Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных диференциальных уравнений

Я. Б. Лопатинский

В настоящей работе доказывается существование фундаментальной системы решений эллиптической системы линейных диференциальных уравнений. Для случая двух аргументов эта теорема доказана Э. Э. Леви [1]. Для частного вида систем уравнений с тремя аргументами фундаментальные решения построены З. Я. Шапиро [2].

1. Здесь будет изложено определение фундаментальной системы решений.

Будет рассматриваться система вида

$$\sum_{l=1}^{p} A_{kl} u_l = f_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p); \tag{1.1}$$

$A_{kl} = \sum\limits_{j_1 \cdots j_n} f_{kl}^{j_1 \cdots j_n} \dfrac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$ (сумма конечна); f_k суть непрерывные, $f_{kl}^{j_1 \cdots j_n}$ — непрерывно диференцируемые $j_1 + \ldots + j_n$ раз комплексные функции действительных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области D; $k, l = 1, \ldots, p$.

Порядок оператора A_{kl} будет обозначаться через s_{kl}.

Оператор A'_{kl}, определяемый формулой

$$A'_{kl} u = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{j_1+\cdots+j_n} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} (f_{kl}^{j_1 \cdots j_n} u)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}, \tag{1.2}$$

называется, как известно, сопряженным оператору A_{kl}.

Известно, далее, что если A, B два оператора описанного типа и AB есть оператор также этого типа, то

$$A'' = A, \quad (A+B)' = A' + B', \quad (AB)' = B'A'.$$

Оператор A_{kl} определяет (не однозначно) систему диференциальных билинейных форм $B^j(u, v)$ ($j = 1, \ldots, n$) с непрерывно диференцируемыми коэфициентами порядка $s_{kl} - 1$ по каждому неопределенному u, v, удовлетворяющих соотношению

$$v A_{kl} u - u A'_{kl} v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} B_{kl}^j(u, v). \tag{1.3}$$

Матрица

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{11}\cdots\cdots\varphi_{1p}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{p1}\cdots\cdots\varphi_{pp}\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

составленная из функций $\varphi_{kl}=\varphi_{kl}(x, y)$ $(k, l=1,\ldots, p)$ точки $x=(x_1,\ldots, x_n)$, непрерывно диференцируемых $\max\limits_{l} s_{kl}$ раз соответственно всюду в D, кроме точки $y=(y_1,\ldots, y_n)\in D$, будет называться фундаментальной для матрицы

$$A'=\begin{pmatrix}A'_{11}\cdots\cdots A'_{p1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A'_{1p}\cdots\cdots A'_{pp}\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

в точке y, если

1) при $x\in D$, $x\neq y$,

$$\sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\varphi_{jl}=0 \qquad (k, l=1,\ldots, p); \tag{1.6}$$

2) для всякой системы функций u_k $(k=1,\ldots, p)$, непрерывно диференцируемых в некоторой окрестности V точки y соответственно $\max\limits_{l} s_{kl}$ раз, имеют место соотношения

$$u_k(y)=-\lim_{\varrho\to 0}\int\ldots(n-1)\ldots\int_{S_\varrho}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\varrho}\sum_{l,\,m=1}^{p} B^j_{lm}(u_m, \varphi_{kl})\,dS \tag{1.7}$$
$$(k=1,\ldots, p).$$

Здесь S_ϱ — сфера с центром в точке y и радиусом ϱ.

Из формулы (1.6) следует, что столбцы матрицы (4) представляют решения (при $x\neq y$) однородной системы уравнений, сопряженной системе (1); совокупность таких решений обычно называется фундаментальной.

Тогда, если допустимая[1] область D' с границей S' обладает свойствами $D'\cup S'\subset V\cap D$, $y\in D'$, имеет место известное представление

$$u_k(y)=\int\ldots(n-1)\ldots\int_{S'}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l,\,m=1}^{p}(-1)^j B^j_{lm}(u_m, \varphi_{lk})\frac{dx_1\ldots dx_n}{dx_j}+ \\ +\int\ldots(n-1)\ldots\int_{D'}\sum_{l,\,m=1}^{p}\varphi_{lk}A_{lm}u_m\,dx_1\ldots dx_n. \tag{1.8}$$

Здесь D' ориентируется естественным расположением координат $x_1,\ldots, x_n$, границе S' области D' приписывается индуцированная ориентация; $dx_1\ldots dx_n$, $\dfrac{dx_1\ldots dx_n}{dx_j}$ (выражение, полученное из $dx_1\ldots dx_n$ вычеркиванием dx_j) рассматриваются как внешние формы.

[1]) См. П. К. Рашевский [3], § 18

Если формула (1,7) справедлива при одном выборе билинейных форм B_{kl}^{j} ($j=1,\ldots, n$; $k, l=1,\ldots, p$), то, как легко видеть, формулы (1.7), (1.8) оказываются справедливыми при любом допустимом выборе этих форм.

Следующая лемма уточняет возможность выбора билинейных форм.

Лемма 1. *Пусть A есть линейный диференциальный оператор порядка s*

$$A=\sum_{j_1\cdots j_n} f^{j_1\cdots j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}};$$

$f^{j_1\ldots j_n}$ — функция $x_1,\ldots,x_n$, непрерывно диференцируемая $j_1+\ldots+j_n$ раз; пусть

$$\beta^{j}=\sum_{j_1\cdots j_n} b^{jj_1\cdots j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}\qquad (j=1,\ldots,n)$$

суть линейные диференциальные операторы, коэфициенты которых $b^{jj_1\ldots j_n}$ непрерывно диференцируемы соответственно $1+j_1+\ldots+j_n$ раз, удовлетворяющие условию

$$f^{0\ldots0}-A'=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\beta^{j}. \tag{1.9}$$

Тогда существует система билинейных функционалов вида

$$B^{j}(u,v)=\sum_{j_1\cdots j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}\beta^{jj_1\ldots j_n}v\qquad (j=1,\ldots,n),$$

где

$$\beta^{jj_1\ldots j_n}$$

суть линейные диференциальные операторы с непрерывно диференцируемыми коэфициентами, удовлетворяющие условиям

$$vAu-uA'v=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}B^{j}(u,v),\qquad \beta^{j0\ldots0}=\beta^{j}.$$

При этом, если порядок β^{j} ($j=1,\ldots, n$) равен $s-1$, то порядок $\beta^{jj_1\ldots j_n}$ ($j_1+\ldots+j_n>0$) можно полагать не большим $s-1-j_1-\ldots-j_n$.

Доказательство. Из (1.9) следует

$$f^{0\ldots0}-A=-\sum_{j=1}^{n}(\beta^{j})'\frac{\partial}{\partial x_j}$$

и далее

$$vAu-uA'v=\sum_{j=1}^{n}\left\{v(\beta^{j})'\frac{\partial u}{\partial x_j}+u\frac{\partial}{\partial x_j}\beta^{j}v\right\}.$$

Пусть

$$C^{jk}(u, v) = \sum_{j_1 \dots j_n} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n} u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \gamma^{jkj_1 \dots j_n} v$$

суть билинейные формы, удовлетворяющие условию

$$v\beta^j u - u(\beta^j)' v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} C^{jk}(u, v).$$

Очевидно, можно полагать порядок $\gamma^{jkj_1 \dots j_n}$ равным $s_j - 1 - j_1 - \dots - j_n$ (s_j — порядок β^j).

Тогда

$$vAu - uA'v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u\beta^j v - \sum_{k=1}^{n} C^{kj}\left(v, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \right]$$

и можно положить

$$B^j(u, v) = u\beta^j v - \sum_{k=1}^{n} C^{kj}\left(v, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right),$$

откуда легко следуют все утверждения леммы.

