

## Гидродинамический расчет плотины при наличии двух шпунтов неравной длины

*П. Ф. Фильчаков*

1. Введение. Задача движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями в принципе была решена акад. Н. Н. Павловским еще в 1922 г., в его основополагающем труде [2]. Однако технические трудности расчета при более-менее сложном подземном контуре плотины настолько велики, что многие практически важные задачи до настоящего времени не имеют точного решения.

К числу таких задач относится, в частности, плотина с двумя шпунтами неравной длины, то есть общий случай двухшпунтового (асимметричного) флютбета.

Отметим, что, кроме самостоятельного значения, этот случай представляет также интерес в качестве контрольной задачи для проверки различных приближенных методов гидродинамического расчета плотин.

С целью упрощения выкладок в данной заметке решение проведено в функциях Вейерштрасса, после чего сделан переход к более удобным для вычислительных целей эллиптическим интегралам в форме Лежандра.

Случай конечного по глубине водопроницаемого основания здесь не рассматривается и составит предмет отдельной статьи.

2. О т о б р а ж а ю щ а я ф у н к ц и я. Рассмотрим область двухшпунтового флютбета, характерные точки которого перенумерованы (бесконечно удаленная точка обозначена цифрой 7) и оси направлены как указано на рис. 1.

Ищем предварительно функцию, конформно отображающую область флютбета  $z$  на вспомогательную (нижнюю) полуплоскость  $\zeta^*$ , в которой точкам 6 ( $z=b$ ); 7 ( $z=\infty$ ) и 1 ( $z=0$ ) соответствуют точки  $\zeta_6^* = \infty$ ,  $\zeta_7^* = a$  и  $\zeta_1^* = \xi^*$ .

Последующий переход к стандартной полуплоскости  $\zeta$ , в которой точкам 6, 7, 1 соответствуют точки  $\zeta_6 = +1$ ,  $\zeta_7 = \infty$ ,  $\zeta_1 = -1$ , легко осуществляется дробнолинейным преобразованием.

Рассматривая область флютбета  $z$  как многоугольник и пользуясь произволом выбора трех констант отображения, искомую функцию представим в виде <sup>1)</sup>:

$$z = A^* \int_{\zeta^*}^{\infty} \frac{(\zeta^* - \xi_2^*)(\zeta^* - \xi_1^*) d\zeta^*}{(\zeta^* - a)^2 \sqrt{4(\zeta^* - \xi_1^*)(\zeta^* - \xi_3^*)(\zeta^* - \xi_4^*)}} + B \quad (1)$$

при дополнительных условиях

$$\xi_0^* = \infty, \quad (2)$$

$$\xi_1^* + \xi_3^* + \xi_4^* = 0, \quad (3)$$

$\xi_1^*$  — пока произвольно.

Остальные константы отображения  $A^*$ ;  $B$ ;  $a$ ;  $\xi_2^*$ ;  $\xi_3^*$ ;  $\xi_4^*$ ;  $\xi_5^*$  надлежит еще определить, что и составляет основную трудность задачи.

В силу условия (3) радикал, стоящий под знаком интеграла (1), представлен в нормальной вейерштрассовской форме, поэтому, произведя замену

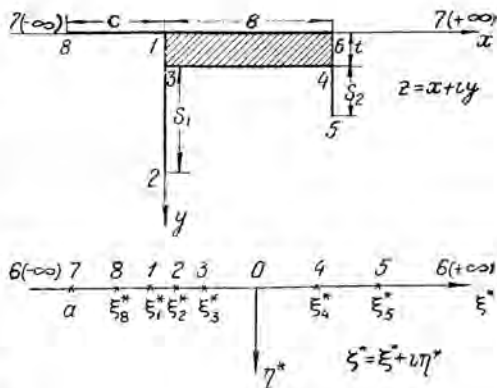


Рис. 1.

$$\zeta^* = \wp(u) \quad (4)$$

$$\infty = \wp(0); \quad du = \frac{d\zeta^*}{\sqrt{4(\zeta^* - \xi_1^*)(\zeta^* - \xi_3^*)(\zeta^* - \xi_4^*)}} \quad (4a)$$

и обозначая

$$a = \wp(\alpha), \quad (5)$$

будем иметь

$$z = A^* \int_{\alpha}^0 \frac{[\wp(u) - \xi_2^*][\wp(u) - \xi_3^*] du}{[\wp(u) - \wp(\alpha)]^2} + B$$

или

$$z = B - A^* \left\{ \int_0^{\alpha} du + [(\alpha - \xi_2^*) + (\alpha - \xi_3^*)] \int_0^{\alpha} \frac{du}{\wp(u) - \wp(\alpha)} + \right. \\ \left. + (\alpha - \xi_2^*)(\alpha - \xi_3^*) \int_0^{\alpha} \frac{du}{[\wp(u) - \wp(\alpha)]^2} \right\}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> В качестве угла  $\alpha$  при вершине 7, которая расположена в бесконечно удаленной точке, принимаем со знаком минус угол, на который надо повернуть луч  $(6; 7(+\infty))$ , вращая его против часовой стрелки до совпадения с лучом  $(1; 7(-\infty))$ , т. е.  $\alpha = -\pi$ . (См. акад. М. А. Лаврентьев, [1], гл. III, § 38).

Пользуясь формулами для простейших интегралов от функции  $\mathfrak{P}(u)$

$$\int \frac{du}{\mathfrak{P}(u) - \mathfrak{P}(a)} = \frac{2\zeta(a)}{\mathfrak{P}'(a)} \cdot u + \frac{1}{\mathfrak{P}'(a)} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + \text{const}$$

и

$$\int \frac{du}{[\mathfrak{P}(u) - \mathfrak{P}(a)]^2} = - \left\{ \left[ \frac{2\mathfrak{P}(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} + \frac{2\mathfrak{P}''(a)\zeta(a)}{\mathfrak{P}'^3(a)} \right] u + \frac{\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^3(a)} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + \frac{1}{\mathfrak{P}'^2(a)} [\zeta(u+a) + \zeta(u-a)] \right\} + \text{const},$$

без труда интегрируем (6) и после группировки получаем

$$\begin{aligned} z = B - A^* & \left\{ \left[ 1 - 2(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*) \frac{\mathfrak{P}(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\zeta(a)}{\mathfrak{P}'(a)} \left( 2a - \xi_2^* - \xi_5^* - \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} \right) \right] u + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mathfrak{P}'(a)} \left[ 2a - \xi_2^* - \xi_5^* - \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} \right] \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} - \right. \\ & \left. - \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)}{\mathfrak{P}'^2(a)} [\zeta(u+a) + \zeta(u-a)] \right\}. \end{aligned}$$

