О диференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве

Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн

В настоящей работе изучаются линейные диференциальные уравнения, в которых искомой является вектор-функция вещественного параметра t (времени) со значениями в гильбертовом пространстве [1]). При этом особое внимание уделяется асимптотическим представлениям решений некоторого класса уравнений, которые в работах Н. Н. Боголюбова и его учеников называются уравнениями с медленно меняющимися [2]) коэфициентами.

Сама идея нашей работы возникла в связи со статьями С. Ф. Фещенко [6, 7].

В рассматриваемых диференциальных уравнениях роль коэфициентов играют векторные или операторные функции времени. Под непрерывностью и диференцируемостью таких функций мы всюду понимаем непрерывность и диференцируемость в смысле нормы.

Для получения излагаемых ниже результатов нам приходится пользоваться некоторыми диференциальными свойствами операторных и векторных функций, связанных с эрмитовым оператором, диференцируемым по параметру. При этом мы опираемся на результаты наших заметок [3, 4].

§ 1. Операторы $E_+(H(t), t)$ и $E_-(H(t), t)$

В настоящем параграфе мы изложим некоторые, в основном известные, свойства операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, зависящих от параметра τ, и свойства решений операторных уравнений вида

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = H(t)\,\Phi(t). \tag{1,1}$$

1°. Пусть ограниченный оператор $D(\tau)$, действующий в $\mathfrak{H}$, непрерывен по τ в точке τ_0 и имеет в этой точке ограниченный обратный опе-

---

1) Об основных понятиях теории гильбертовых пространств (см. [1, 2]).

2) Величина f, зависящая от времени t, называется медленно меняющейся, если она представима в виде $f = f(\tau, \varepsilon)$, $(\tau = \varepsilon t)$, где функция $f(\tau, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к постоянной равномерно на каждом конечном интервале изменения t.

ратор $D^{-1}(\tau_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки τ_0 существует ограниченный оператор $D^{-1}(\tau)$, непрерывный по τ в точке τ_0.

Действительно, нетрудно проверить, что оператор $D^{-1}(\tau)$ равен

$$D^{-1}(\tau)=\{I-[D^{-1}(\tau_0)\varDelta D]+[D^{-1}(\tau_0)\varDelta D]^2-\ldots\}D^{-1}(\tau_0), \tag{1,2}$$

где $\varDelta D=D(\tau)-D(\tau_0)$.

Ряд в фигурных скобках сходится по норме при условии

$$\|D^{-1}(\tau_0)\varDelta D\|<1,$$

которое выполняется при τ достаточно близких к τ_0, в силу ограниченности $D^{-1}(\tau_0)$ и непрерывности $D(\tau)$ в точке τ_0.

З а м е ч а н и е. Доказанное утверждение мы будем применять как в том случае, когда оператор D зависит от вещественного параметра, так и в случае, когда он зависит от параметра, пробегающего плоское множество.

Из формулы (1,2) следует далее, что если оператор $D(\tau)$ имеет в точке τ_0 ограниченную производную $\frac{dD(\tau_0)}{d\tau}$, то

$$\frac{dD^{-1}(\tau_0)}{d\tau}=-D^{-1}(\tau_0)\frac{dD(\tau_0)}{d\tau}D^{-1}(\tau_0), \tag{1,3}$$

то есть и оператор $D^{-1}(\tau)$ имеет в точке τ_0 ограниченную производную по τ. Более того, применяя последовательно несколько раз формулу (1,3), мы можем заключить, что оператор $D^{-1}(\tau)$ имеет непрерывные по τ производные тех же порядков, что и оператор $D(\tau)$.

Если некоторая операторная или векторная функция имеет на некотором множестве непрерывную по τ производную порядка k, то мы будем говорить, что она принадлежит классу $C^{(k)}$. Таким образом, $D^{-1}(\tau)$ принадлежит классам $C^{(k)}$ для тех же k, что и $D(\tau)$.

2°. Перейдем теперь к уравнению

$$\frac{d\Phi}{dt}=H\Phi, \tag{1,1}$$

где $H(t)$ и $\Phi(t)$ операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем заданный оператор $H(t)$ непрерывен по t $(0\leqslant t<\infty)$.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\Phi(0)=I,$$

где I — единичный оператор, мы будем обозначать через

$$E_+(H(t),t).$$

Легко видеть, что оператор $E_+(H(t),t)$ представим в виде ряда:

$$E_+(H(t),t)=I+\int\limits_0^t H(t_1)\,dt_1+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1} H(t_1)H(t_2)\,dt_2\,dt_1+\ldots \tag{1,4}$$

Ряд (1,4) сходится равномерно по t на каждом конечном интервале, следовательно, оператор $E_+(H(t), t)$ ограничен и, более того, имеет место оценка

$$\|E_+(H(t), t)\| \leqslant e^{\sup\limits_{0 \leq y \leq t} \|H(y)\| \cdot t}. \tag{1,5}$$

Оператор $E_+(H(t), t)$ имеет обратный оператор $\Psi = E_-(H(t), t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Psi H \tag{1,6}$$

при начальном условии $\Psi(0) = I$.

Этот оператор можно аналогично (1,4) записать в виде ряда

$$E_-(H(t), t) = I - \int_0^t H(t_1)\,dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} H(t_2) H(t_1)\,dt_2\,dt_1 - \ldots, \tag{1,7}$$

откуда опять следует оценка

$$\|E_-(H(t), t)\| \leqslant e^{\sup\limits_{0 \leq y \leq t} \|H(y)\| \cdot t}. \tag{1,8}$$

Можно показать, что в случае, когда операторы $H(t)$ с разными значениями аргументов коммутируют, то есть $H(t_1) H(t_2) = H(t_2) H(t_1)$ для любых t_1 и t_2, то

$$E_\pm(H(t), t) = e^{\pm \int_0^t H(t)\,dt}. \tag{1,9}$$

Оператором сопряженным к $E_+(H(t), t)$ является оператор

$$E_+^*(H(t), t) = I + \int_0^t H^*(t_1)\,dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} H^*(t_2) H^*(t_1)\,dt_2\,dt_1 + \ldots. \tag{1,10}$$

В случае, когда $H = iD$, где $D(t)$ — эрмитов оператор, ряд (1,10) переходит в ряд (1,7), откуда следует $E_+^*(H(t), t) = E_-(H(t), t)$, то есть оператор $E_+(iD(t), t)$ унитарен.

