. Полагая $v_1(t_n, x_n / t_{n+p}) = v_1(n, p)$, получим

$$b_2(n, p+1) = M\|x_{n+p+1} - v_1(n, p+1)\|^2 = b_2(n, p) + \\ + M\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)]\|^2 + \\ + 2M(x_{n+p} - v_1(n, p);\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)]).$$

Аналогично доказательству лемм 2,2 и 2,3 выводятся оценки

$$M\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)]\|^2 \leqslant C\Delta_{n+p} m_2(n, p),$$
$$|M(x_{n+p} - v_1(n, p);\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p}) - \alpha(t_{n+p}, x_n)])| \leqslant \\ \leqslant C\Delta_{n+p}(b_2(n, p) + m_2(n, p)).$$

Таким образом,

$$b_2(n, p+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+p})\, b_2(n, p) + C\Delta_{n+p} m_2(n, p)$$

или, в силу леммы 2,2,

$$b_2(n, p+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+p})\, b_2(n, p) + C(\|\xi\|^2)\, \Delta_{n+p}(t_{n+p} - t_n).$$

Применяя лемму 2,1, получим доказываемое.

Рассмотрим теперь два разбиения σ и σ' сегмента $[\tau, T]$, из которых второе есть подразбиение первого

$$\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\},$$
$$\sigma' = \{t_{0,0} = t_0,\ t_{0,1}, \ldots, t_{0,p_0} = t_1 = t_{1,0}, \ldots, t_{N-1,p_{N-1}} = t_N\}$$

и по уравнениям (2,6) построим соответствующие функции $x(t)$ и $y(t)$ при одном и том же начальном значении

$$x(\tau) = y(\tau) = \xi$$
$$x(t) = S^{\sigma}[\tau, \xi / t, \alpha(\theta, z)], \quad y(t) = S^{\sigma'}[\tau, \xi / t, \alpha(\theta, z)].$$

Построим также вспомогательную функцию $u(t)$, определив ее в каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1}]$ равенством

$$u(t) = S^{\sigma'}[t_k, x_k / t, \alpha(\theta, z)]$$

или, более подробно,

$$u(t) = u_{k,j} + \alpha(t, u_{k,j}) - \alpha(t_{k,j}, u_{k,j}) \qquad t_{k,j} < t \leqslant t_{k,j+1}$$
$$u(t_{k,0}) = u(t_k) = x(t_k).$$

Положим

$$d_{k,j} = M\|y(t_{k,j}) - x(t_{k,j})\|^2,$$
$$b_{k,j} = M\|u(t_{k,j}) - x(t_{k,j})\|^2,$$
$$a_{k,j} = M\|y(t_{k,j}) - u(t_{k,j})\|^2,$$

Тогда

$$d_{k,j+1}=a_{k,j+1}+b_{k,j+1}+2M(y_{k,j+1}-u_{k,j+1};\ u_{k,j+1}-x_{k,j+1}).$$

В силу леммы 2,3

$$a_{k,j+1}\leqslant e^{C(t_{k,j+1}-t_k)}M\|y(t_k)-x(t_k)\|^2=e^{C(t_{k,j+1}-t_k)}d_k. \tag{2,13}$$

Из леммы 2,4 следует

$$b_{k,j+1}\leqslant C(\|\xi\|^2)(t_{k,j+1}-t_k)^2. \tag{2,14}$$

Обозначив теперь

$$\lambda_{k,j+1}=|M(y_{k,j+1}-u_{k,j+1};\ u_{k,j+1}-x_{k,j+1})|,$$

аналогично предыдущему получим

$$\lambda_{k,j+1}\leqslant\lambda_{k,j}+C\Delta_{k,j}(a_{k,j}+b_{k,j}).$$

Используя соотношения (2,13) и (2,14), получим

$$\lambda_{k,j+1}\leqslant C(t_{k,j+1}-t_k)[e^{C(t_{k,j}-t_k)}d_k+C(\|\xi\|^2)(t_{k,j}-t_k)].$$

Таким образом,

$$d_{k,j+1}\leqslant e^{C(t_{k,j+1}-t_k)}[1+C(t_{k,j+1}-t_k)]\,d_k+C(\|\xi\|^2)(t_{k,j}-t_k)^2,$$

откуда

$$d_{k+1}\leqslant|\sigma|\,C(\|\xi\|^2)(t_{k+1}-\tau),$$

где

$$|\sigma|=\max_i(t_{i+1}-t_i).$$

Полученное неравенство составляет содержание следующей леммы:

Лемма 2,5. *Функции* $x(t)$ *и* $y(t)$, *построенные по уравнениям* (2,6) *для некоторых разбиений* σ' *и* σ'', *соответственны при одном и том же начальном значении* ξ,

$$x(\tau)=y(\tau)=\xi,$$

удовлетворяют неравенству

$$M\|x(t)-y(t)\|^2\leqslant\varepsilon C(\|\xi\|^2)(t-\tau),$$

где

$$\varepsilon=\max\{|\sigma'|,\ |\sigma''|\}.$$

Обозначим через H пространство P-измеримых функций $f[\alpha(\theta,y)]$, определенных почти всюду на Γ^c, принимающих значения из Φ и имеющих конечное математическое ожидание квадрата нормы

$$M\|f[\alpha(\theta,y)]\|^2<\infty.$$

В H введем скалярное произведение; если $f, g\in H$, то положим

$$(f,g)^*=M(f[\alpha],\ g[\alpha]).$$

Тем самым H превращается в гильбертовское пространство.

Если последовательность функций, принадлежащих H, сходится к некоторому пределу в смысле сходимости в H, то будем говорить, что эта последовательность сходится в среднем.

Определенные ранее функции $S^{\sigma}[\tau, \xi \,/\, t, \alpha(t, z)]$ при фиксированных τ, t, ξ, σ принадлежат H. Принимая во внимание полноту пространства H в силу леммы 2,5, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Функции $x(t/\sigma)$, определенные для каждого σ посредством равенств*

$$x(t/\sigma)=x(t_n/\sigma)+\alpha[t, x(t_n/\sigma)]-\alpha[t_n, x(t_n/\sigma)], \tag{2,6}$$

при

$$t_n < t \leqslant t_{n+1}$$

и

$$x(\tau/\sigma) = \xi,$$

при $|\sigma| \to 0$ *сходятся в среднем к некоторому пределу*

$$X(t) = S[\tau, \xi \,/\, t, \alpha(\theta, y)], \tag{2,15}$$

не зависящему от выбранной последовательности разбиений $\{\sigma\}$.

Если рассматривать множество разбиений $\{\sigma\}$ как частично упорядоченное множество, то короче можно сказать, что функции $x(t/\sigma)$ сходятся в среднем на частично упорядоченном множестве разбиений $\{\sigma\}$.

Дополнением к полученной теореме является следующая.

Лемма 2,6. *Предельная функция* (2,15) *является решением диференциального уравнения*

$$dX = \delta\alpha(t, X). \tag{2,5}$$

Доказательство.

1. Пользуясь обозначениями леммы 2,4, можем записать

$$M\|X(t+t_1)-v_1(t, X(t) \,/\, t+t_1)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M\|X(t+t_1)-x(t+t_1/\sigma)+x(t+t_1/\sigma)-v_1(t, x(t/\sigma) \,/\, t+t_1)+$$
$$+v_1(t, x(t/\sigma) \,/\, t+t_1)-v_1(t, X(t) \,/\, t+t_1)\|^2.$$

Выбирая $\{\sigma\}$ таким, чтобы

$$M\|X(t+t_1)-x(t+t_1/\sigma)\|^2 < \eta,$$
$$M\|X(t)-x(t/\sigma)\|^2 < \eta,$$

где η произвольное положительное число, пользуясь леммой 2,4 и условием I—4′, получим

$$M\|X(t+t_1)-v_1(t, X(t)/t+t_1)\|^2 < C[\eta+C(\|\xi\|^2)t_1^2].$$

Так как η сколь угодно малое положительное число, а левая часть последнего неравенства от η не зависит, то

$$M\|X(t+t_1)-v_1(t, X(t) \,/\, t+t_1)\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)t_1^2.$$

Таким образом, функция $X(t)$ действительно удовлетворяет неравенству (2,2) с функцией $\varphi(\tau)=\tau$.

2. Имеем

$$\|M\{X(t+t_1)-v_1(t, X(t)\,/\,t+t_1)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\| =$$

$$=\|M\{X(t+t_1)-x(t+t_1|\sigma)+x(t+t_1|\sigma)-v_1(t, X(t)\,|\,t+t_1)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|,$$

где

$$x(t+t_1|\sigma)=S^\sigma[t, X(t)\,/\,t+t_1, \alpha(\theta, y)].$$

Что касается величины

$$\|M\{X(t+t_1)-x(t+t_1/\sigma)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|,$$

то очевидно, что, исключая, быть может, множество I функций $\beta(\theta, y)$ вероятности нуль, она стремится к 0.