Введем теперь обозначения:

$$L = \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)}{\mathfrak{P}'^2(a)} = \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)}{4(a - \xi_1^*)(a - \xi_3^*)(a - \xi_4^*)}; \quad (7)$$

$$L \cdot D = \frac{1}{\mathfrak{P}'(a)} \left[ 2a - \xi_2^* - \xi_5^* - \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} \right]; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L \cdot C = 1 - 2(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*) \frac{\mathfrak{P}(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} + \frac{2\zeta(a)}{\mathfrak{P}'(a)} \left[ 2a - \xi_2^* - \xi_5^* - \frac{(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)} \right] = \\ = 1 - 2L \cdot \mathfrak{P}(a) + 2L \cdot D \cdot \zeta(a) \end{aligned} \quad (9)$$

и придадим отображающей функции вид

$$z = B - A^* \cdot L \left\{ Cu + D \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} - [\zeta(u+a) + \zeta(u-a)] \right\}, \quad (10)$$

где <sup>1)</sup>  $\xi^* = \mathfrak{P}(u)$  и  $a = \mathfrak{P}(a)$ .

Константы, входящие в формулу (10), определяем из соответствия точек отображаемых областей, учитывая, что нижней полуплоскости в области  $z$  (при левых системах координат) соответствует в области  $u$  прямоугольник  $0; -\omega_3; -\omega_3 + \omega_1; \omega_1$  (рис. 2).

<sup>1)</sup> Здесь  $\xi^*$  обозначает вспомогательную полуплоскость, а  $\zeta(u)$  — дзета-функцию.

Точка *б*. Для этой точки (рис. 2)

$$z = b; \quad \zeta^* = \pm \infty; \quad u = 0.$$

Функции сигма и дзета нечетные функции, поэтому имеем

$$\ln \frac{\sigma(-\alpha)}{\sigma(+\alpha)} = \ln(-1) = (2n+1)i\pi, \quad \text{где } n=0; \pm 1; \pm 2, \dots,$$

$$[\zeta(\alpha) + \zeta(-\alpha)] = 0$$

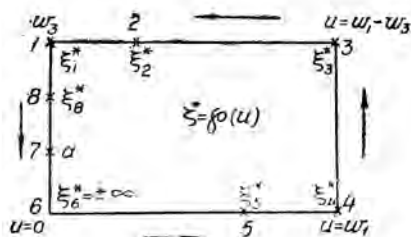
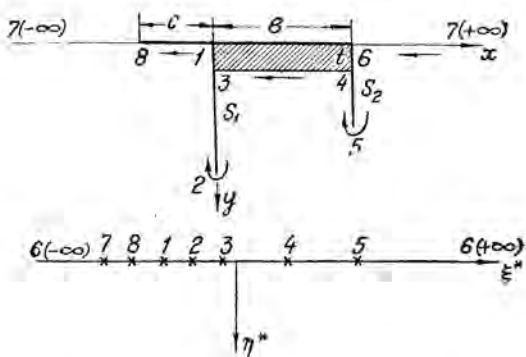


Рис. 2.

и из уравнения (10) получаем

$$b = B - (2n+1)\pi i A^* L D. \quad (11)$$

Точка *з*.  $z = b + it; \quad \zeta^* = \xi_1^*; \quad u = \omega_1$  [ $\omega_1$  — действительный полупериод функции  $\wp(u)$ ]. При  $u = \omega_1$  будет

$$\frac{\sigma(\omega_1 - \alpha)}{\sigma(\omega_1 + \alpha)} = e^{-2\alpha\eta_1},$$

$$[\zeta(\omega_1 + \alpha) + \zeta(\omega_1 - \alpha)] = 2\zeta(\omega_1) = 2\eta_1$$

и уравнение (10) обращается в следующее:

$$b + it = B - A^* L [C\omega_1 - 2\alpha\eta_1 D - 2\eta_1]. \quad (12)$$

Точка 3.  $z=it$ ;  $\zeta^*=\zeta_3^*$ ;  $u=\omega_1-\omega_3$ ; [ $\omega_3$  — мнимый полупериод функции  $\wp(u)$ ]. Для  $u=\omega_1-\omega_3$  имеем

$$\frac{\sigma(\omega_1-\omega_3-\alpha)}{\sigma(\omega_1-\omega_3+\alpha)} = e^{-2\alpha(\eta_1-\eta_3)},$$

$$[\zeta(\omega_1-\omega_3+\alpha)+\zeta(\omega_1-\omega_3-\alpha)] = 2[\zeta(\omega_1)-\zeta(\omega_3)] = 2(\eta_1-\eta_3)$$

и, следовательно, из уравнения (10) находим

$$it = B - A^* \cdot L [C \cdot (\omega_1 - \omega_3) - 2\alpha(\eta_1 - \eta_3) D - 2(\eta_1 - \eta_3)]. \quad (13)$$

Точка 1.  $z=0$ ;  $\zeta^*=\zeta_1^*$ ;  $u=-\omega_3$ .

Так как

$$\frac{\sigma(-\omega_3-\alpha)}{\sigma(-\omega_3+\alpha)} = e^{2\alpha\eta_3},$$

$$[\zeta(-\omega_3+\alpha)+\zeta(-\omega_3-\alpha)] = -2\eta_3,$$

то из уравнения (10) получаем

$$0 = B - A^* \cdot L [-C\omega_3 + 2u\eta_3 \cdot D + 2\eta_3]. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (11), (12), (13), (14) и используя известное соотношение  $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ , определяем искомые константы <sup>1)</sup>

$$B = b, \quad (15)$$

$$D = 0, \quad (16)$$

$$C = 2 \frac{b\eta_1 - it\eta_3}{b\omega_1 - it\omega_3}, \quad (17)$$

$$A^*L = \frac{i}{\pi} (b\omega_1 - it\omega_3). \quad (18)$$

Подставив найденные значения констант в уравнение (10), придаем отображающей функции вид

$$z = b - A^*L \left\{ 2 \frac{b\eta_1 - it\eta_3}{b\omega_1 - it\omega_3} \cdot u - [\zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\alpha)] \right\}. \quad (19)$$

Как мы уже отмечали, для вычислительных целей удобнее перейти к эллиптическим интегралам в форме Лежандра. Для этого воспользуемся известными формулами

$$\zeta(u) = \sqrt{\lambda} \cdot \mathcal{E}(\varphi) - e_1(u) - \frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_3}$$

и

$$\zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\alpha) = 2\zeta(u) + \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(\alpha)},$$

<sup>1)</sup> Отметим, что  $C$  есть величина действительная, а  $A$  — чисто мнимая, так как  $\omega_3$  и  $\eta_3$  величины чисто мнимые.