Установим формулы сложения для операторов $E_+(H(t), t)$ и $E_-(H(t), t)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = (H_1 + H_2)\,\Phi,$$

которому удовлетворяет оператор $E_+(H_1(t) + H_2(t), t)$. Сделаем замену

$$\Phi = E_+(H_1(t), t)\,\Psi.$$

Тогда для Ψ получим уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} = E_-(H_1(t), t)\, H_2(t)\, E_+(H_1(t), t)\,\Psi,$$

откуда

$$\Psi = E_+\{E_-(H_1(t), t)\, H_2(t)\, E_+(H_1(t), t), t\}$$

и, следовательно,

$$E_+(H_1(t)+H_2(t), t) = E_+(H_1(t), t)\cdot E_+\{E_-(H_1(t), t)\, H_2(t)\, E_+(H_1(t), t)\, t\}. \quad (1,11)$$

Переходя к обратным операторам, получаем

$$E_-(H_1(t)+H_2(t), t) = E_-\{E_-(H_1(t), t)\, H_2(t)\, E_+(H_1(t), t), t\}\, E_-(H_1(t), t). \quad (1,12)$$

Наконец, заметим, что имеет место следующее очевидное соотношение

$$E_\pm(\alpha H(t), t) = E_\pm(H(t), \alpha t). \quad (1,13)$$

§ 2. Решение линейного диференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ уравнение

$$\frac{dq}{dt} = H(t)\, q, \quad (2,1)$$

где $H(t)$ оператор, удовлетворяющий тем же условиям, что и п. 2° § 1.

Очевидно, общее решение этого уравнения есть

$$q = E_+(H(t), t)\, q_0, \quad (2,2)$$

где q_0 — произвольный постоянный вектор из $\mathfrak{H}$.

Решение неоднородного уравнения

$$\frac{dq}{dt} = H(t)\, q + p(t), \quad (2,3)$$

где $p(t)$ — некоторый вектор из $\mathfrak{H}$, будем искать методом вариации произвольного постоянного вектора q_0, в выражении (2,2), а именно, в уравнении (2,3) сделаем замену

$$q = E_+(H(t), t)\, u.$$

Тогда получим

$$H(t)\, E_+(H(t), t)\, u + E_+(H(t), t)\frac{du}{dt} = H(t)\, E_+(H(t), t)\, u + p(t),$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = E_-(H(t), t)\, p(t),$$

то есть

$$u = \int_0^t E_-(H(t), t)\, p(t)\, dt + q_0.$$

Окончательно имеем

$$q = E_+(H(t), t)\int_0^t E_-(H(t), t)\, p(t)\, dt + E_+(H(t), t)\, q_0. \quad (2,4)$$

§ 3. Оценка решений

В этом параграфе мы установим теоремы о поведении решения уравнения (2,3) в случае, когда его коэфициенты зависят специальным образом от малого параметра ε и оператор $H(t)$ медленно меняется со временем t.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (2,3) *имеет вид*

$$\frac{dq}{dt}=H(\tau, \varepsilon)\,q+p(t, \varepsilon), \tag{3,1}$$

где $\tau=\varepsilon t$ *(ε — малый параметр) и оператор* $H(\tau, \varepsilon)$ *представим в виде*

$$H(\tau, \varepsilon)=iH_1(\tau)+\varepsilon H_2(\tau, \varepsilon), \tag{3,2}$$

причем $H_1(\tau)$ *— эрмитов оператор, а* $H_2(\tau, \varepsilon)$ *— равномерно ограниченный по норме оператор при* $0\leqslant\tau\leqslant L$ *и* $\varepsilon<\varepsilon_0$. *Тогда на интервале* $0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}$ *для решения* $q(t, \varepsilon)$ *с начальным условием* q_0 *имеет место оценка*

$$\|q(t, \varepsilon)\|\leqslant\frac{M\cdot\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}}\|p(t, \varepsilon)\|}{\varepsilon}+M'\|q_0\|, \quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}\right), \tag{3,3}$$

где M *и* M' *— некоторые положительные постоянные.*

Доказательство.

На основании формулы (2,4) решение уравнения (3,1) запишется в виде

$$q(t, \varepsilon)=E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\int\limits_0^t E_-(H(\tau, \varepsilon), t)\,p(t, \varepsilon)\,dt+E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\,q_0. \tag{3,4}$$

Покажем, что операторы $E_+(H(\tau, \varepsilon), t)$ и $E_-(H(\tau, \varepsilon), t)$ равномерно ограничены на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$ при $\varepsilon<\varepsilon_0$. Действительно, используя формулы (1,11) и (1,13), мы можем записать

$$\begin{aligned}E_+(H(\tau, \varepsilon), t)&=E_+(iH_1(\tau)+\varepsilon H_2(\tau, \varepsilon), t)=\\&=E_+(iH_1(\tau), t)\cdot E_+\{E_-(iH_1(\tau), t)\cdot\varepsilon H_2(\tau, \varepsilon)\,E_+(iH_1(\tau), t), t\}=\\&=E_+(iH_1(\tau), t)\cdot E_+\{E_-(iH_1(\tau), t)\,H_2(\tau, \varepsilon)\,E_+(iH_1(\tau), t), \tau\},\end{aligned}$$

а отсюда, в силу унитарности операторов $E_\pm(iH_1(\tau), t)$, получаем

$$\|E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\|\leqslant e^{\sup\limits_{0\leqslant\tau_1\leqslant\tau}\|H_2(\tau_1, \varepsilon)\|\,\tau},$$

то есть

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}}\|E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\|\leqslant e^{\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant L}\|H_2(\tau, \varepsilon)\|\cdot L}=M'.$$

Точно так же показывается, что и

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}}\|E_-(H(\tau, \varepsilon), t)\|\leqslant M'.$$

Оценивая теперь $q(t, \varepsilon)$, получаем

$$\|q(t, \varepsilon)\| \leqslant \|E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\| \cdot \int_0^t \|E_-(H(\tau, \varepsilon), t)\| \cdot \|p(t, \varepsilon)\| \cdot dt +$$

$$+ \|E_+(H(\tau, \varepsilon), t)\| \cdot \|q_0\| \leqslant M'^2 \sup_{0 \leqslant t_1 \leqslant t} \|p(t, \varepsilon)\| \cdot t + M' \|q_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{LM'^2 \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}} \|p(t, \varepsilon)\|}{\varepsilon} + M' \|q_0\|$$

при $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$.

Теорема доказана.

При некоторых условиях оценку, данную в теореме 1, можно улучшить.

Теорема 2. *Пусть в условии теоремы 1 оператор $H_1(\tau)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ на $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Пусть, далее, вектор-функция $p(t, \varepsilon)$ диференцируема и имеет вид*

$$p(t, \varepsilon) = p_1(t, \varepsilon) e^{i\theta(t)}, \tag{3,5}$$

где $\theta(t)$ есть вещественная функция, производная которой по t медленно меняется со временем $\frac{d\theta(t)}{dt} = k(\tau)$, причем функция $k(\tau)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$ и ее значения ни при каких τ из этого интервала не совпадают с точками спектра оператора $H_1(\tau)$ (отсутствие „резонанса"). Тогда имеет место оценка

$$\|q(t, \varepsilon\| \leqslant M_1 \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \|p_1(\tau, \varepsilon)\| + M_2 \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \left\| \frac{dp_1(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| + M' \|q_0\|$$

$$\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}\right). \tag{3,6}$$

Доказательство.