В частности, если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть форма степени s и

$$A = f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

можно положить

$$\beta^j = \frac{1}{s} f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

где

$$f_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

2. Здесь будет указана фундаментальная функция $\varphi(x, y)$ в точке y для оператора $A' = f\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, где $f(\alpha) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть форма степени s, обладающая свойством: уравнение $f(\alpha) = 0$ имеет единственное действительное решение — нулевое.

Далее используются следующие обозначения: если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$; λ, μ, x_k, y_k $(k = 1, \dots, n)$—комплексные числа, то $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$, $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$, $|x| = +\sqrt{(x, \bar{x})}$.

Прежде всего будет доказана

Лемма 2. *Пусть* $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\xi_k = \beta x_k + \tau_k$ $(k = 1, \dots, n)$. *Тогда, если* β *пробегает множество всех корней уравнения* $f(\xi) = 0$, в то время как x, τ пробегают действительное пространство, при условиях $x \neq 0$, $\tau \neq 0$, $(x, \tau)=0$,

$$\sigma = \inf \frac{2\dfrac{|x|}{|\tau|}|\operatorname{Im}\beta|}{1+\dfrac{|x|^2}{|\tau|^2}|\beta|^2} > 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Совершая замену $x_k = |x| x'_k$, $\tau_k = |\tau| \tau'_k$, $\beta = \dfrac{|\tau|}{|x|}\beta'$, приходят к доказательству соотношения (2.1) при дополнительном предположении $|x| = 1$, $|\tau| = 1$. На действительной сфере $|x| = 1$, очевидно, $\inf |f(x)| > 0$. Так как $f(\xi) = f(x)\beta^s + \ldots$ (пропущены члены, содержащие β в степени, меньшей s), то $\sup |\beta| = \mu < \infty$. Пусть теперь $\sigma = 0$.

Тогда существуют такие последовательности действительных точек $x^{(m)}$, $\tau^{(m)}$ $(m=1, 2, \ldots)$ и им соответствующих корней $\beta^{(m)}$ $(m=1, 2\ldots)$ уравнения $f(\xi)=0$, что $|x^{(m)}| = 1$, $|\tau^{(m)}| = 1$, $(x^{(m)}, \tau^{(m)}) = 0$, $\dfrac{\operatorname{Im}\beta^{(m)}}{|\beta^{(m)}|^2+1} \to 0$. Последовательности $\{x^{(m)}\}$, $\{\tau^{(m)}\}$ и, так как $|\beta^{(m)}| \leqslant \mu$, также последовательность $\{\beta^{(m)}\}$ можно считать сходящимися соответственно к пределам $x^{(0)}$, $\tau^{(0)}$, $\beta^{(0)}$; тогда $|x^{(0)}| = 1$, $|\tau^{(0)}| = 1$, $(x^{(0)}, \tau^{(0)}) = 0$, $\operatorname{Im}\beta^{(0)} = 0$, $f(\beta^{(0)}x^{(0)} + \tau^{(0)}) = 0$. Но из последнего соотношения следует $\beta^{(0)}x^{(0)} + \tau^{(0)} = 0$ и тогда $|\tau^{(0)}| = 0$, что приводит к противоречию. Итак, $\sigma > 0$, что и требовалось доказать.

Очевидно, $\sigma \leqslant 1$.

В следующих параграфах будет доказана теорема 1. Фундаментальная функция $\varphi(x, y)$ в (действительной) точке y оператора $A = f\left(-\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ существует при действительных $x \neq y$ и определяется формулами

$$\varphi(x, y) = \varphi(x-y, 0), \tag{2.2}$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \underset{s(x)}{\ldots (n) \ldots} \int \frac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{2.3}$$

$$\Phi(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{C_{n,s}}{2(s-n)!}(x, \bar{\alpha})^{s-n} \lg\left[-\dfrac{(x, \bar{\alpha})^2}{(\alpha, \bar{\alpha})}\right] & (s \geqslant n), \\ (-1)^{n-s-1}\,(n-s-1)!\; C_{n,s}\,(x, \bar{\alpha})^{s-n} & (s < n), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$C_{n,s} = \frac{(-1)^{s-1}}{2\pi i}. \tag{2.5}$$

Формулы (2.3) и (2.4) нуждаются в пояснениях.

Пусть $x \neq 0$, ε — произвольно выбранное положительное число, меньшее $\dfrac{\sigma}{4|x|}$ (определено формулой (2.1)). Пусть L — прямая

$z=t+\varepsilon i$, ориентированная в направлении возрастания t; C — единичная окружность в комплексной плоскости, ориентированная положительно. $T(x)$ есть поверхность в n-мерном действительном пространстве T точек $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$, определенная уравнениями $(x,\tau)=0$, $(\tau,\tau)=1$, ориентированная следующим образом: T ориентировано расположением координат $\tau_1,\dots,\tau_n$; полупространство, определенное условием $(x,\tau)<0$, ориентировано согласованно; его граница T_1, плоскость $(x,\tau)=0$, имеет индуцированную ориентацию; шар в этой плоскости, определенный условиями $(x,\tau)=0$, $(\tau,\tau)<1$, ориентирован согласованно; его граница в плоскости $(x,\tau)=0$, $-T(x)$ — имеет индуцированную ориентацию.

Тогда $S(x)=S_\varepsilon(x)$ определяется формулами

$$\alpha_k=\gamma(x_k\beta+\tau_k) \qquad (k=1,\dots,n),$$

$$\beta\in L, \quad \gamma\in C, \quad \tau\in T(x).$$

Ориентация $S(x)$ определяется согласно ориентации топологического произведения $L\times C\times T(x)$, порожденной ориентациями L, C, $T(x)$.

Далее, пусть $\tau^0=(\tau_1^0,\dots,\tau_n^0)$ есть произвольно выбранная точка $T(x)$; значение $\lg\left[-\frac{(x,\bar{\alpha})^2}{(\alpha,\bar{\alpha})}\right]$ в точке $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_k=\varepsilon x_k i+\tau_k^0$ $(k=1,\dots,n)$, принадлежащей $S(x)$, полагается действительным и далее определяется аналитическим продолжением.

В случае $n=2$ формула (2.3) приводит к формуле, данной Сомилианa (с точностью до постоянного множителя и слагаемого — полинома x_1, x_2, степени не выше $s-2$)[1)].

3. Здесь будут исследованы функции типа $\frac{\Phi(x,\alpha)}{f(\alpha)}$. Пусть $\psi(x,\alpha)$ для всякого $x\neq 0$ есть однозначная аналитическая функция $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ в области, в которой

$$f(\alpha)\neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k\neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\neq 0,$$

$\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$ не равно действительному неотрицательному числу, аналитически продолжаемая в области, в которой

$$f(\alpha)\neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k\neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\neq 0.$$

Далее, функция $\psi(x,\alpha)$ предполагается однородной степени $-n$ в следующем смысле: если в точке α^0 имеет место $f(\alpha^0)\neq 0$, $(x,\bar{\alpha}^0)\neq 0$,

[1)] См. также Э. Э. Леви [1].

$(\alpha^0, \overline{\alpha^0}) \neq 0$ и λ есть произвольное ненулевое комплексное число, то, определяя значение $\psi(x, \lambda^0\alpha^0)$ аналитическим продолжением $\psi(x, \lambda\alpha^0)$ от значения $\psi(x, \alpha^0)$, смещая λ от 1 к λ^0, минуя начало, имеют

$$\psi(x, \lambda^0\alpha^0) = (\lambda^0)^{-n}\psi(x, \alpha^0).$$

Очевидно, функция $\dfrac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)}$ и производные этой функции по $x_1, \ldots, x_n$ обладают перечисленными свойствами.