где  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$  есть корни уравнения  $4\wp'^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 = 0$ ,

$$\lambda = e_1 - e_3,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(u/\bar{\lambda}; k) = \sqrt{\frac{\lambda}{\wp(u) - e_3}}, \quad \text{или } u = \frac{F(\varphi; k)}{\sqrt{\lambda}}.$$

В нашем случае

$$\wp(u) = \zeta^*; \quad \wp(a) = a; \quad e_1 = \xi_4^*; \quad e_2 = \xi_3^*; \quad e_3 = \xi_1^*,$$

$$\wp'^2(u) = 4 \cdot (\zeta^* - \xi_1^*) (\zeta^* - \xi_3^*) (\zeta^* - \xi_4^*),$$

$$\lambda = \xi_1^* - \xi_4^*,$$

$$[\zeta(u+a) + \zeta(u-a)] = 2\sqrt{\lambda} \mathcal{E}(\varphi; k) - 2\xi_4^* \cdot u + \frac{(a - \xi_1^*) \wp'(u)}{(\zeta^* - a)(\zeta^* - \xi_1^*)};$$

и из формулы (19) после очевидных преобразований получаем

$$z = b - 2A^*L \left\{ \left[ \frac{b(\eta_{11} + \xi_4^* \omega_1) - it(\eta_{13} + \xi_4^* \omega_3)}{b\omega_1 - it\omega_3} \right] \cdot \frac{F(\varphi; k)}{\sqrt{\lambda}} - \left[ \sqrt{\lambda} \mathcal{E}(\varphi; k) + \frac{a - \xi_1^*}{\zeta^* - a} \sqrt{\frac{(\zeta^* - \xi_3^*)(\zeta^* - \xi_4^*)}{\zeta^* - \xi_1^*}} \right] \right\}. \quad (20)$$

Далее,

$$\left. \begin{aligned} \eta_{11} &= \sqrt{\lambda} \left\{ E - \frac{e_1}{\lambda} K \right\}; & \eta_{13} &= -i\sqrt{\lambda} \left\{ E' + \frac{e_3}{\lambda} K' \right\}; \\ \omega_1 &= \frac{K}{\sqrt{\lambda}}; & \omega_3 &= \frac{iK'}{\sqrt{\lambda}}; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} b\omega_1 - it\omega_3 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (bK + tK'); \\ \eta_{11} + \xi_4^* \omega_1 &= \sqrt{\lambda} \cdot E; & \eta_{13} + \xi_4^* \omega_3 &= -i\sqrt{\lambda} \{ E' - K' \}. \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Подставив эти значения в формулу (20), вынося за фигурную скобку  $-\sqrt{\lambda}$  и учитывая, что согласно формулам (18) и (21')  $A^* \cdot L \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{i}{r} (bK + tK')$ , придаем отображающей функции вид

$$z = b + \frac{2i(bK + tK')}{\pi} \left\{ [\mathcal{E}(\varphi, k) - G \cdot F(\varphi, k)] + \frac{a - \xi_1^*}{\zeta^* - a} \sqrt{\frac{(\zeta^* - \xi_3^*)(\zeta^* - \xi_4^*)}{(\xi_4^* - \xi_3^*)(\zeta^* - \xi_1^*)}} \right\}, \quad (22)$$

где

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\wp(u) - e_3}} = \sqrt{\frac{\xi_4^* - \xi_1^*}{\zeta^* - \xi_1^*}}; \quad (23)$$

$$k^2 = \frac{\xi_4^* - \xi_2^*}{\xi_4^* - \xi_1^*}, \quad (24)$$

и обозначено

$$G = \frac{bE + t(K' - E')}{bK + tK'}. \quad (25)$$

3. Переход к полуплоскости  $\zeta$ . Функция (22) отображает область двухшпунтового флютбета  $z$  на вспомогательную полуплоскость  $\zeta^*$ . Для удобства вычислений необходимо перейти к стандартной полуплоскости  $\zeta$ , в которой: точкам  $7(z = \infty)$ ,  $1(z = 0)$ ,  $6(z = b)$  области  $z$ , то есть  $\zeta_7^* = a$ ,  $\zeta_1^* = \xi_1^*$ ,  $\zeta_6^* = \infty$  области  $\zeta^*$ , соответствовали бы точки  $\zeta_7 = \infty$ ,  $\zeta_1 = -1$ ,  $\zeta_6 = +1$  области  $\zeta$ .

Этот переход осуществляется следующим дробнолинейным преобразованием:

$$\frac{\zeta^* - a}{\xi_1^* - a} = \frac{2}{1 - \zeta}. \quad (26)$$

Из условия

$$\xi_1^* + \xi_3^* + \xi_4^* = 0 \quad (3)$$

имеем

$$\xi_1^* + a + 2 \frac{\xi_3^* - a}{1 - \xi_3} + a + 2 \frac{\xi_4^* - a}{1 - \xi_4} = 0.$$

Отсюда

$$a = (1 + N) \xi_1^*, \quad (27)$$

где обозначено

$$N = 1 + \frac{3}{2 \left( \frac{1}{1 - \xi_3} + \frac{1}{1 + \xi_4} - 1 \right)} = \frac{3(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)}{2(1 - \xi_3 \xi_4)}.$$

В таком случае

$$\zeta^* - \xi_1^* = -N \cdot \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \cdot \xi_1^*; \quad d\zeta^* = -2N \cdot \xi_1^* \cdot \frac{d\zeta}{(1 - \zeta)^2} \quad (28)$$

и, в частности,

$$\zeta^* - \xi_k^* = 2N \xi_1^* \cdot \frac{\xi_k - \zeta}{(1 - \xi_k)(1 - \zeta)}; \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (28')$$

$$a - \xi_k^* = 2N \xi_1^* \cdot \frac{1}{1 - \xi_k}; \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (29)$$

Найдем теперь отображающую функцию в области  $\zeta$ . При этом для дальнейшего нам нужна будет эта функция также и в интегральной форме.