Оценим точнее интеграл в (3,4). Прежде всего, преобразовывая его, получим

$$\int_0^t E_-(H(\tau, \varepsilon), t)\, p(t, \varepsilon)\, dt = \int_0^t E_-\{E_-(iH_1(\tau), t)\, \varepsilon H_2(\tau, \varepsilon) \cdot E_+(iH_1(\tau), t), t\} \times$$

$$\times E_-(iH_1(\tau), t)\, e^{i\theta(t)} p_1(\tau, \varepsilon)\, dt = \int_0^t F(t) \cdot E_-(iH_1(\tau), t)\, e^{i\theta(t)} p_1(\tau, \varepsilon)\, dt = \tag{3,7}$$

$$= \int_0^t F(t) \cdot E_-\{i(H_1(\tau) - k(\tau) I), t\}\, p_1(\tau, \varepsilon)\, dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что по формуле сложения $E_-\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\ t\}=E_-(iH_1(\tau),\ t)\cdot E_-(-ik(\tau)I,\ t)=E_-(iH_1(\tau),\ t)e^{i\theta(t)}$. Оператор $F(t)=E_-\{E_-(iH_1(\tau),\ t)\varepsilon H_2(\tau,\ \varepsilon)E_+(iH_1(\tau),\ t),\ t\}$ ограничен при $0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}$ постоянной M' (см. теорему 1) и имеет ограниченную производную по τ, так как

$$\frac{dF}{d\tau}=-F\cdot E_-(iH_1(\tau),t)\cdot H_2(\tau,\varepsilon)\cdot E_+(iH_1(\tau),t)\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}\right).$$

Проинтегрируем (3,7) по частям

$$\int_0^t E_-(H(\tau,\varepsilon),t)\,p(t,\varepsilon)\,dt=\int_0^t F(t)\,E_-\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\ t\},\ p_1(\tau,\varepsilon)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t FE_-\left\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\ \frac{\tau}{\varepsilon}\right\}p_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau=\frac{i}{\varepsilon}\int_0^t F\cdot\frac{dE_-\left\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\frac{\tau}{\varepsilon}\right\}}{d\tau}\times$$

$$\times(H_1(\tau)-k(\tau)I)^{-1}\varepsilon p_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau=iF\cdot E_-\left\{i(H_1-kI),\ \frac{\tau}{\varepsilon}\right\}(H_1-kI)^{-1}p_1(\tau,\varepsilon)\Big|_0^\tau-$$

$$-\int_0^\tau\frac{dF}{d\tau}E_-\left\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\ \frac{\tau}{\varepsilon}\right\}(H_1(\tau)-k(\tau)I)^{-1}p_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau-$$

$$-i\int_0^\tau F\cdot E_-\left\{i(H_1(\tau)-k(\tau)I),\ \frac{\tau}{\varepsilon}\right\}\frac{d}{d\tau}\{(H_1-kI)^{-1}p_1\}\,d\tau.$$

Как мы видели, операторы F и $\frac{dF}{d\tau}$ равномерно ограничены при $0\leqslant\tau\leqslant L$. В силу отсутствия „резонанса“, существует ограниченный при каждом $\tau(0\leqslant\tau\leqslant L)$ оператор $(H_1(\tau)-k(\tau)I)^{-1}$. На основании результатов п. 1° § 1 этот оператор непрерывен по τ и, следовательно, равномерно ограничен при $0\leqslant\tau\leqslant L$; так как оператор $\frac{d}{d\tau}(H_1(\tau)-k(\tau)I)$ равномерно ограничен при $0\leqslant\tau\leqslant L$, то этим свойством обладает и оператор $\frac{1}{d\tau}(H_1(\tau)-k(\tau)I)^{-1}$.

Учитывая все сказанное, получаем

$$\left\|\int_0^t E_-(H(\tau,\varepsilon),t)\,p(t,\varepsilon)\,dt\right\|\leqslant N_1\sup_{0\leqslant\tau\leqslant L}\|p_1(\tau,\varepsilon)\|+N_2\sup_{0\leqslant\tau\leqslant L}\left\|\frac{dp_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\|.$$

Окончательно из (3,4) получаем требуемую оценку (3,6).

Теорема доказана.

§ 4. Формальное решение уравнения с медленно меняющимися коэфициентами

1°. Введем некоторые предварительные определения.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задан эрмитов оператор $H(\tau)$, непрерывно зависящий от параметра τ. Рассмотрим полосу M шириной L на плоскости (λ, τ): $-\infty < \lambda < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Совокупность Π всех точек $(\lambda, \tau) \in M$, где λ принадлежит спектру оператора $H(\tau)$, назовем полным спектром оператора $H(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant L)$. Точка (λ_0, τ_0) из полосы M не входит в Π тогда и только тогда, когда существует ограниченный оператор.

$$(H(\tau_0) - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Но в таком случае, в силу п. 1° § 1, существует некоторая окрестность точки (λ_0, τ_0), не пересекающаяся с Π. Таким образом, Π есть замкнутое множество в полосе M. Так как операторы $H(t)$ равномерно ограничены по норме при $0 \leqslant \tau \leqslant L$, то множество Π ограничено.

Пусть Π_1 есть замкнутая изолированная часть Π (то есть такая, что $\Pi_2 = \Pi - \Pi_1$ также замкнуто).

Обозначим через $(\Lambda(\tau), \tau)$ множество точек полного спектра Π с данным τ, а через $(\Lambda_1(\tau), \tau)$ ту его часть, которая принадлежит Π_1. Очевидно, $\Lambda_1(\tau)$ есть замкнутая изолированная часть спектра $\Lambda(\tau)$ оператора $H(\tau)$. Оператор ортогонального проектирования на инвариантное подпространство оператора $H(\tau)$, соответствующее этой части спектра, обозначим через $P_1(\tau)$. Как показано нами в [4], оператор $P_1(\tau)$ принадлежит тем же классам $C^{(k)}$, что и оператор $H(\tau)$.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем нам придется иметь дело со случаями, когда оператор $H(\tau)$ при каждом τ эрмитов в некотором скалярном произведении $(x, y)_\tau$, которое, вообще говоря, зависит от τ, однако нормы $\|x\|_\tau = \sqrt{(x, x)_\tau}$ эквивалентны при всех $\tau \in [0, L]$. Легко видеть, что все рассуждения настоящего пункта остаются в силе и в этом случае.

2°. Рассмотрим уравнение

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dq}{dt} = iB(\tau, \varepsilon)\, q + p(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta}, \tag{4,1}$$

где $\tau = \varepsilon t$, p и q — векторы гильбертова пространства $\mathfrak{H}$; A, B — линейные операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть выполнены следующие условия:

1. Имеют место формальные разложения

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau); \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau); \quad p(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\tau). \tag{4,2}$$

2. Производная от показателя θ по времени есть вещественная функция, медленно меняющаяся со временем

$\frac{d\theta}{dt}=k(\tau)$ ($k(\tau)$ принадлежит $C^{(k)}$ для достаточно больших значений k).

3. $A_0(\tau)$, $B_0(\tau)$ — эрмитовы операторы и, более того, $A_0(\tau)$ есть ограниченный положительный оператор, имеющий ограниченный обратный.

Если в $\mathfrak{H}$ ввести скалярное произведение

$$(x, y)^* = (A_0 x, y), \tag{4,3}$$

то, как известно, оператор $A_0^{-1}B_0$ будет в этом скалярном произведении эрмитовым.

