О полных прямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга

А. П. Мишина

Пусть группа G есть полная прямая сумма абелевых групп без кручения первого ранга R_α,

$$G = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{\sim} R_\alpha\ ^{1)}.$$

Говорят, что абелева группа вполне разложима, если она может быть разложена в обычную прямую сумму групп первого ранга. В настоящей работе указываются условия, при которых группа G будет вполне разложимой.

Предположим, что все группы R_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$ изоморфны одной и той же группе R. В этом случае, как показал Бэр[2]), группа G тогда и только тогда вполне разложима, когда или множество $\mathfrak{M}$ конечно, или R — полная группа.

Пусть теперь среди групп R_α могут быть и различные группы. А. Г. Курош поставил вопрос, при каких условиях группа G будет вполне разложимой в этом более общем случае. Оказывается, что имеет место следующее.

Теорема. *Группа* $G = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{\sim} R_\alpha$, *где все* R_α — *абелевы группы первого ранга, тогда и только тогда вполне разложима, когда лишь конечное число групп* R_α *отлично от аддитивной группы всех рациональных чисел.*

Чтобы доказать эту теорему, как легко видеть, достаточно доказать следующее утверждение.

Пусть $G = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{\sim} R_\alpha$, где множество $\mathfrak{M}$ бесконечно и среди R_α нет групп, изоморфных аддитивной группе всех рациональных чисел. Тогда группа G не вполне разложима.

---

[1]) Определение полной прямой суммы см. в работе Граева [1].

[2]) См. [3], теорема 12,4.

Доказательство этого утверждения проведем в несколько шагов. Группы R_α будем называть **компонентами** группы G в полном прямом разложении $G=\tilde{\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}}} R_\alpha$. Элемент g группы G, записанный в виде бесконечной последовательности $g=(\ldots, g_\alpha, \ldots)$, $g_\alpha\in R_\alpha$, будем называть **вектором**, а элементы g_α — его **координатами**. Далее, тип группы без кручения первого ранга R будем обозначать через $|R|$, тип элемента $g\in G$ — через $|g|$, характеристику элемента $g\in G$ (то есть последовательность его высот по всем простым числам) — через $\|g\|$[1]).

1. Предположим, что в группе $G=\tilde{\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}}} R_\alpha$ существует вектор g, обладающий тем свойством, что тип каждой его координаты g_α больше или равен $|R|$, где $|R|$ — некоторый фиксированный тип, а тип самого вектора g меньше $|R|$ или не сравним с $|R|$[2]). В таком случае группа G не вполне разложима.

Действительно, пусть $\|r\|$ есть некоторая характеристика типа $|R|$. Тогда легко видеть, что у характеристики нашего вектора $\|g\|$ существует бесконечное число мест, на которых стоят конечные числа, меньшие соответствующих (тоже конечных) чисел у характеристики $\|r\|$. Отметим эти места. Предположим теперь, что группа G вполне разложима,

$$G=\dot{\sum_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta,$$

и запишем вектор g через его компоненты в прямых слагаемых $\hat{R}_\beta$:

$$g=\hat{r}_{\beta_1}+\ldots+\hat{r}_{\beta_n},\quad \hat{r}_{\beta_i}\in\hat{R}_{\beta_i}.$$

Так как число слагаемых $\hat{r}_{\beta_i}$ конечно, то хотя бы у одной характеристики $\|\hat{r}_{\beta_i}\|$, например у $\|\hat{r}_{\beta_1}\|$, на бесконечном числе отмеченных нами мест стоят числа, меньшие соответствующих чисел у характеристики $\|r\|$. Пусть это будут места $p_1,\ldots,p_n,\ldots$ Так как для каждой координаты g_α вектора g мы имеем $|g_\alpha|\geqslant|R|$, то у характеристики $\|g_\alpha\|$ числа, меньшие соответствующих чисел у $\|r\|$, могут стоять лишь на конечном числе наших мест $p_1,\ldots,p_n,\ldots$ Пусть для g_α это будет на местах $p_{\alpha_1},\ldots,p_{\alpha_k}$, причем на месте p_{α_i}, $i=1,\ldots,k$, у $\|g_\alpha\|$ стоит число, на u_{α_i} меньшее соответствующего числа у $\|r\|$. Положим

$$l_\alpha=p_{\alpha_1}^{u_{\alpha_1}}p_{\alpha_3}^{u_{\alpha_3}}\ldots p_{\alpha_{k-1}}^{u_{\alpha_{k-1}}},\quad m_\alpha=p_{\alpha_2}^{u_{\alpha_2}}p_{\alpha_4}^{u_{\alpha_4}}\ldots p_{\alpha_k}^{u_{\alpha_k}},\quad \text{если } k \text{ четное},$$