Далее, для $k+1$ точки t_{k+1} разбиения σ сегмента $[\tau, T]$, имеем:

$$\bar{a}_{k+1}=\|M\{x(t_{k+1}|\sigma)-v_1(t, X(t)|t_{k+1})\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\leqslant$$

$$\leqslant \bar{a}_k+\|M\{\delta_k[\alpha(t_k, x_k)-\alpha(t_k, X(t))]\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|.$$

В силу I—3′

$$\|M\{\delta_k[\alpha(t_k, x_k)-\alpha(t_k, X(t))]\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|\leqslant C\Delta_k M\{\|x_k-X(t)\|\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}.$$

Аналогично лемме 2,2 можно получить оценку

$$\|M\{x_k-X(t)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|\leqslant C(\|X(t)\|)\sqrt{t_k-t}.$$

Таким образом,

$$\bar{a}_{k+1}\leqslant \bar{a}_k+C(\|X(t)\|)\sqrt{t_k-t}\,\Delta t_k\leqslant C(\|X(t)\|)\sqrt{t_k-t}\,.$$

Следовательно, для каждой $\beta(\theta, y)\in\Gamma^{c}$, исключая, быть может, $\beta(\theta, y)\in I$, $P(I)=0$,

$$\|M\{X(t+t_1)-v_1(t, X(t)\,|\,t+t_1)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|<\eta+C(\|X(t)\|)\,t_1^{\frac{3}{2}}$$

и, заставляя $\eta\to 0$,

$$\|M\{X(t+t_1)-v_1(t, X(t)\,|\,t+t_1)\,/\,\beta(\theta, y)\Big|_t^t\}\|\leqslant C(\|X(t)\|)\,t_1^{\frac{3}{2}},$$

где математическое ожидание величины $\|X(t)\|^2$ имеет, по предыдущему, конечное значение.

Тем самым доказано, что построенная функция $X(t)$ удовлетворяет соотношению (2,3) и (2,4).

Теорема 3. *Диференциальное уравнение*

$$dX = \delta a(t, X), \tag{2,5}$$

где $a(t, X)$ *функции случайного процесса, удовлетворяющего условиям I, имеет единственное решение с конечным вторым моментом*

$$M\|X(t)\|^2 < \infty, \quad \tau < t \leqslant T,$$

принимающее заданное начальное значение

$$X(\tau) = \xi.$$

Доказательство. Существование функции, удовлетворяющей требованиям теоремы, обеспечено теоремой 2 и леммой 2,6.

Пусть $Y(t)$ произвольная функция из H, также удовлетворяющая условиям теоремы.

Для некоторого σ построим по уравнениям (2,6) соответствующую функцию $z(t)$, $z(\tau) = \xi$.

Тогда

$$M\|Y(t_{k+1}) - z(t_{k+1})\|^2 = M\| Y(t_k) - z(t_k) + \delta_k[a(t_k, Y(t_k)) - a(t_k, z(t_k))] + \\ + Y(t_{k+1}) - Y(t_k) - \delta_k a(t_k, Y(t_k))\|^2 \leqslant (1 + C\Delta_k) M\|Y(t_k) - z(t_k)\|^2 + \\ + C\Delta_k \varphi(\Delta_k)\Big[MK(\beta(\theta, y)\Big|_\tau^{t_k})\|Y(t_k) - z(t_k)\| + 1\Big] \leqslant \\ \leqslant (1 + C\Delta_k) M\|Y(t_k) - z(t_k)\|^2 + C\Delta_k \varphi(\Delta_k).$$

Отсюда,

$$M\|Y(t_{k+1}) - z(t_{k+1})\|^2 \leqslant \varphi(|\sigma|)(t_{k+1} - \tau).$$

Таким образом, последовательность $z(t/\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$ сходится в H к $Y(t)$ и, следовательно, в H

$$X(t) = Y(t),$$

что и доказывает теорему.

Доказанная теорема представляет собою решение поставленного ранее вопроса для случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$, удовлетворяющего условиям I (I—4). Система функций

$$X(t) = S[\tau, \xi / t, a(\theta, y)],$$

являющаяся решением неравенств (2,2) и (2,3), определяет в Φ некоторую систему, находящуюся под воздействием случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$ в смысле § 1.