4) При некоторых значениях τ $(0 \leqslant \tau \leqslant L)$ функция $k(\tau)$ может совпадать с точками изолированных частей $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ полного спектра оператора $A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ и ни при каких значениях τ не может совпадать с другими точками спектра этого оператора.

Пусть $\mathfrak{H}_j(\tau)$ есть инвариантное подпространство оператора $A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$, соответствующее части спектра его, входящей в Π_j $(j=1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqslant \tau \leqslant L)$, и $P_j(\tau)$ — проекционный оператор на это подпространство. Формальное решение уравнения (4,1) будем искать в виде [1)]

$$q(t, \varepsilon) = e^{i\theta(t)}\left(\sum_{j=1}^{n} U_j(\tau, \varepsilon)\,\eta_j + f(\tau, \varepsilon)\right), \tag{4,4}$$

где f — вектор пространства $\mathfrak{H}$, η_j — вектор, лежащий в подпространстве $\mathfrak{H}_j(\tau)$ $(j=1, \ldots, n)$ и удовлетворяющий диференциальному уравнению

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon)\,\eta_j + b_j(\tau, \varepsilon), \tag{4,5}$$

а U_j, $\mathfrak{A}_j$ — операторы, действующие в $\mathfrak{H}$.

Выражения для операторов U_j, $\mathfrak{A}_j$ и векторов f, b_j мы будем искать в виде формальных разложений

$$U_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{jk}(\tau)\cdot\varepsilon^k; \quad f(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\tau)\cdot\varepsilon^k;$$

$$\mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{jk}(\tau)\cdot\varepsilon^k; \quad b_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}(\tau)\cdot\varepsilon^k. \tag{4,6}$$

Подставим выражения (4,4) в наше уравнение (4,1), воспользовавшись при этом соотношениями (4,5), и сократим все уравнение на $e^{i\theta}$. Тогда в нем останутся члены, линейно зависящие от η_j, и свободные

1) Излагаемый ниже формальный процесс применялся к системам линейных диференциальных уравнений в работах И. З. Штокало [5] и С. Ф. Фещенко [6, 7].

члены. Приравнивая нулю отдельно коэфициенты при $\eta_j (j=1,\ldots, n)$ и свободный член уравнения, получим следующие соотношения:

$$ikAU_jP_j+\varepsilon AU_j'P_j+AU_j\mathfrak{A}_jP_j=iBU_jP_j \quad (j=1,\ldots, n), \tag{4,7}$$

$$ikAf+\varepsilon Af'+\sum_{j=1}^{n} AU_jb_j=iBf+p. \tag{4,8}$$

Если теперь в этих соотношениях отделить члены, стоящие при каждой степени ε, то получится бесконечная система уравнений для последовательного определения искомых членов разложений (4,6).

Далее мы покажем, как определяются из этих уравнений искомые величины. При этом будем пользоваться двумя теоремами, доказательство которых дано в [3].

Теорема 3. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задан эрмитов оператор $H(\tau)$, зависящий от параметра τ $(0\leqslant\tau\leqslant L)$, причем при некоторых значениях τ нуль является точкой его спектра. Обозначим через $\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$ инвариантное подпространство оператора $H(\tau)$, соответствующее некоторой изолированной части его полного спектра, содержащей все точки полного спектра вида $(0, \tau)$. Если $y(\tau)$ вектор-функция, значения которой при каждом τ лежат в ортогональном дополнении $\mathfrak{H}\ominus\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$ к подпространству $\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$, то уравнение*

$$H(\tau)\,x(\tau)=y(\tau) \tag{4,9}$$

имеет единственное решение, лежащее при каждом τ в $\mathfrak{H}\ominus\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$, причем, если $H(\tau)$ и $y(\tau)$ принадлежат классу $C^{(k)}$, то ему принадлежит и $x(\tau)\in C^{(k)}$.

Теорема 4. *Пусть $H(\tau)$ — ограниченный эрмитов оператор и $\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$ — его инвариантное подпространство, соответствующее некоторой изолированной части его полного спектра. Обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность ограниченных операторов, переводящих подпространство $\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$ в его ортогональное дополнение $\mathfrak{H}(\tau)\ominus\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$, и равных нулю на $\mathfrak{H}\ominus\hat{\mathfrak{H}}(\tau)$. Если оператор $F(\tau)\in\mathfrak{C}$, то уравнение*

$$H(\tau)\,X(\tau)-X(\tau)\,H(\tau)=F(\tau) \quad (0\leqslant\tau\leqslant L) \tag{4,10}$$

имеет единственное решение, причем, если $H(\tau)$ и $F(\tau)$ принадлежат классу $C^{(k)}$, то ему принадлежит и $X(\tau)$.

Замечание. Нам придется применять теоремы 3—4 к оператору $H(\tau)=A_0^{-1}(\tau)\,B_0(\tau)$, который является эрмитовым в скалярном произведении (4,3), вообще говоря, зависящем от τ. Однако так как нормы, порожденные этим скалярным произведением, при всех $\tau\in[0, L]$ эквивалентны, то, используя сказанное в замечании на стр. 78, легко усмотреть, что теоремы 3 и 4 остаются справедливыми и в этом случае.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что все члены $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$, $p_k(\tau)$ формальных разложений (4,2) принадлежат на $[0, L]$ классам $C^{(k)}$ при достаточно больших k.

Определение членов нулевого порядка

Для определения этих членов мы получаем соотношения

$$ikA_0U_{j0}P_j + A_0U_{j0}\mathfrak{A}_{j0}P_j = iB_0U_{j0}P_j, \qquad (4,11)$$
$$(j=1, \ldots, n)$$

$$ikA_0f_0 + \sum_{j=1}^{n} A_0U_{j0}b_{j0} = iB_0f_0 + p_0. \qquad (4,12)$$

Положим

$$U_{j0}(\tau) = I \quad (j=1, \ldots, n), \quad (0 \leqslant \tau \leqslant L). \qquad (4,13)$$

Тогда из (4,11) мы находим

$$\mathfrak{A}_{j0}(\tau)P_j(\tau) = i(A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau) - k(\tau)I)P_j(\tau),$$

и последнее соотношение удовлетворяется, если положить

$$\mathfrak{A}_{j0}(\tau) = i(A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau) - k(\tau)I)P_j(\tau) \qquad (4,14)$$
$$(j=1, \ldots, n).$$

Заметим, что оператор $\mathfrak{A}_{j0}(\tau)$ антиэрмитов в пространстве $\mathfrak{H}$.

Уравнение (4,12) можно переписать в виде

$$i(A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau) - k(\tau)I)f_0(\tau) = \sum_{j=1}^{n} b_{j0}(\tau) - A_0^{-1}(\tau)p_0(\tau). \qquad (4,15)$$

Чтобы применить к этому уравнению теорему 3, потребуем выполнения условий:

$$P_k(\tau)\left[\sum_{i=1}^{n} b_{j0}(\tau) - A_0^{-1}(\tau)p_0(\tau)\right] = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (4,16)$$

Тогда получим

$$b_{k0}(\tau) = P_k(\tau)b_{k0}(\tau) = P_k(\tau)A_0^{-1}(\tau)p_0(\tau) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (4,17)$$

считая $b_{k0}(\tau)$ лежащим в подпространстве $\tilde{\mathfrak{H}}_k(\tau)$.