Подставляя выражения (28), (28'), (29) в формулу (1), после несложных преобразований имеем

$$z = A \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta - \xi_2)(\zeta - \xi_3) d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(\zeta - \xi_3)(\zeta - \xi_4)}} + B, \quad (30)$$

где  $A$  — новая постоянная, связанная со старой постоянной  $A^*$  следующим соотношением:

$$A = - \frac{\sqrt{(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)}}{2(1 - \xi_2)(1 - \xi_5)\sqrt{-N \cdot \xi_1^2}} \cdot A^*.$$

Из формул (7) и (18) вытекает, что

$$A^* = i \frac{b\omega_1 - it\omega_3}{\pi \cdot L} = i \frac{4(a - \xi_1^*)(a - \xi_2^*)(a - \xi_1^*)(b\omega_1 - it\omega_3)}{\pi(a - \xi_2^*)(a - \xi_5^*)}.$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (21'), (27), (29), получаем для константы  $A$  следующее выражение:

$$A = - \frac{2i(bK + tK')}{\pi \sqrt{(1 - \xi_3)(1 + \xi_4)}} = - \frac{2i}{\pi \cdot m} (bK + tK'), \quad (31)$$

где обозначено

$$m^2 = (1 - \xi_3)(1 + \xi_4). \quad (32)$$

Производить интегрирование в формуле (30) нам нет надобности, так как из (22) легко получить функцию, отображающую область непосредственно на полуплоскость  $\zeta$ . Действительно, воспользовавшись формулами (26), (28), (28') (32), находим, что

$$\frac{a - \xi_1^*}{\xi^* - a} \sqrt{\frac{(\xi^* - \xi_2^*)(\xi^* - \xi_1^*)}{(\xi_1^* - \xi_2^*)(\xi^* - \xi_1^*)}} = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \zeta)(\zeta - \xi_3)(\zeta - \xi_4)}{1 + \zeta}}.$$

Подставляя это выражение в (22) и учитывая формулу (31), получаем искомый результат 1):

$$z = b - A \left\{ m [\mathcal{E}(\varphi; k) - G \cdot F(\varphi; k)] + \sqrt{\frac{(1 - \zeta)(\zeta - \xi_3)(\zeta - \xi_4)}{1 + \zeta}} \right\}, \quad (33)$$

где согласно формулам (23), (24),

$$\sin^2 \varphi = \operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \frac{(1 + \xi_4)(1 - \zeta)}{(1 - \xi_4)(1 + \zeta)}; \quad (34)$$

$$k^2 = \frac{(1 + \xi_3)(1 - \xi_4)}{(1 - \xi_3)(1 + \xi_4)}. \quad (35)$$

<sup>1)</sup> Здесь и в дальнейшем берем арифметическое значение корня, меняя знак перед корнем при использовании другой его ветви, как это имеет место, например, в формулах (36); (38).



Формулы (33), (34) непосредственно пригодны только для вычислений на участке  $b-5-4$ , вдоль которого

$$z + iy \quad (0 \leq y \leq s_2); \quad \xi_4 \leq \zeta \leq 1; \quad 0 \leq F(\varphi; k) \leq K.$$

Распространим теперь полученные результаты на остальные участки границы области  $z$ . Для этого воспользуемся обычными формулами преобразования эллиптических функций и интегралов.

Участок  $4-3$ . Здесь  $z = x + it$  ( $0 \leq x \leq b$ ),  $\xi_3 \leq \zeta \leq \xi_4$  и  $F(\varphi, k) = K + i\mu$ ; ( $0 \leq \mu \leq K'$ ). В таком случае

$$\mathcal{E}(K + i\mu) = E + i \left[ \mu + \mathcal{E}(\mu, k') + \frac{k'^2 \operatorname{sn}(\mu, k') \operatorname{cn}(\mu, k')}{\operatorname{dn}(\mu, k')} \right],$$

$$\sqrt{\frac{(1 + \xi_4)(1 - \zeta)}{(1 - \xi_4)(1 + \zeta)}} = \operatorname{sn}(\varphi, k) = \operatorname{sn}(K + i\mu) = \frac{\operatorname{cn}(i\mu, k)}{\operatorname{sn}(i\mu, k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(\mu, k')}. \quad (34')$$

Далее, заменяя  $G, A, m$  их значениями (25), (31), (32) и применяя известное соотношение  $EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$ , легко проверить, что

$$-A \cdot m [E - G \cdot K] = it.$$

Воспользовавшись этими результатами и определив предварительно из соотношения (34')  $\operatorname{sn}(\mu, k') = \sqrt{1 - k'^2 \operatorname{dn}^2(\mu, k')}$  и  $\operatorname{cn}(\mu, k') = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\mu, k')}$ , после несложных преобразований придаем формуле (33) вид

$$z = b + it - iA \left\{ m [\mathcal{E}(\psi, k') - (1 - G)F(\psi, k')] - \sqrt{\frac{(1 - \zeta)(\xi_4 - \zeta)(\zeta - \xi_3)}{1 + \zeta}} \right\}, \quad (36)$$

где

$$\sin \psi = \operatorname{sn}(\mu, k') = \sqrt{\frac{(\xi_4 - \zeta)(1 - \xi_3)}{(1 - \zeta)(\xi_4 - \xi_3)}}; \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{2(\xi_4 - \xi_3)}{(1 - \xi_3)(1 + \xi_4)}$$

Участок  $3-2-1$ .  $z = iy$  ( $0 \leq y \leq s_1$ ),  $-1 \leq \zeta \leq \xi_3$  и  $F(\varphi, k) = \nu + iK'$  ( $0 \leq \nu \leq K$ ).