Функция $\psi(x, \alpha)$ (для каждого $x \neq 0$) будет рассматриваться на множестве $G = G(x)$ точек α, определенном уравнениями

$$\alpha_k = \gamma(\beta y_k + \tau_k) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Здесь γ, β принимают комплексные значения, y_k, τ_k $(k = 1, \ldots, n)$ принимают действительные значения,

$$|y - x| < \frac{1}{2}|x|, \quad \tau \neq 0, \quad (y, \tau) = 0, \quad \gamma \neq 0, \quad 0 < \frac{2\dfrac{|y|}{|\tau|}|\operatorname{Im}\beta|}{1 + \dfrac{|y|^2}{|\tau|^2}|\beta|^2} < \frac{\sigma}{2}$$

(σ определено условием (2.1)).

Лемма 3. *Функция $\psi(x, \alpha)$ однозначно аналитически продолжаема на G.*

Для этого прежде будет дано представление точек G вида (1), удовлетворяющее указанным ограничениям, в котором β, γ, y, τ будут определены как однозначные непрерывные функции α. Пусть $\alpha \in G$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, где α_1, α_2 действительные векторы;

$$l = (\alpha_1, \alpha_1), \quad m = (\alpha_1, \alpha_2), \quad n = (\alpha_2, \alpha_2), \quad g = +\sqrt{ln - m^2}.$$

Тогда из (3.1), при сделанных предположениях, следует

$$l + n = |\gamma|^2 \quad (|\beta|^2|y|^2 + |\tau|^2) > 0, \quad l - n + 2mi = \gamma^2(\beta^2|y|^2 + |\tau|^2),$$

$$\frac{2g}{l+n} = \frac{2\dfrac{|y|}{|\tau|}|\operatorname{Im}\beta|}{1 + \dfrac{|y|^2}{|\tau|^2}|\beta|^2}. \tag{3.2}$$

Таким образом, по определению G, $\dfrac{2g}{l+n} < \dfrac{\sigma}{2}$, $g > 0$, и, следовательно, векторы α_1, α_2 независимы. Из (3.1) тогда следует, что

$$y = A\alpha_1 + B\alpha_2, \quad \tau = C\alpha_1 + D\alpha_2, \quad \beta = \frac{Ci - D}{B - Ai}, \quad \gamma = \frac{Ai - B}{AD - BC}. \tag{3.3}$$

Обратно, при любых действительных числах A, B, C, D, удовлетворяющих условию $AD - BC \neq 0$, формулы (3.3) определяют β, γ, y, τ, удовлетворяющие уравнениям (3.1). Условие $(y, \tau)=0$ приводит к выражению

$$C=-\varphi(mA+nB), \quad D=\varphi(lA+mB). \tag{3.4}$$

Здесь φ действительное число, отличное от нуля.

Для того чтобы β, γ, y, τ, определяемые формулами (3.3), (3.4), удовлетворяли всем ограничениям, наложенным на представление (3,1), достаточно подобрать A, B так, чтобы удовлетворялось соотношение $|y-x|<\frac{1}{2}|x|$, или

$$lA^2+2mAB+nB^2-2((\alpha_1, x)A+(\alpha_2, x)B)+\frac{3}{4}|x|^2<0. \tag{3.5}$$

Но это соотношение определяет внутренность эллипса (в плоскости A, B) с центром в точке

$$A=\frac{(\alpha_1, x)n-(\alpha_2, x)m}{g^2}, \quad B=\frac{(\alpha_2, x)l-(\alpha_1, x)m}{g^2}. \tag{3.6}$$

Наконец, полагая

$$\varphi=-\frac{1}{g}, \tag{3.7}$$

получают $\operatorname{Im}\beta>0$, $|y|=|\tau|$.

Из формул (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) определяют β, γ, y, τ как непрерывные функции точки $\alpha\in G$, удовлетворяющие соотношению $\alpha=\gamma(\beta y+\tau)$ и всем ограничениям, накладываемым на β, γ, y, τ определением G.

G связно. Действительно, пусть $\alpha', \alpha''\in G$, $\beta', \gamma', y', \tau'$, $\beta'', \gamma'', y'', \tau''$ соответствующие величины, определенные по предыдущему.

Тогда достаточно положить $y(\theta)=(1-\theta)y'+\theta y''$, $\operatorname{Im}\beta(\theta)=(1-\theta)\operatorname{Im}\beta'+\theta\operatorname{Im}\beta''$ $(0\leqslant\theta\leqslant1)$, подобрать непрерывную векторную функцию $\tau(\theta)$, удовлетворяющую условиям $\tau(0)=\tau'$, $\tau(1)=\tau''$, $(y(\theta), \tau(\theta))=0$, $|y(\theta)|=|\tau(\theta)|$, и непрерывную функцию $\varphi(\theta)$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi(0)=\operatorname{Re}\beta', \quad \varphi(1)=\operatorname{Re}\beta'', \quad \frac{\operatorname{Im}\beta(\theta)}{\varphi(\theta)^2+[\operatorname{Im}\beta(\theta)]^2+1}<\frac{\sigma}{2},$$

наконец, непрерывную функцию $\psi(\theta)$, удовлетворяющую условиям $\psi(0)=\gamma'$, $\psi(1)=\gamma''$, $\psi(\theta)$ не принимает нулевого значения, что, очевидно, возможно, чтобы получить по формуле $\alpha(\theta)=\psi(\theta)\,[\beta(\theta)y(\theta)+\tau(\theta)]$ непрерывный путь, соединяющий точки α', α'' и принадлежащий G.

$\psi(x, \alpha)$ аналитически продолжаема по любому пути в G. Для этого достаточно показать, что на G $f(\alpha)\neq0$, $(\alpha, \bar{\alpha})\neq0$, $(x, \bar{\alpha})\neq0$. По условию (3.1), на основании леммы 2, $f(\alpha)\neq0$. Далее, $(\alpha, \bar{\alpha})=$

$=l-n+2mi\neq 0$, так как на основании (3.2) $\frac{2g}{l+n}<\frac{\sigma}{2}\leqslant\frac{1}{2}$. Наконец, $(x,\bar{\alpha})=(x,\alpha_1)+(x,\alpha_2)i\neq 0$ на основании (3.5).

Остается показать однозначность $\psi(x,\alpha)$ при аналитическом продолжении на G.

Пусть Γ есть замкнутый путь на G, $\alpha=\gamma(\theta)[\beta(\theta)y(\theta)+\tau(\theta)]$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$ его уравнение (β,γ,y,τ предполагаются удовлетворяющими всем условиям, характеризующим такое представление точки из G). Благодаря возможности однозначной непрерывной зависимости β,γ,y,τ от α можно полагать $\beta(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $y(\theta)$, $\tau(\theta)$ описывающими также замкнутые пути в соответствующих пространствах.