и

$$l_\alpha=p_{\alpha_1}^{u_{\alpha_1}}p_{\alpha_3}^{u_{\alpha_3}}\ldots p_{\alpha_k}^{u_{\alpha_k}},\quad m_\alpha=p_{\alpha_2}^{u_{\alpha_2}}p_{\alpha_4}^{u_{\alpha_4}}\ldots p_{\alpha_{k-1}}^{u_{\alpha_{k-1}}},\quad \text{если } k \text{ нечетное},$$

1) Тип элемента или группы первого ранга есть класс эквивалентных последовательностей в смысле § 38 книги [2].

2) О сравнении типов см. [3].

и представим g_α в виде

$$g_\alpha = s_\alpha l_\alpha g_\alpha + t_\alpha m_\alpha g_\alpha,$$

где $s_\alpha l_\alpha + t_\alpha m_\alpha = 1$.

Так мы поступим с каждой координатой g_α. Тогда весь вектор g запишется в виде

$$g = x + y,$$

где $x = (\ldots, s_\alpha l_\alpha g_\alpha, \ldots)$, $y = (\ldots, t_\alpha m_\alpha g_\alpha, \ldots)$.

Легко видеть, что у характеристики вектора x на всех местах $p_1, p_3, \ldots, p_{2n+1}, \ldots$, а у характеристики вектора y на всех местах $p_2, p_4, \ldots, p_{2n}, \ldots$ стоят числа, не меньшие соответствующих чисел у характеристики $\|r\|$. Но отсюда следует, что компоненты обоих этих векторов в прямом слагаемом $\hat{R}_{\beta_1}$ равны нулю. Однако это противоречит тому, что $g = x + y$ и компонента g в $\hat{R}_{\beta_1}$ отлична от нуля.

2. Предположим теперь, что в полном прямом разложении $G = \tilde{\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}} R_\alpha$ множество типов компонент $|R_\alpha|$ содержит бесконечную убывающую последовательность типов

$$|R^{(1)}| > |R^{(2)}| > \ldots > |R^{(n)}| > \ldots$$

Тогда группа G не вполне разложима.

Действительно, выделим из разложения $G = \tilde{\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}} R_\alpha$ по одной компоненте каждого типа $|R^{(n)}|$. Пусть это будут компоненты $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \ldots, R_{\alpha_n}, \ldots$, где $|R_{\alpha_n}| = |R^{(n)}|$. Фиксируем в каждом R_{α_n} некоторый элемент $g_{\alpha_n} \neq 0$ и рассмотрим вектор g, координаты которого в R_{α_n}, $n = 1, 2, \ldots$, равны g_{α_n}, а в остальных компонентах R_α равны нулю. Покажем, что вектор g обладает свойством, указанным в пункте 1.