Следовательно, на этом участке

$$\mathcal{E}(\varphi, k) = \mathcal{E}(\nu + iK') = \mathcal{E}(\nu, k) + \frac{\operatorname{dn}(\nu, k) \cdot \operatorname{cn}(\nu, k)}{\operatorname{sn}(\nu, k)} + i(K' - E'),$$

$$\sqrt{\frac{(1 + \xi_4)(1 - \zeta)}{(1 - \xi_4)(1 + \zeta)}} = \operatorname{sn}(\varphi, k) = \operatorname{sn}(\nu + iK') = \frac{1}{k \cdot \operatorname{sn}(\nu, k)}.$$

Убедившись теперь, что

$$-Am[E' - (1 - G)K'] = ib,$$

после простых переделок, получаем

$$z = -A \left\{ m [\mathcal{E}(\varphi, k) - GF(\varphi, k)] + \sqrt{\frac{(1 + \zeta)(\xi_4 - \zeta)(\xi_3 - \zeta)}{1 - \zeta}} \right\}, \quad (37)$$

где

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(\nu, k) = \sqrt{\frac{(1 - \xi_3)(1 + \zeta)}{(1 + \xi_3)(1 - \zeta)}}.$$

Участок  $1-8-7(-\infty) -7(+\infty)-6$ . Вдоль линий верхнего и нижнего бьефов имеем:  $z=x$  ( $-\infty \leq x \leq 0$  и  $b \leq x \leq +\infty$ ),  $-\infty \leq \zeta \leq -1$  и  $+1 \leq \zeta \leq \infty$ ;  $F(q, k) = i\mu$  ( $0 \leq \mu \leq K'$ ).

Тогда

$$\mathcal{E}(i\mu, k) = i \left\{ \mu + \frac{\operatorname{dn}(\mu, k') \operatorname{sn}(\mu, k')}{\operatorname{cn}(\mu, k')} - \mathcal{E}(\mu, k') \right\},$$

$$\sqrt{\frac{(1+\xi_4)(1-\zeta)}{(1-\xi_4)(1+\zeta)}} = \operatorname{sn}(q, k) = \operatorname{sn}(i\mu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(\mu, k')}{\operatorname{cn}(\mu, k')},$$

и формула (33) обращается в следующую:

$$z = b - iA \left\{ m [\mathcal{E}(\psi, k') - (1-G)F(\psi, k')] \pm \sqrt{\frac{(s^2-1)(\zeta-\xi_3)}{\zeta-\xi_4}} \right\}$$

(корень берем со знаком  $+$  при  $\operatorname{Re} z \leq 0$  и со знаком  $-$  при  $\operatorname{Re} z \geq b$ ), где

$$\sin \psi = \operatorname{sn}(\mu, k') = \sqrt{\frac{(1+\xi_4)(1-\zeta)}{2(\xi_4-\zeta)}}; \quad k' = \frac{\sqrt{2(\xi_4-\xi_3)}}{m}.$$
(38)

4. Определение констант отображения. В области  $\zeta$  всего имеется шесть констант отображения, подлежащих определению:  $A, B, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ . Из соответствия точек  $1, 3, 4, 6$  мы уже определили константы  $A, B=b$  и получили два уравнения (16) и (17), связывающие в конечном итоге величины  $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ .

Недостающие два уравнения получим из соответствия точек  $2$  и  $5$ .

Точка  $2$ . Здесь  $z = i(s_1+t)$ ;  $\zeta = \xi_2$  и формула (37), выведенная для участка  $3-2-1$ , дает

$$s_1+t = iA \left\{ m [\mathcal{E}(\varphi_2) - GF(\varphi_2)] + \sqrt{\frac{(1+\xi_2)(\xi_3-\xi_2)(\xi_4-\xi_2)}{1-\xi_2}} \right\},$$

где

$$\sin^2 \varphi_2 = \frac{(1-\xi_3)(1+\xi_2)}{(1+\xi_2)(1-\xi_1)}.$$
(39)

Точка  $5$ . Для этой точки:  $z = b + i(s_2+t)$ ,  $\zeta = \xi_5$  и из формул (33) и (34) получаем

$$s_2+t = iA \left\{ m [\mathcal{E}(\varphi_5) - G \cdot F(\varphi_5)] + \sqrt{\frac{(1-\xi_5)(\xi_3-\xi_5)(\xi_5-\xi_4)}{1+\xi_5}} \right\},$$

где

$$\sin^2 \varphi_5 = \frac{(1+\xi_4)(1-\xi_5)}{(1-\xi_4)(1+\xi_5)}.$$
(40)

Преобразуем теперь уравнения (16) и (17).

Заменяя в уравнении

$$D \equiv 0 \quad (16)$$

$D$  его значением [формулы (7), (8)], имеем (так как  $L \neq 0$ ):

$$(a - \xi_2^*) + (a - \xi_5^*) = (a - \xi_1^*) (a - \xi_3^*) \frac{\mathfrak{P}''(a)}{\mathfrak{P}'^2(a)}. \quad (16')$$

Но

$$\mathfrak{P}'^2(a) = 4(a - \xi_1^*) (a - \xi_3^*) (a - \xi_4^*)$$

и

$$\mathfrak{P}''(a) = 2[(a - \xi_1^*) (a - \xi_3^*) + (a - \xi_1^*) (a - \xi_4^*) + (a - \xi_3^*) (a - \xi_4^*)],$$

так что уравнению (16') можем придать вид

$$\frac{1}{a - \xi_2^*} + \frac{1}{a - \xi_5^*} = 2 \left[ \frac{1}{a - \xi_1^*} + \frac{1}{a - \xi_3^*} + \frac{1}{a - \xi_4^*} \right], \quad (16'')$$

Воспользовавшись формулой (29), после сокращения на  $\frac{1}{N \cdot \xi_1^*}$  и приведения подобных членов, находим соотношение

$$2(\xi_2 + \xi_5) \equiv \xi_3 + \xi_4. \quad (41)$$

Это соотношение выполняется тождественно для любого двухшпунтового флютбета (при бесконечном по глубине водонепроницаемом грунте), не исключая и одношпунтового тонкого флютбета, для которого  $s_2 = 0$ ,  $t = 0$ ,  $\xi_4 = \xi_5 = 1$ .

Переходим теперь к уравнению (17). Внося сюда вместо  $L$ ,  $C$  их значения [формулы (7), (9)] и учитывая, что  $D \equiv 0$ , имеем

$$C = \frac{\mathfrak{P}'^2(a)}{(a - \xi_1^*) (a - \xi_2^*)} - 2\mathfrak{P}(a) = 2 \frac{b\eta_1 - it\eta_3}{b\omega_1 - it\omega_3}.$$

Заменяя  $\mathfrak{P}'^2(a) = 4(a - \xi_1^*) (a - \xi_3^*) (a - \xi_4^*)$ ;  $\mathfrak{P}(a) = a$  и воспользовавшись формулами (21), (21'), имеем

$$\begin{aligned} \frac{2(a - \xi_1^*) (a - \xi_3^*) (a - \xi_4^*)}{(a - \xi_2^*) (a - \xi_5^*)} - a &= \frac{b(\lambda E - \xi_1^* K) + i^2 t(\lambda E' + \xi_1^* K')}{bK + tK'} = \\ &= \frac{\lambda(bE - tE') - b\xi_1^* K - t(\xi_1^* - \lambda) K'}{bK + tK'} = \\ &= \frac{\lambda[bE + t(K' - E') - \xi_1^* (bK + tK')]}{bK + tK'} = \lambda G - \xi_1^*, \end{aligned} \quad (17')$$

где  $\lambda = \xi_4^* - \xi_1^*$  и постоянная  $G$  определена равенством (25).