На основании предположения $|y(\theta)-x|<\frac{1}{2}|x|$ путь $y(\theta)$ можно, сохраняя это соотношение, непрерывно стянуть в точку x. Путь $\beta(\theta)$ благодаря предположению $\operatorname{Im}\beta(\theta)>0$ можно непрерывно стянуть в точку $\beta_0=\left(\frac{2}{\sigma}-\sqrt{\frac{4}{\sigma^2}-1}\right)i$ (легко видеть, что $\sigma\leqslant 1$), не нарушая соотношения $0<\frac{2\operatorname{Im}\beta}{|\beta|^2+1}<\sigma$. Таким образом, путь Γ можно непрерывно деформировать на G в путь Γ', определенный уравнением

$$\alpha=\gamma(\theta)\,[\beta_0x+\tau'(\theta)]\ (0\leqslant\theta<1),\quad (x,\tau'(\theta))=0,\quad |x|=|\tau'(\theta)|.$$

Тогда, на Γ' $\frac{(x,\bar{\alpha})^2}{(\alpha,\bar{\alpha})}=\frac{|x|^2\beta_0^2}{\beta_0^2+1}<0$ и, таким образом, Γ' лежит в области однозначности $\psi(x,\alpha)$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что значение $\psi(x,\alpha)$ на $G(x)$ определяется аналитическим продолжением ветви $\psi(x,\alpha)$, определенной в части $G(x)$, в которой $\frac{(x,\bar{\alpha})^2}{(\alpha,\bar{\alpha})}$ не равно действительному неотрицательному числу.

Пусть $x\neq 0$, ε произвольное положительное число, удовлетворяющее условию

$$0<\varepsilon<\frac{\sigma}{\sigma|x|};\tag{3.8}$$

G_ε есть часть множества $G(x)$, состоящая из точек α с представлением

$$\alpha=\gamma(\beta y+\tau),\tag{3.9}$$

$$\gamma\neq 0,\quad \operatorname{Im}\beta\geqslant\varepsilon,\quad \frac{2|y|\operatorname{Im}\beta}{|y|^2|\beta|^2+1}<\frac{\sigma}{2},\quad |x-y|<\frac{1}{2}|x|,$$

$$(y,\tau)=0,\quad |\tau|=1.$$

Очевидно, при $|x-y|<\frac{1}{2}|x|$, $S(y)\subseteq G_\varepsilon(S(y))$ — поверхность, описанная в п. 2, соответствующая сделанному здесь выбору ε. Имеет место

Лемма 4. *Если* α *пробегает* G_ε, *то*

$$\sup |\alpha|^n |\psi(x, \alpha)| = \mu(\varepsilon) < \infty.$$

Доказательство. Если $\alpha \in G_\varepsilon$, то $\frac{\alpha}{|\alpha|} \in G_\varepsilon$; замечая, что $|\alpha|^n \psi(x, \alpha)$ есть однородная функция нулевой степени, достаточно доказать лемму для той части G_ε, на которой $|\alpha| = 1$.

Пусть $\alpha^{(k)} \in G_\varepsilon$, $|\alpha^{(k)}| = 1$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\alpha^{(k)} \to \alpha^0$.

Для доказательства леммы достаточно доказать, что $\psi(x, \alpha)$ аналитически продолжаема через всякую такую точку α^0. Для этого будет проверено, что $f(\alpha^0) \neq 0$, $(x, \alpha^0) \neq 0$, $(\alpha^0, \bar{\alpha}^0) \neq 0$, $f(\alpha^0) \neq 0$.

Пусть $\alpha^{(k)} = \gamma^{(k)}(\beta^{(k)} y^{(k)} + \tau^{(k)})$; из $|\alpha^{(k)}| = 1$ следует

$$|\gamma^{(k)}| = \frac{1}{\sqrt{|\beta^{(k)}|^2 |y^{(k)}|^2 + 1}}.$$

Полагая

$$\frac{\gamma^{(k)}}{|\gamma^{(k)}|} = \gamma'^{(k)}, \quad \frac{|y^{(k)}| \beta^{(k)}}{\sqrt{|\beta^{(k)}|^2 |y^{(k)}|^2 + 1}} = \beta'^{(k)},$$

$$\frac{y^{(k)}}{|y^{(k)}|} = y'^{(k)}, \quad \frac{\tau^{(k)}}{\sqrt{|\beta^{(k)}|^2 |y^{(k)}|^2 + 1}} = \tau'^{(k)},$$

получают

$$\alpha^{(k)} = \gamma'^{(k)}(\beta'^{(k)} y'^{(k)} + \tau'^{(k)}).$$

Можно предполагать последовательности $\{\beta'^{(k)}\}$, $\{\gamma'^{(k)}\}$, $\{y'^{(k)}\}$, $\{\tau'^{(k)}\}$ сходящимися (к пределам $\beta^0, \gamma^0, y^0, \tau^0$), тогда

$$\alpha^0 = \gamma^0(\beta^0 y^0 + \tau^0).$$

Если $\tau^0 = 0$, то $f(\alpha^0) = \gamma^0 \beta^0 f(y_0) \neq 0$. Пусть теперь $\tau^0 \neq 0$; тогда

$$\frac{2\dfrac{|y'^{(k)}|}{|\tau'^{(k)}|} \operatorname{Im} \beta'^{(k)}}{\dfrac{|y'^{(k)}|^2}{|\tau'^{(k)}|^2} |\beta'^{(k)}|^2 + 1} = \frac{2|y^{(k)}| \operatorname{Im} \beta^{(k)}}{|y^{(k)}|^2 |\beta^{(k)}|^2 + 1} < \frac{\sigma}{2} \tag{3.10}$$

и, следовательно,

$$\frac{2\dfrac{|y^0|}{|\tau_0|} \operatorname{Im} \beta^0}{\dfrac{|y^0|^2}{|\tau^0|^2} |\beta^0|^2 + 1} \leqslant \frac{\sigma}{2} < \sigma.$$

По лемме 2 $f(\alpha^0) \neq 0$. $(x, \alpha^0) \neq 0$.

Действительно, $(x, y^{(k)}) > \frac{1}{2}|x|^2$, $\frac{1}{2}|x| < |y^{(k)}| < \frac{3}{2}|x|$, $|(x, \tau^{(k)})| < \frac{1}{2}|x|$.

Если теперь $\beta^{(k)}$ не ограничены в совокупности, можно полагать $\beta^{(k)} \to \infty$ и

$$|(x, \alpha^{(k)})| = \frac{|(x, y^{(k)})\beta^{(k)} + (x, \tau^{(k)})|}{\sqrt{|y^{(k)}|^2 |\beta^{(k)}|^2 + 1}},$$

$$|(x, \alpha^0)| = \lim |(x, \alpha^{(k)})| \geqslant \frac{1}{3}|x| > 0.$$

Если $|\beta^{(k)}| \leqslant R$ для всех k, то

$$|(x, \alpha^{(k)})| \geqslant \frac{(x, y^{(k)}) \operatorname{Im} \beta^{(k)}}{\sqrt{|y^{(k)}|^2 |\beta^{(k)}|^2 + 1}} > \frac{\frac{1}{2}|x|^2 \varepsilon}{\sqrt{\frac{9}{4}|x|^2 R^2 + 1}} \quad \text{и} \quad |(x, \alpha^0)| > 0. \quad |(\alpha^0, \overline{\alpha}^0)| > 0.$$

Действительно, по формулам (3.10) и (3.2) получают

$$\sqrt{\frac{|\alpha^{(k)}|^4 - |(\alpha^{(k)}, \overline{\alpha}^{(k)})|^2}{|\alpha^{(k)}|^4}} < \frac{\sigma}{2}, \quad |\alpha^{(k)}, \overline{\alpha}^{(k)})| > \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4}}$$

и, следовательно, $|(\alpha^0, \overline{\alpha}^0)| \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4}}$.

Лемма доказана.

4. Здесь будет показано, что формулы (2.3), (2.4) представляют решение уравнения $f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$.