Чтобы несколько конкретней охарактеризовать условия I (1—4), рассмотрим более частный пример случайного процесса.

Через $A(t, x)$, $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ обозначим некоторые фиксированные функции, значениями которых служат точки Φ, и через $f(t) = \{f^1(t), \ldots, f^m(t)\}$ m-мерный вектор, реализующий некоторый случайный процесс класса D.

Допустим, что случайные функции процесса $\{\Gamma^c, P\}$ с вероятностью, равной 1, имеют вид

$$\alpha(t, x) = \int A(t, x)\,dt + \sum_1^m B_k(x)\,[f^k(t) - f^k(0)]. \qquad (2,16)$$

В этом случае допустимые гипотезы относительно приращений

$$\alpha(t+\tau, x) - \alpha(t, x)$$

случайных функций $\alpha(t, x)$ приводятся к гипотезам относительно приращений функций $f(t)$.

Если предположить, что:

а) функции

$$A(t, x),\ B_k(x)$$

удовлетворяют условию Липшица по переменной x (при фиксированном t);

б) условные математические ожидания величин

$$f^k(t_{i+1}) - f^k(t_i),\quad \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|^2,\quad (k = 1, \ldots, m)$$

не превосходят

$$C(t_{i+1} - t_i),$$

где C — постоянная, не зависящая от гипотез о величинах

$$f(t_{s+1}) - f(t_s),\quad s = 1, 2, \ldots, i-1;\quad t_0 < t_1 < \ldots < t_i,$$

то условия I (1—4) будут выполнены.

В частности, условия, относящиеся к функциям $f(t)$, выполнены, если случайный процесс, реализуемый функциями $f(t)$, является W-процессом, удовлетворяющим условиям

$$M[f(t+\tau) - f(t)] = 0,$$
$$M\|f(t+\tau) - f(t)\|^2 = C\tau.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае процесс $\{\Gamma^c, P\}$ есть также W-процесс. Этот случай имеет особый интерес, так как приводит к процессам Маркова (§ 1, теорема 1).

Заметим теперь, что из предыдущих оценок можно получить теорему о непрерывной зависимости решений $X(t)$ диференциального уравнения (2,5) от случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$.

Прежде всего введем следующее определение. Система $X(t, \mu) = S[\tau, \xi | t, \alpha_\mu(x, \theta)]$, находящаяся под воздействием случайного процесса $\{\Gamma_\mu^c, P_\mu\}$, зависящего от параметра μ, $\mu \in \{\mu\}$, называется стохастически непрерывной при $\mu = a$ ($a \in \{\mu\}$), если для всякой непрерывной и ограниченной функции $f(x_1, \ldots, x_m)$, определенной на Φ^m, выполняется условие

$$\lim_{\mu \to a} Mf[X(t_1, \mu), X(t_2, \mu), \ldots, X(t_m, \mu)] = Mf[X(t_1, a), X(t_2, a), \ldots, X(t_m, a)].$$

Определение стохастической непрерывности эквивалентно сходимости в основном функций распределения вероятностей перехода $(\varphi(\tau, x/\Omega^a)$ (§ 1).

Ограничиваясь только что приведенным примером случайного процесса, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 4. *Допустим, что*

a') функции $A(t, x, \mu)$, $B_k(x, \mu)$ $(k=1, \ldots, m)$ *удовлетворяют условию а) равномерно относительно* μ *и непрерывны по* μ *при* $\mu=a$;

б') случайные процессы, реализуемые функциями $\{f^k_\mu(t)\}$, *удовлетворяют условию* б) *также равномерно по* μ *и стохастически непрерывны при* $\mu=a$.

Тогда система S_μ, *определяемая диференциальным уравнением*

$$dX = A(t, x, \mu)\, dt + \sum_{k=1}^{m} B_k(x, \mu)\, df^k_\mu(t)$$

стохастически непрерывна при $\mu=a$.

Доказательство этой теоремы использует оценки, полученные в леммах 2,2 и 2,5 и приводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы в работе [9].

В заключение параграфа приведем еще несколько оценок, которые будут использованы во второй части работы.

Прежде всего несколько распространим леммы 2,2—2,4.