Переходя теперь по формулам (27), (28'), (29) к переменным  $\xi$  (предварительно перенеся  $a$  в правую часть), находим

$$\frac{(2N\xi_1^*) (1 - \xi_2) (1 - \xi_5)}{(1 - \xi_3) (1 - \xi_4)} = -N\xi_1^* \cdot \frac{1 + \xi_4}{1 - \xi_4} \cdot G + 2N\xi_1^* \cdot \frac{1}{1 - \xi_1}.$$

Сократив на  $\frac{N\xi_4^2}{1-\xi_4}$  и воспользовавшись тождеством  $2(\xi_2 + \xi_6) \equiv \xi_2 + \xi_4$ , после несложных преобразований, придаем этому равенству вид

$$-2\xi_2\xi_6 = m^2 G + \xi_3 - \xi_4, \quad (42)$$

где согласно ранее принятым обозначениям

$$m^2 = (1 - \xi_2)(1 + \xi_4); \quad G = \frac{bE + t(K' - E')}{bK + tK'}; \quad k^2 = \frac{(1 + \xi_2)(1 - \xi_4)}{(1 - \xi_3)(1 + \xi_4)}.$$

Итак, для определения четырех констант  $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6$  имеем систему четырех уравнений (39), (40), (41), (42).

Решаем эту систему путем подбора. Задавшись величинами  $\xi_3$  и  $\xi_4$  (практически удобнее задавать  $k$  и  $\xi_1$ ), определяем, воспользовавшись уравнениями (41), (42),  $\xi_2$  и  $\xi_6$  как корни квадратного уравнения

$$\xi_2 = p - \sqrt{p^2 + q}; \quad \xi_6 = p + \sqrt{p^2 + q}, \quad (43)$$

где

$$p = \frac{\xi_3 + \xi_4}{4}; \quad q = \frac{m^2 G + \xi_3 - \xi_4}{2} = f(\xi_3; \xi_4). \quad (44)$$

После этого уравнения (39), (40) дают размеры флютбета, соответствующие данным  $\xi_3, \xi_4$ .

Отметим одну особенность полученных уравнений. Уравнения (39), (40), учитывая, что в состав константы  $A$  входит длина флютбета  $b$ , однородны относительно величин  $b; t; s_1; s_2$ , т. е. эти уравнения размеры флютбета определяют только с точностью до масштабного множителя. В соответствии с этим, величина  $\xi_1'$  [см. условия (2), (3)] осталась произвольной, так как при переходе в область  $\zeta$  величина  $\xi_1'$  всюду исключалась.

Это позволяет все решение проводить в безразмерных величинах. При этом в качестве единицы обычно принимают длину флютбета  $b$  или длину шпунта  $s_1$ .

Практически при фильтрационных расчетах величиною  $t$ , как мало влияющей на окончательные результаты, часто пренебрегают, рассматривая флютбет как бесконечно тонкий ( $t=0$ ).

При этом предположении все выведенные формулы сохраняют свой прежний вид, но постоянные  $A$  и  $G$  принимают следующие значения:

$$A = -\frac{2ibK}{\pi \cdot m}, \quad (45)$$

$$G = \frac{E}{K}. \quad (46)$$

На рис. 3 приведена для этого случая номограмма, позволяющая по заданным  $\xi_3$  и  $\xi_4$  определять  $\frac{b}{s_1}$  и  $\frac{s_2}{s_1}$  (здесь  $s_1$  обозначает большой шпунт, и в качестве основного размера принято  $s_1=1$ ).

Номограмма построена на основании вычислений, проведенных с четырьмя знаками точности.

В системе прямоугольных координат  $\xi_4; \xi_3$  построена сетка линий  $s_2 = \text{const}$  и  $b = \text{const}$  ( $s_1=1$ ). Линии  $s_2 = \text{const}$  все выходят из точки  $A$  и оканчиваются на прямой  $OB$ .

При этом двухшпунтовому симметричному флотбету ( $s_2=1$ ) соответствует прямая  $AO$ , а флотбету одношпунтовому — прямая  $AB$ .

Кривые, соединяющие точки прямых  $AO$  и  $AB$ , есть линии  $b = \text{const}$ . В частности, точка  $A$  соответствует  $b = \infty$ , а линией  $b=0$  является прямая  $OB$ .

Пользуясь номограммой, легко произвести фильтрационный расчет двухшпунтового флотбета в случае  $t=0$ .

Для этого ищем точку пересечения линий  $s_2 = \text{const}$  и  $b = \text{const}$  для заданных нам значений  $s_2$  и  $b$ , после чего на координатных осях читаем соответствующие  $\xi_4, \xi_3$ .

По формулам (32), (35), (43)—(46) оканчиваем расчет. Поясним сказанное примером.

Пусть требуется найти константы отображения  $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ , для двухшпунтового флотбета, со следующими размерами:  $s_1=1$ ;  $b=1$ ;  $s_2=0,50$ ;  $t=0$ .

По номограмме для точки пересечений линий  $s_2=0,50$  в  $b=1,0$  находим  $\xi_4=0,474$ ,  $\xi_3=0,350$ .

По этим данным вычисляем  $k^2=0,741$ ;  $G=0,568$ ;  $m^2=0,958$  и тогда по формулам (43), (44)  $\xi_2=-0,297$ ,  $\xi_5=0,709$ .

5. Определение констант  $\gamma$ . Константы  $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$  определяются полностью величинами  $b, s_1, s_2, t$  и не зависят от длины понура  $c$ . Вычисление этих констант и составляет наиболее трудоемкую часть задачи. Но для полного решения необходимо еще определить константу  $\gamma$  — образ точки  $\delta$  (начало понура) в области  $\zeta$  (рис. 4).