Если x, y действительные точки, $x \neq 0$, $|x - y| < \frac{1}{2}|x|$, функция $\psi(x, \alpha)$, описанная в п. 3, есть аналитическая, однозначно определяемая на $S(y)$, что непосредственно следует из лемм 4 и 3. Далее, по формуле (2.5), учитывая ориентацию $S(y)$,

$$\int\limits_{S(y)} \ldots (n) \ldots \int \psi(x, \alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= 2\pi i \int\limits_{T(y)} \ldots (n-2) \ldots \int \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (-1)^{k+l} (y_l \tau_k - y_k \tau_l) \frac{d\tau_1 \ldots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l} \int\limits_{-\infty + \varepsilon i}^{+\infty + \varepsilon i} \psi(x, \eta)\, d\beta. \tag{4.1}$$

Здесь

$$\eta = \beta y + \tau; \tag{4.2}$$

$\frac{d\tau_1 \ldots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}$ есть внешняя диференциальная форма, полученная вычеркиванием $d\tau_k$, $d\tau_l$ из $d\tau_1 \ldots d\tau_n$; $T(y)$ — сфера, определенная уравнениями $(y, \tau) = 0$, $|\tau| = 1$, ориентированная так, как это указывалось в п. 2. При $n = 2$ формула (4.1) принимает вид

$$\iint\limits_{S(y)} \psi(x, \alpha)\, d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= 2\pi |y| i \left\{ \left[\int\limits_{-\infty + \varepsilon i}^{+\infty + \varepsilon i} \psi(x, \eta)\, d\beta \right]_{\tau = \left(-\frac{y_2}{|y|}, \frac{y_1}{|y|}\right)} + \left[\int\limits_{-\infty + \varepsilon i}^{+\infty + \varepsilon i} \psi(x, \eta)\, d\beta \right]_{\tau = \left(\frac{y_2}{|y|}, -\frac{y_1}{|y|}\right)} \right\}.$$

На основании леммы 4, на $S(y)$ имеет место соотношение $|\psi(x, \alpha)| \leqslant \mu|\alpha|^{-n}$ и поэтому интегралы в формуле (4.1) сходятся абсолютно.

Теперь интеграл (4.1) будет представлен в виде интеграла по конечной области.

Пусть Γ_R — путь в комплексной β-плоскости, состоящий из отрезка L_R, соединяющего точки $-R+\varepsilon i$, $R+\varepsilon i$, и примыкающей полуокружности C_R: $|\beta-\varepsilon i|=R$, $\operatorname{Im}\beta>0$; Γ_R ориентируется положительно.

Если $|\beta|>\dfrac{4}{\sigma|y|}$, точка $\alpha=\gamma(\beta y+\tau)$, при условиях $\gamma\neq 0$, $\operatorname{Im}\beta\geqslant\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\sigma}{\sigma|x|}\right)$, $|x-y|<\dfrac{1}{2}|x|$, $(y, \tau)=0$, $|\tau|=1$, лежит на $G_\varepsilon(x)$. Действительно, в этом случае

$$\frac{2|y||\operatorname{Im}\beta|}{|y|^2|\beta|^2+1}<\frac{\sigma}{2}.$$

Так как при этом $|\psi(x, \alpha)|\leqslant\mu(\varepsilon)|\alpha|^{-n}$, то при $R_0>\dfrac{4}{\sigma|y|}$, $\eta=\beta y+\tau$,

$$\int\limits_{\Gamma_{R_0}}\psi(x, \eta)\,d\beta=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R}\psi(x, \eta)\,d\beta=\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\psi(x, \eta)\,d\beta.$$

Если $S'(y)$ обозначает поверхность, определенную условиями $\alpha=\gamma(\beta y+\tau)$, $\gamma\in C$ (C единичная, положительно ориентированная окружность, $\beta\in\Gamma_{R_0}$, $\tau\in T(y)$), ориентированную как $\Gamma_{R_0}\times C\times T(y)$, тогда из формулы (4.1) получается

$$\int\limits_{S(y)}\ldots(n)\ldots\int\psi(x, \alpha)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n=\int\limits_{S'(y)}\ldots(n)\ldots\int\psi(x, \alpha)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n. \qquad (4.3)$$

Отсюда легко заметить, что величина интегралов в формуле (4.3) не зависит от выбора ε, если

$$0<\varepsilon<\frac{\sigma}{4|y|}.$$

Далее, очевидно, $S'(y)\subseteq G(x)$. Так как $S'(y)$ конечная поверхность без края и $\psi(x, \alpha)$ на $G(x)$ является аналитической функцией α, то для всякой действительной точки y, удовлетворяющей условию $|x-y|<\dfrac{1}{2}|x|$,

$$\int\limits_{S(x)}\ldots(n)\ldots\int\psi(x, \alpha)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n=\int\limits_{S(y)}\ldots(n)\ldots\int\psi(x, \alpha)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n. \qquad (4.4)$$

Полагая, в частности,

$$\psi(x, \alpha)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)}$$ и замечая, что производные $\dfrac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)}$

по $x_1, \ldots, x_n$ являются снова функциями типа $\psi(x, \alpha)$, из формул (4.3), (4.4) тогда заключают, что

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \frac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \left\{ \frac{\Phi(x, \alpha)}{f(\alpha)} \right\} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Следовательно,

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \varphi(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, C_{n,s} \underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \alpha_k\right)^n} = 0;$$

в области $x \neq 0$, $\varphi(x)$ есть, таким образом, решение уравнения $f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$.

Теперь будет дано еще одно представление $\underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \psi(x, \alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$, используемое в дальнейшем.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — действительная ненулевая точка, $a_k = a_k(x)$, $a_{kl} = a_{kl}(x)$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n-2)$ действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{n} x_k a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k a_{kl} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n-2), \tag{4.5}$$

$$\det A \neq 0.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1\,n-2} & \ldots & a_{n\,n-2} \\ a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Тогда при $n \geqslant 2$ имеет место равенство

$$\underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \psi(x, \alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= 2\pi i\, |\det A| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots (n-2) \ldots \int dt_1 \ldots dt_{n-2} \left(\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} + (-1)^n \int\limits_{-\infty-\varepsilon}^{+\infty-\varepsilon} \right) \psi(x, \xi)\, d\beta, \tag{4.7}$$

где $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

$$\xi_k=\beta x_k+\sum_{l=1}^{n-2}a_{kl}t_l+a_k \qquad (k=1,\ldots,n); \tag{4.8}$$

$$0<\varepsilon<\frac{\sigma\nu}{4|x|}; \tag{4.9}$$

$$\nu=\frac{1}{+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}A_k^2}}. \tag{4.10}$$

Здесь A_k — отношение алгебраического дополнения элемента a_k в матрице A к определителю этой матрицы. При $n=2$ $\int\ldots(n-2)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-2}$ отсутствует.

Для доказательства формулы (4.7) сначала будет исследовано многообразие, определенное формулами (4.8), (4.9), (4.10).

Пусть пространство T действительных точек $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ ориентировано указанной последовательностью координат.

Плоскость X в этом пространстве, определенная уравнением $(x,\tau)=0$, ориентируется указанием в ней последовательности векторов $e_1,\ldots,e_{n-1}$ так, чтобы последовательность векторов $x, e_1,\ldots,e_{n-1}$ соответствовала выбранной ориентации пространства T.

Пусть

$$a^l=(a_{1l},\ldots,a_{nl}) \qquad (l=1,\ldots,n-2).$$

Тогда на основании (4.5), (4.6) легко получают

$$\det A\cdot\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1\,n-2} & \ldots & a_{n\,n-2} \\ A_1 & \ldots & A_n \end{vmatrix}=(x,x)\begin{vmatrix} (a',a') & \ldots & (a',a^{n-2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a^{n-2},a') & \ldots & (a^{n-2},a^{n-2}) \end{vmatrix}>0.$$

Таким образом, можно положить $e_1=a',\ldots,e_{n-2}=a^{n-2}$, $e_{n-1}=$ $=\det A\,(A_1,\ldots,A_n)=\det A\cdot a^{n-1}$.