Лемма 2,7. *Если случайный процесс* $\{\Gamma^c, P\}$ *удовлетворяет условиям*

$$\text{I}\quad \begin{array}{l} 5.\ M\{\|\delta_i\alpha(t_i, x)\|^{2k}/\beta_0,\ldots, \beta_{i-1}\} \leqslant C(\|x\|^{2k})\, K(\beta_0, \ldots, \beta_{i-1})\, \Delta_i, \\ 6.\ M\{\|\delta_i[\alpha(t_i, x)-\alpha(t_i, y)]\|^{2k}/\beta_0,\ldots, \beta_{i-1}\} \leqslant C\|x-y\|^{2k}\Delta_i, \end{array}$$

$$k=2,4,$$

то

$$M\|x_{n+p}-x_n\|^{2k} \leqslant C(\|\xi\|^{2k})\,(t_{n+p}-t_n), \tag{1}$$

$$M\|y_{n+p}-x_{n+p}\|^{2k} \leqslant e^{C(t_{n+p}-t_n)} M\|y_n-x_n\|^{2k}, \tag{2}$$

$$M\|x_{n+p}-v_1(t_n, x_n/t_{n+p})\|^{2k} \leqslant C(\|\xi\|^{2k})\,(t_{n+p}-t_n)^2. \tag{3}$$

Докажем эту лемму для $k=2$. При $k=4$ доказательство проводится аналогично.

Положим

$$m_4(n, i) = M\|x_{n+i}-x_n\|^4. \tag{1}$$

Тогда

$$m_4(n, i+1) = M[\|x_{n+i}-x_n\|^2 + 2(\Delta x_{n+i};\ x_{n+i}-x_n) + \|\Delta x_{n+i}\|^2]^2,$$

где

$$\Delta x_{n+i} = \alpha(t_{n+i+1}, x_{n+i}) - \alpha(t_{n+i}, x_{n+i}),$$

отсюда

$$m_4(n, i+1) \leqslant m_4(n, i) + CM[\|\Delta x_{n+i}\|^4 + \|x_{n+i} - x_n\|^2 \|\Delta x_{n+i}\|^2 + \\ + \|x_{n+i} - x_n\|^2 (\Delta x_{n+i};\ x_{n+i} - x_n)].$$

Далее,

$$M\|\Delta x_{n+i}\|^4 \leqslant C\Delta_{n+i}[M\|x_{n+i} - x_n\|^4 + M\|x_n - \xi\|^4 + C(\|\xi\|^4)]$$

и

$$M\|\Delta x_{n+i}\|^2 \|x_{n+i} - x_n\|^2 \leqslant C\Delta_{n+i}[M\|x_{n+i} - x_n\|^4 + M\|x_n - \xi\|^2 + C(\|\xi\|^4)]$$

$$|M\|x_{n+i} - x_n\|^2 (\Delta x_{n+i};\ x_{n+i} - x_n)| \leqslant C\Delta_{n+i}[M\|x_{n+i} - x_n\|^4 + \\ + M\|x_n - \xi\|^2 + C(\|\xi\|^4)].$$

Таким образом,

$$m_4(n, i+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+i})\, m_4(n, i) + C\Delta_{n+i} m_4(0, n) + C(\|\xi\|^4)\,\Delta_{n+i}. \quad (2{,}16)$$

Полагая здесь $n=0$, получим

$$m_4(0, i+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+i})\, m_4(0, i) + C(\|\xi\|^4)\,\Delta_i,$$

или

$$m_4(0, i) \leqslant C(\|\xi\|^4)\,(t_i - \tau).$$

Возвращаясь к неравенству (2,16), запишем его теперь в виде

$$m_4(n, i+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+i})\, m_4(n, i) + C(\|\xi\|^4)\,\Delta_{n+i},$$

что опять дает

$$m_4(n, i) \leqslant C(\|\xi\|^4)\,(t_{n+i} - t_n).$$

Полагая

$$a_4(i) = M\|y_i - x_i\|^4, \quad (2)$$

аналогично предыдущему, получим

$$a_4(n+p+1) \leqslant (1 + C\Delta_{n+p})\, a_4(n+p) + \\ + CM\|y_{n+p} - x_{n+p}\|^2 (y_{n+p} - x_{n+p};\ \delta_{n+p}[a(t_{n+p}, y_{n+p}) - \\ - a(t_{n+p}, x_{n+p})]) + CM\|y_{n+p} - x_{n+p}\|^2 \|\delta_{n+p}[a(t_{n+p}, x_{n+p}) - a(t_{n+p}, y_{n+p})]\|^2 \leqslant \\ \leqslant (1 + C\Delta_{n+p})\, a_4(n+p),$$