Очевидно, что у каждой характеристики $\|g_{\alpha_n}\|$ на каждом месте стоит число, большее или равное соответствующему числу характеристики $\|g\|$. При этом легко видеть, что на бесконечном числе мест у $\|g_{\alpha_n}\|$ стоят числа, большие соответствующих чисел у $\|g\|$ (мы здесь считаем ∞ числом, большим любого конечного числа). Пусть это — места $p_1^{(n)}, \ldots, p_i^{(n)}, \ldots$ Так как $|R_{\alpha_{n-1}}| > |R_{\alpha_n}|$, то почти все числа $p_k^{(n)}$ входят в множество $p_1^{(n-1)}, \ldots, p_i^{(n-1)}, \ldots$. Пусть теперь $q_1^{(1)}, \ldots, q_i^{(1)}, \ldots$ — это все числа $p_1^{(1)}, \ldots, p_i^{(1)}, \ldots$ (и только они), а при $n = 2, 3, \ldots$, $q_1^{(n)}, \ldots, q_i^{(n)}, \ldots$ — это все числа множества $\{p_1^{(n)}, \ldots, p_i^{(n)}, \ldots\} \cap \{q_1^{(n-1)}, \ldots, q_i^{(n-1)}, \ldots\}$. Ясно, что каждое множество $q_1^{(n)}, \ldots, q_i^{(n)}, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, содержит почти все числа множества $p_1^{(n)}, \ldots, p_i^{(n)}, \ldots$, то есть является бесконечным, и что множества $q_1^{(n)}, \ldots, q_i^{(n)}, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, вложены друг в друга. Фиксируем теперь какие-нибудь два места r_1 и r_1' $(r_1 \neq r_1')$ из числа мест $q_1^{(1)}, \ldots, q_i^{(1)}, \ldots$, какие-нибудь два места r_2 и r_2' $(r_2 \neq r_2')$, отличные от мест r_1, r_1', из числа мест $q_1^{(2)}, \ldots, q_i^{(2)}, \ldots$ и т. д. Очевидно, что на местах $r_1, \ldots, r_n, \ldots$, у характеристики $\|g\|$ стоят конечные числа. Построим теперь характеристику $\|r\|$, у которой на местах $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ стоят числа, на 1 большие, чем у $\|g\|$, а на всех остальных местах стоит то же, что и у $\|g\|$. Тогда ясно, что тип $|R|$ характеристики $\|r\|$ больше $|g|$. С другой стороны, непосредственно проверяется, что тип каждой координаты g_{α_n} больше или равен $|R|$. Покажем, что $|g_{\alpha_n}| > |R|$, $n=1, 2,\ldots$ Для этого рассмотрим места $r'_n, r'_{n+1},\ldots$ Очевидно, что все они принадлежат множеству $q_1^{(n)},\ldots, q_i^{(n)},\ldots$ Следовательно, у характеристики $\|g_{\alpha_n}\|$ на этих местах стоят числа, большие соответствующих чисел у характеристики $\|g\|$. Но, по построению, у характеристики $\|r\|$ на местах $r'_n, r'_{n+1}, \ldots$ стоит то же, что и у $\|g\|$. Отсюда и из $|g_{\alpha_n}| \geqslant |R|$ следует, что $|g_{\alpha_n}| > |R|$. Этим, в силу пункта 1, утверждение пункта 2 доказано.

3. Предположим, что в разложении $G = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}} R_\alpha$ бесконечное число компонент R_α изоморфно одной и той же группе R, то есть что бесконечное число групп R_α имеет один и тот же тип $|R|$. Докажем нашу теорему для этого случая, то есть докажем, что группа G не вполне разложима.

Разобьем все компоненты R_α на три категории. К первой категории отнесем все те компоненты, тип которых меньше $|R|$ или не сравним с $|R|$, ко второй — те, тип которых равен $|R|$, и к третьей — те, тип которых больше $|R|$. Подгруппы группы G, являющиеся полными прямыми суммами компонент 1-й, 2-й или 3-й категории, обозначим соответственно через G_1, G_2, G_3. Ясно, что группа $G = G_1 \dotplus G_2 \dotplus G_3$.

Предположим теперь, что группа G вполне разложима, и рассмотрим фактор-группу $G^*(|R|) = (G, |R| \leqslant |x|) / (G, |R| < |x|)$ [1]. Так как группа G вполне разложима, то, согласно теореме 10,1 из работы Бэра [3], группа $G^*(|R|)$ есть прямая сумма групп первого ранга, причем все эти группы имеют тип $|R|$. С другой стороны, легко видеть, что у нас

$$(G, |R| \leqslant |x|) = (G_2, |R| \leqslant |x|) \dotplus (G_3, |R| \leqslant |x|)$$

и

$$(G, |R| < |x|) = (G_3, |R| < |x|).$$

Отсюда ясно, что фактор-группа $G^*(|R|) = (G, |R| \leqslant |x|) / (G, |R| < |x|)$ обладает прямым слагаемым, изоморфным группе $(G_2 |R| \leqslant |x|)$. Но группа $(G_2, |R| \leqslant |x|)$ не вполне разложима [2], а всякое прямое слагаемое группы, разложимой в прямую сумму групп первого ранга одного и того же типа, само вполне разложимо [3]. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

4. В силу пунктов 1, 2, 3, в дальнейшем мы можем предполагать, что а) для каждого типа $|R|$ в разложении $G = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}} R_\alpha$ имеется не более

---

[1]) Обозначения см. в [3].

[2]) См. [3], следствие 12,5.

[3]) См. [3], следствие 8,9.