Но теперь уравнение (4,15) на основании теоремы 3 имеет решение $f_0(\tau)$, принадлежащее классу $C^{(k)}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Определение членов первого порядка

Отделяя в (4,7) и (4,8) коэфициенты при первой степени ε и учитывая соотношения (4,13) и (4,14), получаем

$$(A_0^{-1}B_0 - kI)U_{j1}P_j - U_{j1}P_j(A_0^{-1}B_0 - kI) = -i\mathfrak{A}_{j1}P_j -$$
$$- A_0^{-1}(B_1 - kA_1)P_j + A_0^{-1}A_1(A_0^{-1}B_0 - kI)P_j = -i(\mathfrak{A}_{j1}P_j - V_{j1}P_j) \qquad (4,18)$$

и

$$i(A_0^{-1}B_0 - kI)f_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{j1} + \sum_{j=1}^{n} U_{j1}b_{j0} - A_0^{-1}p_1 - iA_0^{-1}(B_1 - kA_1)f_0 +$$
$$+ f_0' + \sum_{j=1}^{n} A_0^{-1}A_1b_{j0} = \sum_{j=1}^{n} b_{j1} - \omega_1. \qquad (4,19)$$

Уравнение (4,18) есть уравнение типа (4,10). По теореме 4 условие его разрешимости есть

$$P_j(\tau)\ (\mathfrak{A}_{j1}(\tau)-V_{j1}(\tau))\,P_j(\tau)=0,$$

откуда

$$P_j(\tau)\ \mathfrak{A}_{j1}(\tau)\,P_j(\tau)=P_j(\tau)\,V_{j1}(\tau)\,P_j(\tau).$$

Отсюда следует

$$\mathfrak{A}_{j1}(\tau)=P_j(\tau)\,V_{j1}(\tau)\,P_{j1}(\tau)+R_{j1}(\tau), \tag{4,20}$$

где $R_{j1}(\tau)$ — оператор, удовлетворяющий условию $P_j(\tau)\,R_{j1}(\tau)\,P_j(\tau)=0$, выбором которого мы распорядимся позднее.

На основании теоремы 4, мы можем теперь найти решение $U_{j1}(\tau)=U_{j1}(\tau)\,P_j(\tau)$ уравнения (4,18), принадлежащее классу $C^{(k)}$ при $\tau\in[0,L]$.

При решении уравнения (4,19) мы поступаем таким же образом, как и при решении уравнения (4,15).

Из условий

$$P_k(\tau)\left\{\sum_{j=1}^{n} b_{j1}(\tau)-w_1(\tau)\right\}=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

находим

$$b_{k1}(\tau)=P_k(\tau)\,b_{k1}(\tau)=P_k(\tau)\,w_1(\tau), \tag{4,21}$$

учитывая при этом уже определенные значения величин $U_{j1}(\tau)$, и далее определяем $f_1(\tau)$.

Определение членов порядка m

Пусть уже определены все члены разложений (4,6) до порядка $m-1$ включительно. Покажем, что таким же путем, как и выше можно определить члены порядка m, то есть процесс определения искомых величин можно продолжать неограниченно.

Приравнивая коэфициенты при ε^m в выражениях (4,7), (4,8), получаем

$$(A_0^{-1}B_0-kI)\,U_{jm}P_j-U_{jm}P_j\,(A_0^{-1}B_0-kI)=-i\,(\mathfrak{A}_{jm}P_j-V_{jm}P_j) \tag{4,22}$$

и

$$i\,(A_0^{-1}B_0-kI)\,f_m=\sum_{j=1}^{n} b_{jm}-w_m, \tag{4,23}$$

где $V_{jm}(\tau)$ включает в себя члены не выше $m-1$-го порядка, а в выражение $w_m(\tau)$ из членов порядка выше $m-1$-го входят только операторы $U_{jm}(\tau)$.

Потребовав, чтобы правая часть уравнения (4,22) удовлетворяла условию теоремы 4, получаем

$$P_j\,(\mathfrak{A}_{jm}-V_{jm})\,P_j=0 \qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

откуда находим

$$\mathfrak{A}_{jm}(\tau)=P_j(\tau)\,V_{jm}(\tau)\,P_j(\tau)+R_{jm}(\tau).$$

При этом для всех $m > 1$ мы положим $R_{jm}(\tau) = 0$ и тогда

$$\mathfrak{A}_{jm}(\tau) = P_j(\tau) V_{jm}(\tau) P_j(\tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ m > 1). \tag{4,24}$$

После этого мы можем найти величины $U_{jm}(\tau)$.

Теперь нам уже известны все члены, входящие в выражение $w_m(\tau)$. Применим к уравнению (4,23) теорему 3. Из условия

$$P_k(\tau)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jm}(\tau) - w_m(\tau)\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

находим

$$b_{km}(\tau) = P_k(\tau) b_{km}(\tau) = P_k(\tau) w_m(\tau) \tag{4,25}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

и затем определяем f_m.

Таким образом, все величины m-го порядка можно определить, причем все они принадлежат, в силу теорем 3 и 4, классам $C^{(k)}$ на сегменте $[0, L]$ при достаточно больших k.

Определение. Выражение

$$q^{(m)} = e^{\theta(t)}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_{jk}(\tau)\right)\eta_j^{(m)} + \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k f_k(\tau)\right\}, \tag{4,26}$$

где $\eta_j^{(m)}$ есть решения диференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_j^{(m)}}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k \mathfrak{A}_{jk}(\tau)\right)\eta_j^{(m)} + \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k b_{jk}(\tau), \tag{4,27}$$

а величины U_{jk}, f_k, $\mathfrak{A}_{jk}$, b_{jk} определены вышеописанным способом, будем называть „m-ым приближением".

Мы видим, таким образом, что нахождение „m-ых приближений" сводится к решению алгебраических операторных уравнений, операции диференцирования и решению диференциальных уравнений (4,27), каждое из которых имеет вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\eta + b(\tau, \varepsilon), \tag{4,28}$$

причем

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \mathfrak{A}_0(\tau) + \varepsilon\mathfrak{A}^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

где $\mathfrak{A}_0(\tau)$ — антиэрмитов оператор.

Уравнения (4,27) мы будем называть отщепленными. Их мы исследуем в следующем параграфе.

Примечание 1. В случае отсутствия „резонанса", то есть когда функция $k(\tau)$ ни при каких значениях τ не может совпадать с точками спектра оператора $A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$, мы ищем согласно правилу решение уравнения (4,1) в виде $q = f(\tau) e^{\theta(t)}$. Таким образом, здесь отсутствуют вектор-функции $\eta_i(t)$ и нахождение „m-ых приближений" сводится к решению алгебраических операторных уравнений и диференцированию.

Примечание 2. Легко видеть, что если свободный член уравнения (4,1) мал, в том смысле, что $p_0(\tau)=0$, то все вектор-функции $b_{j0}(\tau)$ обращаются в нуль. Таким образом, в этом случае в уравнении (4,27) свободный член есть также величина порядка ε.