или

$$a_4(n+p+1) \leqslant e^{C(t_{n+p+1} - t_n)} a_4(n).$$

Положим

$$b_4(n, p) = M\|x_{n+p} - v_1(t_n, x_n | t_{n+p})\|^4, \quad (3)$$

получим

$$b_4(n, p+1) \leqslant b_4(n, p) + M[\|\delta_{n+p}[a(t_{n+p}, x_{n+p}) - a(t_{n+p}, x_n)]\|^4 + \\ + 4\|x_{n+p} - v_1(n, p)\|^2 \|\delta_{n+p}[a(t_{n+p}, x_{n+p}) - a(t_{n+p}, x_n)]\|^2 + 4\{\|x_{n+p} - v_1(n, p)\|^2 + \\ + \|\delta_{n+p}[a(t_{n+p}, x_{n+p}) - a(t_{n+p}, x_n)]\|^2\}(x_{n+p} - v_1(n, p);\ \delta_{n+p}[a(t_{n+p}, x_{n+p}) - \\ - a(t_{n+p}, x_n)])],$$

причем

$$\|x_{n+p}-v_1(n, p)\|^2 \leqslant C[\|x_{n+p}-x_n\|^2+\|\alpha(t_{n+p}, x_n)-\alpha(t_n, x_n)\|^2]$$

и, следовательно,

$$M\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]\|^4 \leqslant C\Delta_{n+p}m_4(n, p),$$

$$M\|x_{n+p}-v_1(n, p)\|^2\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\Delta_{n+p}[m_4(n, p)+(t_{n+p}-t_n)(m_4(0, n)+\|\xi\|^4)].$$

Далее,

$$(x_{n+p}-v_1(n, p);\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]) \leqslant$$
$$\leqslant (x_{n+p}-x_n;\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)])+$$
$$+(\alpha(t_n, x_n)-\alpha(t_{n+p}, x_n);\ \delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]).$$

Таким образом,

$$4M[\|x_{n+p}-v_1(n, p)\|^2+\|\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]\|^2](x_{n+p}-v_1(n, p);$$
$$\delta_{n+p}[\alpha(t_{n+p}, x_{n+p})-\alpha(t_{n+p}, x_n)]) \leqslant C\Delta_{n+p}[m_4(n, p)+(t_{n+p}-t_n)(m_4(0, n)+\|\xi\|^4)]$$

и

$$b_4(n, p+1) \leqslant b_4(n, p)+C\Delta_{n+p}[m_4(n, p)+(t_{n+p}-t_n)(m_4(0, n)+\|\xi\|^4)] \leqslant$$
$$\leqslant b_4(n, p)+C(\|\xi\|^4)\Delta_{n+p}(t_{n+p+1}-t_n),$$

что и дает доказываемое.

Аналогично лемме 2,5 теперь можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 2,8. *Если условия* I (5—6) *выполняются и*

$$\max\{\sigma, \sigma'\} < \varepsilon,$$

то

$$M\|y(t)-x(t)\|^{2k} \leqslant C(\|\xi\|^{2k})(t-\tau)\varepsilon \qquad (k=1, 4),$$

где $y(t)$ *и* $x(t)$ *две функции, построенные по уравнениям* (2,6) *для разбиений* σ *и* σ' *соответственно, и для одного и того же начального значения*

$$x(\tau)=y(\tau)=\xi.$$

Доказательство приведем для $k=2$. Для $k=4$ доказательство аналогично.

Пользуясь обозначениями леммы 2,5 и вводя

$$A_{k,j}^2=\|y(t_{k,j})-u(t_{k,j})\|^2,$$
$$B_{k,j}^2=\|u(t_{k,j})-x(t_{k,j})\|^2,$$
$$D_{k,j}^2=\|y(t_{k,j})-x(t_{k,j})\|^2,$$

получим

$$D_{k,j+1}^4 \leqslant A_{k,j+1}^4+3B_{k,j+1}^4+8A_{k,j+1}^2B_{k,j+1}^2+$$
$$+4A_{k,j+1}^2(y_{k,j+1}-u_{k,j+1};\ u_{k,j+1}-x_{k,j+1}). \qquad (2,17)$$