конечного числа компонент R_α типа $|R|$, b) всякая убывающая последовательность типов компонент $|R_\alpha|$ обрывается через конечное число шагов и с) если тип каждой координаты вектора больше или равен некоторому типу $|R|$, то и тип вектора больше или равен $|R|$.

Теперь для завершения доказательства нам остается рассмотреть следующие два случая.

5. Предположим, что среди типов компонент R_α разложения $G=\tilde{\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}}} R_\alpha$ можно найти бесконечное множество попарно не сравнимых между собой типов. Возьмем счетное число таких типов компонент — $|R_{\alpha_1}|,\ldots,|R_{\alpha_n}|,\ldots$ и обозначим через A подгруппу группы G, являющуюся полной прямой суммой всех тех компонент R_α, тип которых $|R_\alpha|\geqslant|R_{\alpha_k}|$, хотя бы при одном k, $k=1, 2,\ldots$ В группе A рассмотрим подгруппу, являющуюся полной прямой суммой всех тех компонент R_α группы G, тип которых $\geqslant|R_{\alpha_1}|$. Обозначим эту подгруппу через A_1. Затем рассмотрим подгруппу A_2, являющуюся полной прямой суммой всех тех компонент, тип которых $\geqslant|R_{\alpha_2}|$, но $\not\geqslant|R_{\alpha_1}|$. Рассмотрим, далее, подгруппу A_3, являющуюся полной прямой суммой всех компонент, тип которых $\geqslant|R_{\alpha_3}|$, но $\not\geqslant|R_{\alpha_1}|$ и $\not\geqslant|R_{\alpha_2}|$ и т. д. Легко видеть, что группа A есть полная прямая сумма подгрупп $A_1,\ldots, A_n\ldots$

Допустим теперь, что группа G вполне разложима,

$$G=\dot{\sum_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta,$$

и обозначим через B ее подгруппу, порожденную всеми прямыми слагаемыми $\hat{R}_\beta$, тип которых $|\hat{R}_\beta|\geqslant|R_{\alpha_k}|$ при некотором k, $k=1, 2,\ldots$ Нетрудно показать, что $A\supseteq B$, $A=B\dot{+}C$ и $B\supseteq A_n$, $n=1, 2,\ldots$ (последнее следует из предположения с) пункта 4). Покажем, что группа B есть обычная прямая сумма подгрупп $A_1,\ldots, A_n,\ldots$

Обозначим через A'_i, $i=1, 2,\ldots$, подгруппу, являющуюся полной прямой суммой всех компонент группы G, тип которых больше или равен $|R_{\alpha_i}|$. Очевидно, $A'_1=A_1$, $A'_2=A_1\cap A'_2\dot{+}A_2$ и т. д. Возьмем теперь произвольный элемент $b\in B$. Он записывается в виде

$$b=\hat{r}_{\beta_1}+\ldots+\hat{r}_{\beta_m},\quad\text{где }\hat{r}_{\beta_l}\in\hat{R}_{\beta_l},\quad l=1, 2,\ldots, m.$$

Возьмем элемент r_{β_l}. В силу определения группы B, при некотором k $|\hat{r}_{\beta_l}|\geqslant|R_{\alpha_k}|$. Отсюда получается, что

$$\hat{r}_{\beta_l}\in A'_k=A_1\cap A'_k\dot{+}A_2\cap A'_k\dot{+}\ldots\dot{+}A_k,$$

то есть

$$\hat{r}_{\beta_l}\in\dot{\sum}A_n,\quad l=1, 2,\ldots, m,$$

откуда

$$b\in\dot{\sum}A_n.$$

Этим доказано, что $B=\dot{\Sigma}A_n$, то есть $\dot{\Sigma}A_n$ служит прямым слагаемым для $\tilde{\Sigma}A_n$. Но это противоречит теореме Граева [1]), так как все A_n — не полные группы без кручения.

6. Пусть теперь среди типов компонент R_α разложения $G=\tilde{\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}}} R_\alpha$ нельзя найти бесконечного числа попарно не сравнимых между собой типов. Предположим, что группа G вполне разложима, то есть $G=\dot{\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta$, и найдем для каждого α фактор-группу $(G, |R_\alpha|\leqslant|x|)/(G, |R_\alpha|<|x|)$ из полного и из обычного прямого разложения группы G.