Примечание 3. В случае однородного уравнения

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dq}{dt} = iB(\tau, \varepsilon)\, q \tag{4,1}$$

можно применить тот же метод для отыскания частного решения, соответствующего изолированной части полного спектра оператора $A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau)$. Решение ищется в виде

$$q = U(\tau)\,\eta(t),$$

где $U(\tau)$ и $\eta(\tau)$ — такие же, как и выше, причем для определения $\eta(t)$ получится диференциальное уравнение вида

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\,\eta.$$

Если весь полный спектр представить в виде суммы конечного числа изолированных частей, то общее решение можно искать в виде

$$q = \sum_j U_j(\tau)\,\eta_j(t),$$

где $q_j = U_j(\tau)\,\eta_j(t)$ — описанные выше частные решения.

§ 5. Исследование отщепленных уравнений

При проведении формального процесса мы предполагали, что значения вектор-функций η_j при каждом τ принадлежат соответствующему инвариантному подпространству $\tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau)$. С другой стороны, вектор-функции η_j являются решениями уравнений типа

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\,\eta + b(\tau, \varepsilon), \tag{5,1}$$

где значения $b(\tau, \varepsilon)$ лежат в $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$, а все коэфициенты разложения в ряд по степеням ε оператора $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ однозначно определены и обладают свойством

$$P(\tau)\,\mathfrak{A}_k(\tau)\,P(\tau) = \mathfrak{A}_k(\tau) \qquad (k \neq 1) \tag{5,2}$$

($P(\tau)$ — оператор ортогонального проектирования на $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$), за исключением $\mathfrak{A}_1(\tau)$, который представим в виде

$$\mathfrak{A}_1(\tau) = \mathfrak{A}_1'(\tau) + R_1(\tau),$$

где $\mathfrak{A}_1'(\tau)$ также обладает свойством (5,2), а $R_1(\tau)$ — произвольный оператор, удовлетворяющий условию

$$P(\tau)\,R_1(\tau)\,P(\tau) = 0.$$

Мы покажем, что оператор $R_1(\tau)$ можно выбрать таким образом, что всякое решение уравнения (5,1), начальное значение которого при $\tau=0$ лежит в $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$, при каждом τ принимает значения из подпространства $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$. Более того, при этом уравнение (5,1) будет сводиться заменой переменного к уравнению в подпространстве $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$ и, таким образом, будет являться уравнением „низшего порядка“ по сравнению с исходным уравнением (5,1))[1]).

Введем в рассмотрение оператор $U(\tau)$, принадлежащий классу $C^{(k)}$, обладающий ограниченным обратным $U^{-1}(\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant L)$ и отображающий подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$ на $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$ (существование такого оператора показано нами в [4]), и сделаем замену переменных

$$\eta = U(\tau)\xi.$$

Тогда уравнение (5,1) перейдет в

$$\frac{d\xi}{dt} = S(\tau)\xi + U^{-1}(\tau)b(\tau), \tag{5,3}$$

где

$$S(\tau)=U^{-1}(\tau)\mathfrak{A}(\tau)U(\tau)-\varepsilon U^{-1}(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}=$$

$$=U^{-1}(\tau)\mathfrak{A}'(\tau)U(\tau)+\varepsilon U^{-1}(\tau)R_1(\tau)U(\tau)-\varepsilon U^{-1}(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}.$$

Положим теперь

$$R_1(\tau)=\frac{dU(\tau)}{d\tau}U^{-1}(\tau)-P(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}U^{-1}(\tau)P(\tau).$$

Тогда выполнено условие $P(\tau)R_1(\tau)P(\tau)$ и, далее

$$S(\tau)=U^{-1}(\tau)P(\tau)\mathfrak{A}'(\tau)P(\tau)U(\tau)+\varepsilon U^{-1}(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}-$$

$$-\varepsilon U^{-1}(\tau)P(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}U^{-1}(\tau)P(\tau)U(\tau)-\varepsilon U^{-1}(\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}=$$

$$=U^{-1}(\tau)P(\tau)\left\{\mathfrak{A}'(\tau)-\varepsilon\frac{dU(\tau)}{d\tau}U^{-1}(\tau)\right\}P(\tau)U(\tau),$$

то есть оператор $S(\tau)$ оставляет инвариантным подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$. Так как, кроме того, $U^{-1}(\tau)b(\tau)=U^{-1}(\tau)P(\tau)b(\tau)\in\tilde{\mathfrak{H}}(0)$, то уравнение (5,2) есть диференциальное уравнение в подпространстве $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$; вектор-функция ξ лежит в $\tilde{\mathfrak{H}}(0)$ и, следовательно, вектор-функция $\eta=U(\tau)\xi$ обладает требуемым свойством.

---

[1]) Такое отщепление систем диференциальных уравнений меньшего порядка от уравнения (4,1) без предположения об эрмитовости коэфициентов для случая однородной конечной системы было проведено в работе [6], но без обоснования возможности диференцирования величин, получаемых в формальном процессе, и без установления сходимости процесса. Как нам стало известно из устной беседы с С. Ф. Фещенко, сходимость процесса им установлена для того случая, когда эрмитова часть оператора $A_0^{-1}B_0$ отрицательна.

§ 6. Доказательство асимптотической сходимости

Введем обозначения

$$A(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i A_i(\tau) = A^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1},$$

$$B(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i B_i(\tau) = B^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1}, \tag{6,1}$$

$$p(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i(\tau) = p^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1}.$$

Лемма. *Пусть при $\varepsilon < \varepsilon_0$ операторы $A_i(\tau)$, $B_i(\tau)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ и векторы $p_i(\tau)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ на интервале $0 \leqslant \tau < L$ принадлежат классу $C^{(m+1-i)}$, а $A^{(m)}(\tau, \varepsilon)$, $B^{(m)}(\tau, \varepsilon)$ и $p^{(m)}(\tau, \varepsilon)$ — классу $C^{(0)}$.*

Тогда „m-ое приближение" $q^{(m)}$ удовлетворяет уравнению.

$$A \frac{dq^{(m)}}{dt} = iBq^{(m)} + pe^{i\theta} + \varepsilon^m \cdot z(\tau, \varepsilon), \tag{6,2}$$

где $z(\tau, \varepsilon)$ — вектор-функция, равномерно ограниченная на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Доказательство.