Точка  $\delta$  является точкой верхнего бьефа и поэтому величину  $\gamma$  определяем из уравнения (38), которое для удобства вычислений представим в несколько измененном виде:

$$\frac{z-b}{+iA} = -m[\mathcal{E}(\psi, k') - (1-G)F(\psi, k')] \mp \sqrt{\frac{(\zeta^2-1)(\xi_3-\zeta)}{\xi_4-\zeta}}, \quad (38')$$

где

$$\sin^2 \psi = \frac{(1+\xi_4)(1-\zeta)}{2(\xi_4-\zeta)}; \quad k'^2 = 1-k^2.$$

Все постоянные величины, входящие в это уравнение, известны, так что остается путем подбора найти  $\zeta = \gamma$  ( $\gamma \leq -1$ ), при котором  $z = -c$ .

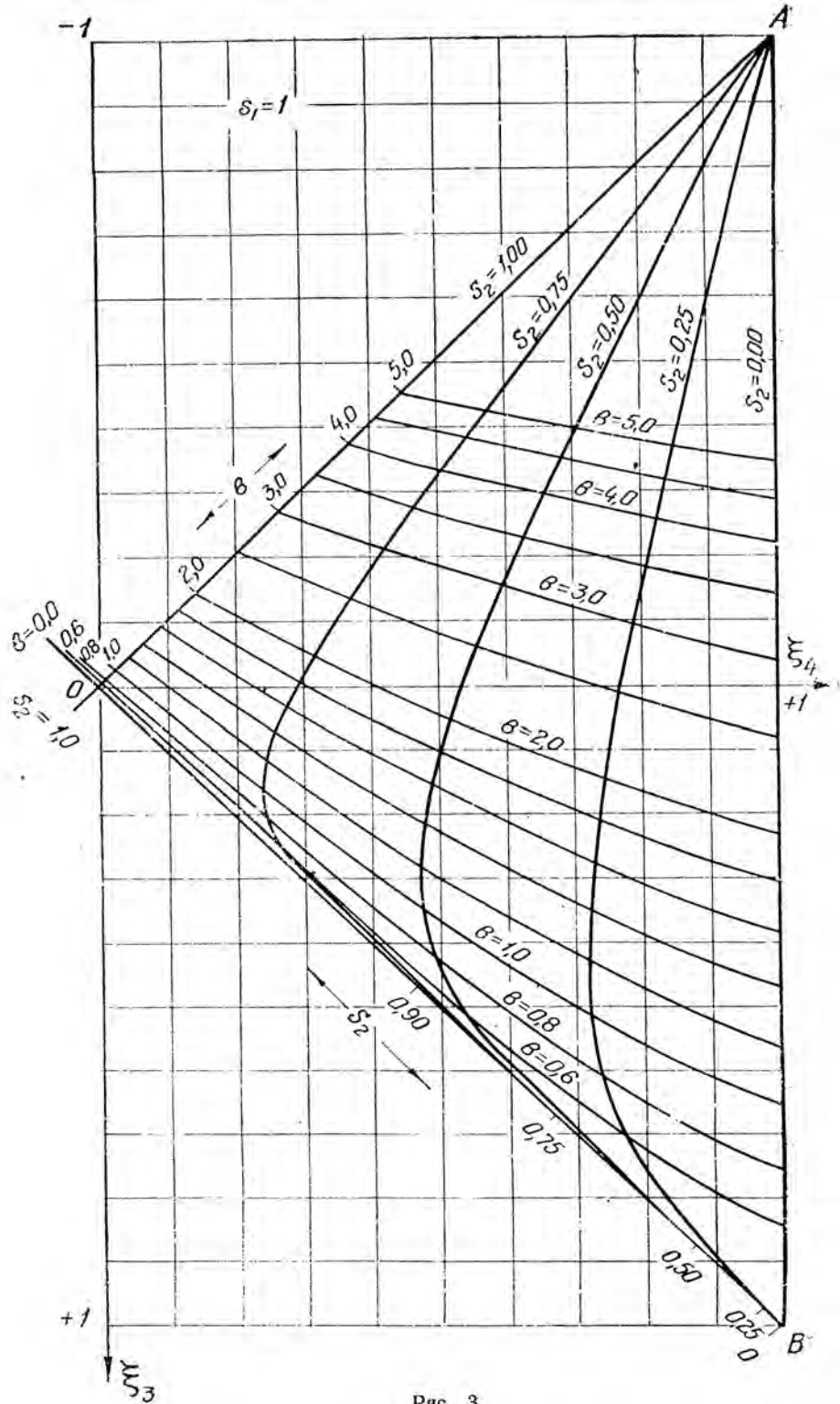


Рис. 3.

При этом удобнее вычислить предварительно искомую величину  $\left. \frac{z-b}{iA} \right|_{z=\zeta}$ , затем, задаваясь углом  $\psi$ , определять по формуле (38') соответствующие  $\xi$  и  $\frac{z-b}{iA}$ .

Для облегчения вычислений следует заметить, что точке  $\gamma(z = \pm \infty; \zeta = \pm \infty)$  соответствует  $\sin^2 \psi_\gamma = \frac{1 + \xi_4}{2}$  и что в уравнении (38') главным членом является радикал, так что первое приближение для  $\gamma$  можно определять из уравнения  $\frac{z-b}{-iA} \approx + \sqrt{\frac{(\zeta^2-1)(\xi_3-\zeta)}{\xi_4-\zeta}}$ .

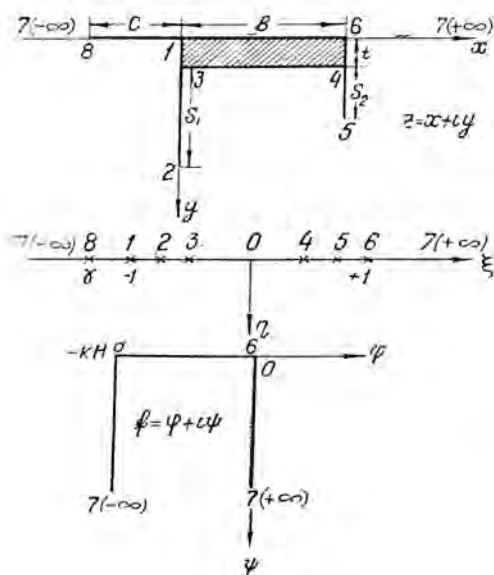


Рис. 4.