Уравнения

$$\tau_k=\sum_{l=1}^{n-2}a_{kl}t_l+a_k \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{4.11}$$

определяют линейное многообразие P; на основании (4.5) $P\subseteq X$. При $n>2$ P ориентируется указанием в нем последовательности векторов $e_1',\ldots,e_{n-2}'$ так, что последовательность векторов $a^{n-1}, e_1',\ldots,e_{n-2}'$ соответствует выбранной ориентации X; можно положить, по предыдущему,

$$e_1'=(-1)^n\,Sgn\det A\cdot a',\quad e'=a^l \quad (l=2,\ldots,n-2).$$

Многообразие P определяется также уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\tau_k=0, \quad \sum_{k=1}^{n} A_k\tau_k=1. \tag{4.12}$$

Расстояние от начала координат до P равно таким образом числу ν, определенному формулой (4.10).

Из леммы 3 сразу следует, что $\psi(x, \alpha)$ есть аналитическая функция на многообразии

$$\alpha=\beta x+\tau, \quad \operatorname{Im}\beta=\pm\varepsilon, \quad \tau\in X, \quad \tau\neq 0 \tag{4.13}$$

при выполнении условия (4.9).

Далее, полагая

$$\chi_{\pm}(x, \tau)=\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\psi(x, \alpha)\,d\beta$$

при $\tau\in\chi$, заменой $\beta=|\tau|\beta'$, $\tau'_k=|\tau|\tau'_k$ получают

$$\chi_{\pm}(x, \tau)=|\tau|^{1-n}\int_{-\infty\pm\frac{\varepsilon}{|\tau|}i}^{+\infty\pm\frac{\varepsilon}{|\tau|}i}\psi(x, \eta)\,d\beta;$$

$$\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$
$$\eta_k=\beta x_k+\tau'_k \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Так как $|\tau'|=1$, то на основании леммы 4 при

$$0<\varepsilon_1<\frac{\sigma}{\sigma|x|}, \quad \chi_{\pm}(x, \tau)=|\tau|^{1-n}\int_{-\infty\pm\varepsilon_1 i}^{+\infty\pm\varepsilon_1 i}\psi(x, \eta)\,d\beta,$$

$$|\chi_{\pm}(x, \tau)|\leqslant|\tau|^{1-n}\mu(\varepsilon_1)\int_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i}\frac{d\beta}{|\eta|^n}. \tag{4.14}$$

Отсюда следует сходимость интеграла в правой части формулы (4.7) (при указанном там порядке интегрирования).

Легко проверяется формула

$$\begin{gathered} I_{\pm}=|\det A|\int\ldots(n-2)\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\ldots dt_{n-2}\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\psi(x, \xi)\,d\beta= \\ =\int\ldots(n-2)\ldots\int_{P}\chi_{\pm}(x, \tau)\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\ldots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l} \end{gathered} \tag{4.15}$$

(знак $\pm$ в выражениях $I_{\pm}$, $\pm\varepsilon$, $\chi_{\pm}$ одинаков).

Далее, внешняя производная внешней диференциальной формы

$$\omega=\chi_{\pm}(x,\tau)\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\ldots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l} \tag{4.16}$$

при наличии связи $\sum_{k=1}^{n}x_k\tau_k=0$ равна нулю. Действительно, обозначая через ω' внешнюю производную формы ω, через $\omega_1\omega_2$ — внешнее произведение форм ω_1, ω_2, получают

$$\sum_{k=1}^{n}x_k d\tau_k\omega'=\left\{|x|^2\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\left[(n-1)\psi(x,\eta)+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}\right]d\beta\right\}d\tau_1\ldots d\tau_n;$$

так как в рассматриваемой области $\psi(x,\eta)$ есть однородная функция $\eta_1,\ldots,\eta_n$ степени $-n$, то $\sum_{k=1}^{n}(\beta x_k+\tau_k)\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}=-n\psi$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\tau_k\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}=-n\psi-\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}.$$

Итак, используя еще лемму 4,

$$\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\left[(n-1)\psi+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}\right]d\beta=-\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\left[\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right]d\beta=-\int_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta\psi)\,d\beta=0.$$

В части плоскости X, определяемой соотношением $\sum_{k=1}^{n}A_k\tau_k\geqslant 1$, $\chi_{\pm}(x,\tau)$ на основании леммы 3 и предположения (4.9) является аналитической функцией точки τ.

Таким образом, для всякой гладкой $n-2$-мерной поверхности S, ограничивающей некоторую конечную область, лежащую в указанной части плоскости X,

$$\int_S\ldots(n-2)\ldots\int\omega=0. \tag{4.17}$$

Пусть $R\geqslant\nu$ (сравн. формулу (4.10)) и P_R есть часть P, заключенная в шаре $|\tau|\leqslant R$, ориентированная согласованно с P; пусть Q_R есть примыкающая к P_R часть поверхности, определенной условиями

$$(x,\tau)=0,\quad |\tau|=R,\quad \sum_{k=1}^{n}A_k\tau_k\geqslant 1;$$

пусть ориентация Q_R продолжает ориентацию $-P_R$. Тогда на основании формулы (4.17)

$$\int_{P_R}\ldots(n-2)\ldots\int\omega=\int_{Q_R}\ldots(n-2)\ldots\int\omega. \tag{4.18}$$

Из формул (4.15), (4.18) тогда получают

$$I_{\pm}=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\psi(x,\alpha)\,d\beta; \quad (4.19)$$

α здесь определяется формулой (4.13).

Пусть Q единичная сфера в плоскости X; Q_+ (Q_-) есть часть, определенная условием $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\tau_k\geqslant 0$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\tau_k\leqslant 0\right)$. Пусть $Q(R)$ есть часть Q, полученная из Q_R проектированием из начала. Ориентация $Q(R)$ определяется формулой $\tau'=\frac{\tau}{|\tau|}$ и ориентацией QR, определенной ранее; ориентации Q, Q_+, Q_- согласованы с ориентацией $Q(R)$.

Заменой $\tau=R\tau'$, $\beta=R\beta'$,

$$I_{\pm}=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q(R)}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty\pm\frac{\varepsilon}{R}i}^{+\infty\pm\frac{\varepsilon}{R}i}\psi(x,\alpha)\,d\beta=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q(R)}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty\pm\varepsilon_1 i}^{+\infty\pm\varepsilon_1 i}\psi(x,\alpha)\,d\beta, \quad (4.20)$$

где ε_1 произвольное число, удовлетворяющее условию $0<\varepsilon_1<\frac{\sigma}{4|x|}$ (лемма 4).

Из (4.20) тогда получается

$$I_{\pm}=\int\limits_{Q_+}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty\pm\varepsilon_1 i}^{+\infty\pm\varepsilon_1 i}\psi(x,\alpha)\,d\beta. \quad (4.21)$$

Замечая, наконец, что при замене $\tau=-\tau'$ ориентация Q сохраняется или меняется в зависимости от нечетности или четности ее размерности $n-2$, заменой $\tau=-\tau'$, $\beta=-\beta'$ получают

$$I_-=(-1)^n\int\limits_{Q_-}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i}\psi(x,\alpha)\,d\beta.$$

Таким образом,

$$I_++(-1)^nI_-=\int\limits_{Q}\dots(n-2)\dots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\dots d\tau_n}{d\tau_k d\tau_l}\int\limits_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i}\psi(x,\alpha)\,d\beta,$$

что на основании формул (4.1), (4.15) приводит к доказательству формулы (4.7).