В силу леммы 2,7 (2) и (3)

$$MA^4_{k,j+1} \leqslant e^{C(t_{k,j+1}-t_k)} MD^4_k, \tag{2,18}$$

$$MB^4_{k,j+1} \leqslant C(\|\xi\|^4)(t_{k,j+1}-t_k)^2. \tag{2,19}$$

Из соотношений

$$y_{k,j+1} - u_{k,j+1} = y_{k,j} - u_{k,j} + \delta_{k,j}[a(t_{k,j}\, y_{k,j}) - a(t_{k,j},\ u_{k,j})],$$

$$u_{k,j+1} - x_{k,j+1} = u_{k,j} - x_{k,j} + \delta_{k,j}[a(t_{k,j},\ u_{k,j}) - a(t_{k,j},\ x_{k,j})],$$

получим

$$MA^2_{k,j+1} B^2_{k,j+1} \leqslant MA^2_{k,j} B^2_{k,j} + C\Delta_{k,j} M[A^4_{k,j} + B^4_{k,j} + \|u_{k,j} - x_k\|^4].$$

Пользуясь неравенством (1) леммы 2,7

$$M\|u_{k,j} - x_k\|^4 \leqslant C(\|\xi\|^4)(t_{k,j} - t_k),$$

сможем записать

$$MA^2_{k,j+1} B^2_{k,j+1} \leqslant (t_{k,j+1} - t_{k,j})[e^{C(t_{k,j+1}-t_k)} MD^4_k + C(\|\xi\|^4)(t_{k,j+1} - t_{k,j})]. \tag{2,20}$$

Далее, пусть

$$\mu_{k,j+1} = (y_{k,j+1} - u_{k,j+1};\ u_{k,j+1} - x_{k,j+1}),$$

тогда

$$\begin{aligned} |MA^2_{k,j+1}\mu_{k,j+1}| &\leqslant (1 + C\Delta_{k,j})|MA^2_{k,j}\mu_{k,j}| + \\ &+ C\Delta_{k,j} M[A^4_{k,j} + B^4_{k,j} + \|u_{k,j} - x_k\|^4] \leqslant \\ &\leqslant C(t_{k,j+1} - t_k)[e^{C(t_{k,j+1}-t_k)} MD^4_k + C(\|\xi\|^4)(t_{k,j+1} - t_k)]. \end{aligned} \tag{2,21}$$

Пользуясь неравенствами (2,18)—(2,21) из неравенства (2,17), получим

$$MD^4_{k+1} \leqslant e^{C(t_{k,j+1}-t_k)} MD^4_k + C(\|\xi\|^4)(t_{k+1} - t_k)^2.$$

Таким образом,

$$MD^4_k \leqslant C(\|\xi\|^4)(t_k - \tau)|\sigma|.$$

Л е м м а 2,9. *Функции* $X(t)$, $Y(t)$ $(X(0) = \xi,\ Y(0) = \eta)$ *(теорема 2) удовлетворяют неравенствам*

$$M\|X(t+\tau) - X(t)\|^{2k} \leqslant C(\|\xi\|^{2k})\,\tau, \tag{1}$$

$$M\|X(t+\tau) - Y(t+\tau)\|^{2k} \leqslant e^{C\tau} M\|X(t) - Y(t)\|^{2k}, \tag{2}$$

$$M\|X(t+\tau) - v_1(t, X(t)/t+\tau)\|^{2k} \leqslant C(\|\xi\|^{2k})\,\varepsilon^2. \tag{3}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2,6 и основывается на оценках лемм 2,7 и 2,8.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Принципы теории стохастических диференциальных уравнений, Труды Ин-та им. Стеклова, т. 5 (1934).

2. С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, добавление 6 (1946).

3. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов, Про рівняння Фоккера-Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана, Зап. кафедри мат. фізики АН УРСР, т. 4.

4. P. Levy, Processus stochastiques et mouvement Brownien, (1948).

5. И. И. Гихман, Об одной схеме образования случайных процессов, ДАН, 58 (1947).

6. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.

7. А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, 5 (1938).

8. J. Doob, Stochastic processes depending upon a continuous parameter, Trans. Am. Math. Soc., 42 (1937).

9. И. И. Гихман, О некоторых диференциальных уравнениях со случайными функциями, Укр. мат. журнал, т. II, вып. 3 (1950).