полулоосу (рис. 4). Для удобства последующих вычислений это отображение нормируем так, чтобы точки 8 и 6 перешли в точки действительной оси  $\varphi_8 = -k_\phi \cdot H$  и  $\varphi_6 = 0$ , где  $k_\phi$  — коэффициент фильтрации,  $H$  — действующий напор, равный разности напоров в верхнем и нижнем бьефах.

При отсутствии понура ( $c = 0$ ), точка 8 совпадает с точкой 1 и, следовательно,  $\gamma = -1$ .

6. Определение противодействия и скорости фильтрации. Итак, мы отобразили область двухшпунтового флютбета  $z = x + iy$  на вспомогательную полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ . При этом контур флютбета перешел в отрезок действительной оси  $\xi$  и его концам (то есть точкам 8 и 6) соответствуют точки  $\xi_8 = \gamma \leq -1$  и  $\xi_6 = +1$ . Для завершения решения необходимо теперь вспомогательную полуплоскость  $\zeta$  отобразить на область модели<sup>1)</sup>  $f = \varphi + i\psi$ , представляющую в случае бесконечной глубины ( $T = \infty$ ) по-

<sup>1)</sup> Буквами  $\varphi$  и  $\psi$ , по установившейся традиции, обозначают как потенциальную функцию и функцию тока, так и амплитуду эллиптических интегралов. Так как здесь это не приносит ущерба пониманию, то мы и оставляем эти обозначения без изменений.

Требуемое отображение осуществляется функцией

$$f = \varphi + i\psi = -\frac{k_\phi \cdot H}{\pi} \cdot \arccos \left[ \frac{2}{1-\gamma} (\zeta-1) + 1 \right] \quad (47)$$

и противодействие  $h = -k_\phi \varphi$  вдоль контура флютбета будет определяться формулой

$$h = \frac{H}{\pi} \cdot \arccos \left[ \frac{2}{1-\gamma} (\xi-1) + 1 \right], \quad (48)$$

$$(\gamma \leq \xi \leq 1; \gamma \leq -1).$$

Таким образом, для каждого значения  $\zeta = \xi$  ( $\gamma \leq \xi \leq 1$ ) по одной из формул (33), (36), (37) можем найти соответствующее  $z = x + iy$ , т. е. координаты точки в области флютбета, а по формуле (48) — противодействие в этой точке.

Скорость фильтрации в любой точке области движения определяем, как обычно, из комплексной сопряженной скорости:

$$v_x - iv_y = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}.$$

Дифференцируя уравнения (47) и (30), имеем:

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{k_\phi \cdot H}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \left[ \frac{2}{1-\gamma} (\zeta-1) + 1 \right]^2}} = \frac{k_\phi \cdot H}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-\gamma)}};$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -A \frac{(\zeta-\xi_2)(\zeta-\xi_3)}{\sqrt{(1-\zeta^2)(\zeta-\xi_3)(\zeta-\xi_4)}},$$

после чего

$$v_x - iv_y = -\frac{k_\phi \cdot H}{\pi A} \cdot \frac{\sqrt{(1+\zeta)(\zeta-\xi_3)(\zeta-\xi_4)}}{(\zeta-\xi_2)(\zeta-\xi_3) \cdot \sqrt{(\zeta-\gamma)}}, \quad (49)$$

где постоянная  $A$  определена формулой (31).

В частности, для точки выхода (точка  $b$ ), где  $\zeta = +1$ , формула (49) упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases} v_x = 0, \\ v_y = \frac{k_\phi \cdot H}{i\pi A} \cdot \frac{\sqrt{2(1-\xi_3)(1-\xi_4)}}{(1-\xi_2)(1-\xi_3)\sqrt{1-\gamma}} = \frac{k_\phi \cdot H \cdot (1-\xi_3) \sqrt{(1-\xi_4)}}{(bK + tK')(1-\xi_2)(1-\xi_3)\sqrt{2(1-\gamma)}}. \end{cases} \quad (50)$$

Формулы (47)—(50) также принимают более простой вид в случае флютбета без понура, для которого  $\gamma = -1$ .



7. Симметричный двухшпунтовый флютбет,  $s_1 = s_2 = s$

Из условий симметрии имеем

$$-\xi_2 = \xi_3 = \sigma; \quad -\xi_1 = \xi_4 = \alpha.$$

Отображающая функция (33) принимает вид

$$z = b - A \left\{ (1 + \alpha) [\mathcal{E}(\varphi, k) - G \cdot F(\varphi, k)] + \sqrt{\frac{(1 - \zeta)(\zeta^2 - \alpha^2)}{1 + \zeta}} \right\}, \quad (51)$$

где

$$m = 1 + \alpha; \quad A = \frac{-2i(bK + iK')}{\pi(1 + \alpha)}; \quad G = \frac{bE + i(K' - E')}{bK + iK'};$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1 + \alpha)(1 - \zeta)}{(1 - \alpha)(1 + \zeta)} \quad (52)$$

и модуль эллиптических интегралов

$$k = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (53)$$

Система уравнений (39), (40), (41), (42) для определения констант отображения, существенно упрощается и переходит в систему двух уравнений:

$$\sigma^2 = (1 + \alpha)^2 G - 2\alpha, \quad (54)$$

$$s + t = iA \left\{ (1 + \alpha) [\mathcal{E}(\varphi) - G \cdot F(\varphi)] + \sqrt{\frac{(1 - \sigma)(\sigma^2 - \alpha^2)}{1 + \sigma}} \right\}, \quad (55)$$

где

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1 + \alpha)(1 - \sigma)}{(1 - \alpha)(1 + \sigma)}; \quad k = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Все остальные расчетные формулы также упрощаются, на чем, однако, мы останавливаться не будем.

Из данного решения легко получить известное решение акад. Н. Н. Павловского для двухшпунтового симметричного флютбета. Для этого надо только от модуля  $k = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$  перейти к модулю  $k = \alpha$ , который фигурирует в формулах акад. Н. Н. Павловского, положить в наших формулах  $b = 2$  (так как в качестве основного размера акад. Пав-

ловский принял длину полуфлютбета) и ось  $ou$  провести через точку с абсциссой  $x = +\frac{b}{2} = 1$ .

Для вычислительных целей, однако, наши формулы удобнее, так как модуль  $k = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$  значительно меньше модуля  $k=\alpha$ .

---

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акад. М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, М.—Л. (1946).
2. Акад. Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, Л. (1922).

Поступило 18. VII 1950 г.

---