5. Здесь будет проведено упрощение формы условия (1.7), характеризующего фундаментальную функцию оператора $f\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Прежде всего будут рассмотрены некоторые свойства функции $\varphi(x)$, определенной формулами (2.3), (2.4).

Лемма 5. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\varphi(x)=(-1)^{s+k_1+\ldots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial(-x_1)^{k_1}\ldots\partial(-x_n)^{k_n}}\varphi(-x), \quad (5.1)$$

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\varphi(x)\right|\leqslant\begin{cases} C|x|^{s-n-k_1-\ldots-k_n}|\lg|x||\,(k_1+\ldots+k_n\leqslant s-n),\\ C|x|^{s-n-k_1-\ldots-k_n}\,(k_1+\ldots+k_n>s-n),\end{cases} \quad (5.2)$$

где C некоторая постоянная.

Если $k_1+\ldots+k_n>s-n$, $C>0$, то

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial(Cx_1)^{k_1}\ldots\partial(Cx_n)^{k_n}}\varphi(Cx)=C^{s-n-k_1-\ldots-k_n}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\varphi(x) \quad (5.3)$$

(„полуоднородность").

Доказательство. Прежде всего будет доказана формула (5.1) при $k_1=0,\ldots,k_n=0$.

По формуле (4.1)

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int\limits_{T(x)}\ldots(n-2)\ldots\int\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(-1)^{k+l}(x_l\tau_k-x_k\tau_l)\frac{d\tau_1\ldots d\tau_n}{d\tau_k\,d\tau_l}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\Phi(x,\eta)}{f(\eta)}d\beta,$$
$$\eta=\beta x+\tau;$$

$T(x)$ есть единичная сфера, лежащая в плоскости $(x,\tau)=0$, ориентация которой описана в п. 2.

Легко видеть, что $T(-x)=-T(x)$. Совершая в соответствующем представлении $\varphi(-x)$ замену $\tau=-\tau'$ и замечая, что

$$\frac{\Phi(-x,-\eta)}{f(-\eta)}=(-1)^s\frac{\Phi(x,\eta)}{f(\eta)},$$

легко получают

$$\varphi(-x)=(-1)^s\varphi(x).$$

Общий случай формулы (5.1) получается отсюда диференцированием.

Оценки (5.2) легко получаются в результате замены $x=|x|x'$.

Наконец, при $k_1+\ldots+k_n>s-n$,

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Phi(x,\alpha)=$$
$$=(-1)^{k_1+\ldots+k_n-s+n-1}(k_1+\ldots+k_n-s+n-1)!\,C_{n,s}^{-k_1-\ldots-k_n+s-n}(x,\bar{\alpha})\,\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\varphi(x)= \tag{5.4}$$

$$=\frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_n-s+n-1}}{(2\pi i)^n}(k_1+\ldots+k_n-s+n-1)!\,C_{n,s}\int\limits_{S(x)}\ldots(n)\ldots\int\frac{\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n}{f(\alpha)\,(x,\alpha)^{k_1+\ldots+k_n+n-s}},$$

откуда легко получается формула (5.3).

Для оператора $f\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ условие (1.7) (в точке 0) имеет вид

$$u(0)=-\lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{S_\varrho}\ldots(n-1)\ldots\int\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\varrho}B^j(u,\varphi)\,dS.$$

Предполагая, что для фундаментальной функции $\varphi(x)$ имеют место соотношения леммы 5 и полагая, по лемме 1,

$$B^j(u,\ v)=\frac{1}{s}\,uf_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)v+\ldots$$

$\Big($пропущены члены, содержащие производные порядка, меньшего $s-1$; $f_j(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha_j}f(\alpha)\Big)$, условие (1.7) можно привести далее к виду:

$$u(0)=-\frac{1}{s}\lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{S_\varrho}\ldots(n-1)\ldots\int u\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\varrho}f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi\,dS.$$

Благодаря предполагаемой непрерывности $u(x)$ в окрестности нуля и оценке (5.2) это соотношение равносильно такому

$$1=-\frac{1}{s}\lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{S_\varrho}\ldots(n-1)\ldots\int\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\varrho}f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi\,dS.$$

На основании (5.3) интеграл в правой части не зависит от радиуса ϱ сферы S_ϱ; итак, проверка выполнения условия (1.7) для функции $\varphi(x)$, определенной формулами (2.3), (2.4), сводится к проверке формулы

$$\int\limits_{S_1}\ldots(n-1)\ldots\int\sum_{j=1}^{n}x_jf_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi\,dS=-S\,.$$

Если Σ_{n-1} есть половина единичной сферы S_1, соответствующая $x_n \geqslant 0$, то на основании формул (5.1) (при $k_1+\ldots+k_n=S-1$) это соотношение можно заменить одним из следующих:

$$\underset{\Sigma_{n-1}}{\int \ldots (n-1) \ldots \int} \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \varphi\, dS = -\frac{S}{2}, \tag{5.5}$$

$$\underset{\Sigma_{n-1}}{\int \ldots (n-1) \ldots \int} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \varphi \frac{dx_1 \ldots dx_n}{dx_j} = \frac{S}{2}. \tag{5.6}$$

В последней формуле Σ_{n-1} предполагается естественно ориентированной поверхностью (единичный шар ориентируется расположением координат $x_1, \ldots, x_n$, его граница S_1 и ее часть Σ_{n-1} имеют индуцированную ориентацию).

Наконец, на основании (5,4) получают

$$\begin{gathered} f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \varphi(x) = \\ = \frac{(-1)^{n-s-1}}{(2\pi i)^n} (n-2)!\, C_{n,s} \underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\,(x, \overline{\alpha})^{n-1}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \end{gathered} \tag{5.7}$$

6. Здесь будет доказана формула (5.6) для функции $\varphi(x)$, определенной формулами (2.3), (2.4); таким образом будет доказано, что функция $\varphi(x)$ является фундаментальной в нуле для оператора $f\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Отсюда следует, что $\varphi(x-y)$ является фундаментальной функцией в точке y, и доказательство теоремы 1 (п. 2) будет завершено.

Пусть сначала $n>2$. $\Sigma_{n-1}(\eta)$ $(\eta \geqslant 0)$ есть часть Σ_{n-1}, согласованно ориентированная, определенная требованием $x_n \geqslant \eta$.

Пусть

$$\begin{gathered} J_n(\eta) = J_n(\eta, f) = \\ = \underset{\Sigma_{n-1}(\eta)}{\int \ldots (n-1) \ldots \int} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_j\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \varphi(x) \frac{dx_1 \ldots dx_n}{dx_j}; \end{gathered} \tag{6.1}$$

очевидно,

$$J_n(0) = \lim_{\eta \to 0} J_n(\eta). \tag{6.2}$$

Теперь будет показано, что при $x_n > 0$ диференциальная форма, стоящая под знаком интеграла в формуле (6.1), является внешней производной диференциальной формы

$$\omega_1 = \frac{(-1)^s (n-3)!}{(2\pi i)^n} C_{n,s} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{dx_j} \underset{S(x)}{\int \ldots (n) \ldots \int} \frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\, \alpha_n\, (x, \overline{\alpha})^{n-2}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \tag{6.3}$$