Если подставить в левую часть уравнения (6,1) вместо q „m-ое приближение" $q^{(m)}$, то из самого способа построения $q^{(m)}$ следует, что для него получится уравнение

$$A \frac{dq^{(m)}}{dt} = iBq^{(m)} + pe^{i\theta} + \varepsilon^{m+1} e^{i\theta} \left\{ \sum_{j=1}^{n} R_j \eta_j^{(m)} + r \right\}, \tag{6,3}$$

где $R_j(\tau, \varepsilon)$ некоторые равномерно ограниченные операторы в $\mathfrak{H}$ и вектор $r(\tau, \varepsilon)$ равномерно ограничен при $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Остается исследовать характер поведения на этом интервале вектор-функций η_j. Эти вектор-функции удовлетворяют уравнениям типа (4,28). В силу формул § 4, при выполнении условий леммы, все величины $\mathfrak{A}_{jk}(\tau)$, $b_{jk}(\tau)$, входящие в эти уравнения, равномерно ограничены на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Таким образом, в данном случае уравнения (4,28) удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно, мы получаем оценку

$$\|\eta_j(t)\| \leqslant \frac{M \sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \| b_j^{(m)}(\tau, \varepsilon) \|}{\varepsilon} + M' \|\eta_0\|, \tag{6,4}$$

где $b_j^{(m)}(\tau, \varepsilon)$ есть свободный член уравнения (5,28).

Таким образом,

$$\|\eta_j\| \leqslant \frac{C}{\varepsilon},$$

где C — некоторая постоянная. Этим доказывается лемма.

Примечание 1'. В случае отсутствия резонанса мы получим для $q^{(m)}$ уравнение

$$A\frac{dq^{(m)}}{dt} = iBq^{(m)} + pe^{i\theta} + \varepsilon^{m+1} z(\tau, \varepsilon), \tag{6,5}$$

где $z(\tau, \varepsilon)$ ограничена равномерно на $0 \leqslant \tau \leqslant L$, так как в этом случае отсутствуют члены с η_j.

Примечание 2'. Для случая малого свободного члена $(p_0 \equiv 0)$, как мы видели раньше, функции b_j есть величины порядка ε. Таким образом, здесь оценка (6,4) дает нам $\|\eta_j\| \leqslant C'$ и мы снова приходим для „m-го приближения" к уравнению вида (6,5).

Примечание 3'. Рассмотрим однородное уравнение (4,1). На основании примечания 3 § 4 здесь $b_j(\tau, \varepsilon) = 0$ и из оценки (6,1) мы вновь получаем $\|\eta_j\| \leqslant C''$. Таким образом, в этом случае „m-ое приближение" $q^{(m)}$ удовлетворяет уравнению

$$A\frac{dq^{(m)}}{dt} = iBq^{(m)} + \varepsilon^{m+1} z(\tau, \varepsilon), \tag{6,5}$$

где $z(\tau, \varepsilon)$ — функция, равномерно ограниченная при $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Теорема 5. *Пусть точное решение $q(t)$ уравнения (4,1) и „m-ое приближение" взяты при одинаковых начальных условиях. Тогда, если выполнены условия леммы, то найдутся такие положительные числа c_m и ε_1 $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ выполнено неравенство*

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}. \tag{6,6}$$

Доказательство.

На основании (4,1) и (6,2) разность $s^{(m)} = q - q^{(m)}$ удовлетворяет уравнению

$$A\frac{ds^{(m)}}{dt} = iBs^{(m)} + \varepsilon^m z(\tau, \varepsilon) \tag{6,7}$$

при нулевых начальных условиях. Преобразуем последнее уравнение. Для этого представим A и B в виде

$$A(\tau, \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon A^{(1)}(\tau, \varepsilon); \quad B(\tau, \varepsilon) = B_0(\tau) + \varepsilon B^{(1)}(\tau, \varepsilon).$$

Тогда из (7,7) получаем

$$A\frac{ds^{(m)}}{dt} = iAA_0^{-1}B_0 s^{(m)} - \varepsilon i A^{(1)} A_0^{-1} B_0 s^{(m)} + i\varepsilon B^{(1)} s^{(m)} + \varepsilon^m z(\tau, \varepsilon). \tag{6,8}$$

В силу того, что операторы A_0^{-1} и $A^{(1)}$ ограничены, найдется такое $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ оператор $A = A_0 + \varepsilon A^{(1)}$ будет иметь ограниченный обратный. Применяя A^{-1} к (6,8), получим

$$\frac{ds^{(m)}}{dt} = iH_1(\tau)s^{(m)} + \varepsilon H_2(\tau, \varepsilon)s^{(m)} + A^{-1}z \cdot \varepsilon^m, \tag{6,9}$$

где $H_1(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ ограниченный эрмитов оператор в смысле скалярного произведения (4,2), $H_2(\tau, \varepsilon) = -iA^{-1}(A^{(1)} A_0^{-1} B_1 - B^{(1)})$ — ограниченный оператор при $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Применяя к решению уравнения (6,9) с нулевыми начальными условиями теорему 1, в силу равномерной ограниченности при $0 \leqslant \tau \leqslant L$ вектора $A^{-1}z$ получаем искомую оценку. Теорема доказана[1]).

Примечание 1′. Для случая отсутствия „резонанса“, исходя из уравнения (6,5) вместо (6,2), мы при помощи тех же рассуждений получим в условиях теоремы оценку.

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c_m \varepsilon^m. \tag{6,6'}$$

Примечание 2′. Для случая малого свободного члена ($p_0(\tau) \equiv 0$) мы получаем оценку (6,6′).

Примечание 3′. Для случая однородного уравнения, исходя из уравнения (6,5), мы получаем оценку (6,6′).

§ 7. Случай уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение[2])

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{d^2 q}{dt^2} = \varepsilon B(\tau, \varepsilon) \frac{dq}{dt} - C(\tau, \varepsilon) q + p(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t)} \tag{7,1}$$

в пространстве $\mathfrak{H}$, где

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i(\tau); \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i(\tau); \quad C(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i(\tau);$$

$$p(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i(\tau); \quad \frac{d\theta}{dt} = k(\tau),$$

причем операторы A_0 и C_0 положительны (A_0^{-1} — ограниченный) и $k(\tau)$ — достаточное число раз диференцируемая функция.

Пусть функция $k^2(\tau)$ может совпадать при некоторых значениях τ с точками спектра оператора $A_0^{-1}(\tau) C_0(\tau)$. Как мы отмечали в § 4, этот оператор эрмитов в скалярном произведении $(A_0(\tau) x, y)$.

Покажем, что уравнение (7,1) сводится к уравнению вида (4,1). Действительно, если ввести новые переменные $q = u$; $\frac{dq}{dt} = v$, то (7,1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v, \\ A \frac{dv}{dt} &= -Cu + \varepsilon Bv + pe^{i\theta}. \end{aligned} \tag{7,2}$$

---

[1]) Заметим, что оценка (6,6) нами фактически дана в норме $\|x\|^* = \sqrt{(A_0 x, x)}$, однако она справедлива и в обычной норме, так как нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ эквивалентны.