Пусть $\alpha=\alpha_0$. Найдем $(G, |R_{\alpha_0}|\leqslant|x|)$. В силу наших предположений (см. пункт 4, c)), $(G, |R_{\alpha_0}|\leqslant|x|)$ состоит из всех тех и только тех векторов, все координаты которых имеют тип $\geqslant|R_{\alpha_0}|$, то есть $(G, |R_{\alpha_0}|\leqslant|x|)$ есть полная прямая сумма всех тех компонент R_α группы G, которые имеют тип $\geqslant|R_{\alpha_0}|$. Найдем $(G, |R_{\alpha_0}|<|x|)$. Возьмем вектор, все координаты которого имеют тип $>|R_{\alpha_0}|$. Обозначим его через g. Из наших предположений следует, что каждый вектор может иметь лишь конечное число координат минимальных типов. Отсюда легко получается, что вектор g можно представить в виде суммы конечного числа векторов, тип каждого из которых больше $|R_{\alpha_0}|$. Именно, пусть минимальные типы координат вектора g — $|R_{\alpha_1}|, \ldots, |R_{\alpha_n}|$. Возьмем тогда в качестве первого слагаемого вектор, составленный из всех координат нашего вектора, тип которых $\geqslant|R_{\alpha_1}|$, в качестве второго слагаемого — вектор, составленный из всех координат нашего вектора, тип которых $\geqslant|R_{\alpha_2}|$, но $\not\geqslant|R_{\alpha_1}|$, и т.д. Из пункта 4 следует, что все слагаемые векторы имеют тип $>|R_{\alpha_0}|$. Получается, что наш вектор g принадлежит $(G, |R_{\alpha_0}|<|x|)$. Теперь ясно, что $(G, |R_{\alpha_0}|<|x|)$ является полной прямой суммой всех тех компонент группы G, тип которых больше $|R_{\alpha_0}|$.

Следовательно, фактор-группа $(G, |R_{\alpha_0}|\leqslant|x|)/(G, |R_{\alpha_0}|<|x|)$ изоморфна подгруппе группы G, являющейся полной прямой суммой всех тех компонент, тип которых равен $|R_{\alpha_0}|$. Но, по условию, таких компонент лишь конечное число. Следовательно, наша фактор-группа есть прямая сумма конечного числа групп, изоморфных группе R_{α_0}.

С другой стороны, из разложения $G=\dot{\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta$ получаем, что наша фактор-группа изоморфна прямой сумме всех тех групп $\hat{R}_\beta$, которые имеют тип $|R_{\alpha_0}|$. Отсюда следует, что в прямом разложении $G=\dot{\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta$ имеется ровно столько прямых слагаемых, изоморфных взятой нами группе R_{α_0}, сколько таких компонент имеется в полном прямом разложении группы G. Это мы получаем для каждого α, $\alpha\in\mathfrak{M}$.

Покажем теперь, что никаких других прямых слагаемых в разложении группы $G=\dot{\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{N}}}\hat{R}_\beta$ нет. Действительно, пусть прямое слагаемое $\hat{R}_\beta$

---

[1]) См. [1].

не изоморфно ни одной компоненте R_α. Возьмем элемент $\hat{r}_\beta \in \hat{R}_\beta$. Это некоторый вектор из группы G. Если бы он имел единственную координату минимального типа, то согласно пункту 4 его тип равнялся бы типу этой минимальной координаты, то есть равнялся бы некоторому $|R_\alpha|$, что противоречит условию. Следовательно, $\hat{r}_\beta$ имеет несколько (конечное число) координат минимальных типов. Но тогда $\hat{r}_\beta$ есть сумма конечного числа векторов, тип каждого из которых больше $|\hat{r}_\beta|$. Но $\hat{r}_\beta \in \hat{R}_\beta$, а слагаемые векторы не могут иметь отличных от нуля компонент в $\hat{R}_\beta$. Получается противоречие, и утверждение доказано.

Таким образом, получается, что в разложении $G = \dot{\sum\limits_{\beta \in \mathfrak{N}}} \hat{R}_\beta$ имеется „столько же" прямых слагаемых, сколько компонент в разложении $G = \dot{\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}} R_\alpha$. Соображения относительно мощности показывают, что это невозможно. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Граев, К теории полных прямых произведений групп, Мат. сб., 17 (59), (1945), 85—104.

2. А. Г. Курош, Теория групп, ГТТИ, М.—Л., (1944).

3. R. Baer, Abelian Groups without Elements of Finite Order, Duke Math. J., v. 3 (1937), 68—122.

Поступило 15. IX 1950 г.