[2]) В конечномерном случае при условии „резонанса“ с одним простым собственным числом уравнение подобного вида рассматривалось С. Ф. Фещенко в работе [7]. Приведенная там оценка сходимости является более сильной, чем та, которая имеет место в предположениях автора.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ и введем в нем скалярное произведение

$$([u, v], [u_1, v_1]) = (C_0 u, u_1) + (v, v_1). \tag{7,3}$$

Тогда систему (7,2) можно будет записать в виде

$$\bar{A} \frac{dw}{dt} = i\bar{B}w + \bar{p}e^{i\theta}, \tag{7,4}$$

где

$$w = [u, v]; \quad \bar{p} = [0, p]; \quad \bar{A} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{Vmatrix}; \quad \bar{B} = -i \begin{Vmatrix} 0 & I \\ -C & \varepsilon B \end{Vmatrix}. \tag{7,5}$$

Легко показать, что в пространстве $\mathfrak{H}_1$ оператор

$$\bar{A}_0 = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & A_0 \end{Vmatrix}$$

ограничен, положителен и обладает ограниченным обратным, а оператор

$$\bar{B}_0 = -i \begin{Vmatrix} 0 & I \\ -C_0 & 0 \end{Vmatrix},$$

эрмитов. Оператор $\bar{A}_0^{-1}\bar{B}_0$ эрмитов в смысле скалярного произведения

$$(\bar{A}_0 [u, v], \quad [u_1, v_1]) = (C_0 u, u_1) + (A_0 v, v_1). \tag{7,6}$$

Покажем, что спектр оператора $\bar{A}_0^{-1}(\tau)\bar{B}_0(\tau)$ состоит из всех точек $\pm\sqrt{\lambda}$, где λ пробегает спектр оператора $A_0^{-1}(\tau) C_0(\tau)$ в пространстве $\mathfrak{H}$. В самом деле, имеет место равенство

$$\bar{A}_0^{-1}\bar{B}_0 = -i \begin{Vmatrix} 0 & I \\ -A_0^{-1}C_0 & 0 \end{Vmatrix} = \bar{X} \begin{Vmatrix} \sqrt{A_0^{-1}C_0} & 0 \\ 0 & -\sqrt{A_0^{-1}C_0} \end{Vmatrix} \bar{X}^{-1},$$

где

$$\bar{X} = \begin{Vmatrix} I & I \\ -A_0^{-1}C_0 & -A_0^{-1}C_0 \end{Vmatrix},$$

откуда и следует наше утверждение.

Таким образом, в зависимости от того, может ли функция $k^2(\tau)$ совпадать с точками спектра оператора $A_0^{-1}(\tau) C_0(\tau)$ или нет, мы получаем для уравнения (7,4) соответственно либо случай „резонанса“, либо отсутствия „резонанса“.

Мы видим, что уравнение (7,4) есть уравнение типа (4,1).

Применяя к нему весь формальный процесс § 4, можно построить „m-ое приближение“ $(q^{(m)}, \bar{q}^{(m)})$.

Введем аналогично (6,1) обозначения

$$A(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i A_i(\tau) = A^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1}; \quad B(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i B_i(\tau) = B^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1};$$

$$C(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i C_i(\tau) = C^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1}; \qquad p(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i(\tau) = p^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1}.$$

Наложим на

$$A_i(\tau),\ B_i(\tau),\ C_i(\tau),\ p_i(\tau) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

$$A^{(m)}(\tau, \varepsilon), \quad B^{(m)}(\tau, \varepsilon), \quad C^{(m)}(\tau, \varepsilon), \quad p^{(m)}(\tau, \varepsilon)$$

те же ограничения, что и в лемме § 6. Тогда уравнение (7,4) будет удовлетворять условиям теоремы 5. Из нее для уравнения (7,1) получаем:

Теорема 6. *Предположим, что оператор $C_0(\tau)$ имеет равномерно ограниченный по норме обратный оператор $C_0^{-1}(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant L)$. Пусть теперь точное решение q уравнения* (7,1) *и „m-ое приближение“ $(q^{(m)}, \bar{q}^{(m)})$ взяты при одинаковых начальных условиях. Тогда найдутся также положительные числа c_m и ε_1 $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ выполнены неравенства:*

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}; \quad \left\| \frac{dq}{dt} - \frac{dq^{(m)}}{dt} \right\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}. \tag{7,7}$$

Доказательство.

Непосредственно из теоремы 5 мы получаем оценку

$$\sqrt{(C_0 s^{(m)},\ s^{(m)}) + (\bar{s}^{(m)},\ \bar{s}^{(m)})} \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}, \tag{7,8}$$

где

$$s^{(m)} = q - q^{(m)}; \quad \bar{s}^{(m)} = \frac{dq}{dt} - \bar{q}^{(m)}.$$

Заметим, что так как по лемме § 6 вектор $(q^{(m)}, \bar{q}^{(m)})$ удовлетворяет с точностью до ε^m уравнению (7,4), то есть системе (7,2), то

$$\left\| \frac{dq^{(m)}}{dt} - \bar{q}^{(m)} \right\| \leqslant d_m \varepsilon^m. \tag{7,9}$$

Отсюда и из (7,8)

$$\left\| \frac{dq}{dt} - \frac{dq^{(m)}}{dt} \right\| \leqslant \left\| \frac{dq}{dt} - \bar{q}^{(m)} \right\| + \left\| \frac{dq^{(m)}}{dt} - \bar{q}^{(m)} \right\| \leqslant \bar{c}_m \varepsilon^{m-1} + d_m \varepsilon^m \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}.$$

Оценку

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1}$$

получаем непосредственно из (7,8), учитывая, что оператор $C_0(\tau)$ имеет равномерно ограниченный по норме на сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant L$ обратный оператор [1]).

Примечание. В случае отсутствия резонанса ($k^2(\tau) \neq \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ точки спектра оператора $A_0^{-1}(\tau) C_0(\tau)$), в случае малости свободного члена ($p_0(\tau) \equiv 0$), а также для однородного уравнения, опираясь на примечания 1″, 2″, 3″, получим лучшую оценку [2])

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c_m \varepsilon^m; \quad \left\| \frac{dq}{dt} - \frac{dq^{(m)}}{dt} \right\| \leqslant c_m \varepsilon^m.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Плеснер, Спектральная теория линейных операторов, Успехи матем. наук, т. IX (1941).
2. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V (1948).
3. Ю. Л. Далецкий и С. Г. Крейн, Формулы диференцирования по параметру функций эрмитовых операторов, ДАН СССР, т. 76, 1.
4. Ю. Л. Далецький і С. Г. Крейн, Деякі властивості операторів, що залежать від параметра, Доповіді АН УРСР № 6, 1950.
5. Й. З. Штокало, Критерии устойчивости и неустойчивости, Мат. сборн., т. 19/61 : 1 (1946), стр. 263.
6. С. Ф. Фещенко, Про асимптотичне зведення інтегралів лінійних диференціальних рівнянь, що мають параметр, Доповіді АН УРСР № 1 (1949).
7. С. Ф. Фещенко, Малі коливання системи із скінченим числом ступенів вільності. Київ. держ. пед. ін-т, Наукові записки, т. IX, Фіз.-мат. серія № 4 за 1949 р.

Поступило 8. IX 1950 г.

[1]) Заметим, что если оператор $C_0(\tau)$ не имеет обратного, то оценка для производных остается прежней, откуда следует, что для функций будет справедлива оценка

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c'_m \varepsilon^{m-2}.$$

[2]) Здесь, если оператор $C_0(\tau)$ не имеет обратного, мы тем же путем, что и в предыдущей сноске, получим оценку

$$\|q - q^{(m)}\| \leqslant c'_m \varepsilon^{m-1}.$$