Действительно,

$$\omega_1' = \frac{(-1)^s (n-2)!}{(2\pi i)^n} C_{n,s} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} dx_1 \dots dx_{n-1} \underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{\alpha_j f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\, \alpha_n (x, \bar{\alpha})^{n-1}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} \frac{dx_1 \dots dx_n}{dx_j} \underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\,(x, \bar{\alpha})^{n-1}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^s (n-2)!}{(2\pi i)^n} C_{n,s} \left\{ S\, dx_1 \dots dx_{n-1} \underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\bar{\alpha}_n (x, \bar{\alpha})^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{dx_1 \dots dx_n}{dx_j} \underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\,(x, \bar{\alpha})^{n-1}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right\}.$$

Но по формуле (4.1)

$$\underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\alpha_n (x, \bar{\alpha})^{n-1}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{|x|^{2(n-1)}} \underset{T(x)}{\int \dots (n-2) \dots \int} \sum_{1 \le k < l \le n} (-1)^{k+l} (x_l \tau_k - x_k \tau_l) \frac{d\tau_1 \dots d\tau_n}{d\tau_k\, d\tau_l} \int_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{d\beta}{(x_n \beta + \tau_n) \beta^{n-1}} = 0,$$

откуда и следует справедливость сделанного утверждения. Пусть $\Gamma_{n-2}(\eta)$ есть граница $\Sigma_{n-1}(\eta)$, соответственно ориентированная; тогда при $\eta > 0$

$$J_n(\eta) = \frac{(-1)^s (n-3)!}{(2\pi i)^n} C_{n,s} \underset{\Gamma_{n-2}(\eta)}{\int \dots (n-2) \dots \int} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{dx_j} \times$$

$$\times \left[\underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\, \alpha_n (x, \bar{\alpha})^{n-2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right]_{x_n = \eta}. \tag{6.4}$$

Для вычисления предела этого выражения при $\eta \to 0$ прежде всего замечают, что

$$J_n(\eta) = \frac{(-1)^{n-s} (n-3)!}{(2\pi i)^n} C_{n,s} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \to$$

$$\to \left\{ \underset{\Gamma_{n-2}(\eta)}{\int \dots (n-2) \dots \int} \left[\underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\, \alpha_n (x, \bar{\alpha})^{n-2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right]_{x_n = \eta} dS - \right.$$

$$\left. - \sigma \underset{\Gamma_{n-2}(\eta)}{\int \dots (n-2) \dots \int} \left[\underset{S(x)}{\int \dots (n) \dots \int} \frac{f'_{\alpha_n}(\alpha)}{f(\alpha)\, \alpha_n (x, \bar{\alpha})^{n-2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right]_{x_n = \eta} dS \right\}. \tag{6.5}$$

Далее, по формуле (4.7)

$$\Phi_\eta(x)=\left[\int\ldots(n)\ldots\int\limits_{S(x)}\frac{\sum_{j=1}^{n} f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)\,\alpha_n\,(x,\alpha)^{n-2}}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n\right]=$$

$$=2\pi i\frac{|\det A|}{|x|^{2(n-2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-2)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}+(-1)^n\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi)\,d\beta}{f(\xi)\left(\eta\beta+\sum\limits_{l=1}^{n-2}a_{nl}t+a_n\right)\beta^{n-2}},$$

$$\xi_k=\beta x_k+\sum_{l=1}^{n-2}a_{kl}t_l+a_k\quad(k=1,\ldots,n),\quad x_n=\eta.$$

Пусть теперь $a^0_{kl}(x)$, $a^0_k(x)$, $b_k(x)$ $(k=1,\ldots,n;\ l=1,\ldots,n-3)$ суть функции $x_1,\ldots,x_{n-1}$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_k a^0_{kl}=0\ (l=1,\ldots,n-3),\quad\sum_{k=1}^{n-1}x_k a^0_k=0,\quad\sum_{k=1}^{n-1}x_k b_k+1=0,$$

$$\det A^0=\begin{vmatrix} x_1\ldots\ldots\ldots x_{n-1}\\ a^0_{11}\ldots\ldots\ldots a^0_{n-11}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a^0_{1\,n-3}\ldots\ldots a^0_{n-1\,n-3}\\ a^0_1\ldots\ldots\ldots a^0_{n-1}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда, при достаточно малом η, можно положить

$$a_{kl}=a^0_{kl},\quad a_k=a^0_k,\quad a_{k\,n-2}=\eta b_k,\quad a_{nl}=0,$$
$$a_{nn-2}=1\quad(k=1,\ldots,n-1;\quad l=1,\ldots,n-3);$$

при этом $\det A\underset{\eta\to 0}{\to}(-1)^n\det A^0$.

Так же, как при доказательстве леммы 2, легко показать, что существует такое $\sigma_1>0$, что при действительных $t_1,\ldots,t_{n-3}$, $|\operatorname{Im}\beta|=\varepsilon$, $|\operatorname{Im}t_{n-2}|\leqslant\sigma_1$, $\eta\geqslant 0$, $f(\xi)\neq 0$. Пусть L_+ (L_-) есть естественно ориентированный путь в t_{n-2}-плоскости, состоящий из отрезков $(-\infty,-\sigma_1)$, (σ_1,∞) и верхней (нижней) половины окружности $|t_{n-2}|=\sigma_1$.

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi)}{f(\beta)\,(\eta\beta+t_{n-2})\,\beta^{n-2}}\,d\beta=\int\limits_{L_\pm}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty\pm\varepsilon i}^{+\infty\pm\varepsilon i}\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi)\,d\beta}{f(\xi)\,(\eta\beta+t_{n-2})\,\beta^{n-2}}$$

(знак $\pm$ в выражениях $L_\pm$, $\pm\varepsilon$ одинаков).

Таким образом,

$$\Phi_\eta(x)=2\pi i\frac{|\det A|}{|x|^{2(n-2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{L_+}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}d\beta+(-1)^n\int\limits_{L_-}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}d\beta\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi)}{f(\xi)\,(\eta\beta+t_{n-2})\,\beta^{n-2}}. \tag{6.6}$$

Пусть $x'=(-x_{11},\ldots,-x_{n-1},\eta)$. Тогда точно так же

$$\Phi_\eta(x')=2\pi i\frac{|\det A'|}{|x|^{2(n-2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{L_+}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}d\beta+(-1)^n\int\limits_{L_-}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}d\beta\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')}{f(\xi')\,(\eta\beta-t_{n-2})\,\beta^{n-2}}, \tag{6.7}$$

$$\xi_k'=-\beta x_k+\sum_{l=1}^{n-2}a_{kl}t_l+a_k\ (k=1,\ldots,n-1),\ \xi_n'=\eta\beta-t_{n-2},$$

$$\det A'=\begin{vmatrix}-x_1\ldots\ldots-x_{n-1} & \eta\\ a_{11}\ldots\ldots a_{n-11} & 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1\,n-3}\ldots\ldots a_{n-1\,n-3} & 0\\ a_{1\,n-2}\ldots\ldots a_{n-1\,n-2} & -1\\ a_1\ldots\ldots\ldots a_{n-1} & 0\end{vmatrix}=\det A.$$

Далее, производя в формуле (6.7) замену $t_{n-2}=-t'_{n-2}$, из формул (6.6), (6,7) легко получают

$$\lim_{\eta\to 0}\Phi_\eta(x)=2\pi i\frac{|\det A^0|}{|x|^{2(n-2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\left(\int\limits_{L_+}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}d\beta+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\int\limits_{L_-}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}d\beta\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')}{f(\xi')\ t_{n-2}\,\beta^{n-2}}, \tag{6.8}$$

$$\lim_{\eta\to 0}\Phi_\eta(x')=-2\pi i\frac{|\det A^0|}{|x|^{2(n-2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\left(\int\limits_{L_-}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}d\beta+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\int\limits_{L_+}dt_{n-2}\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}d\beta\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')}{f(\xi')\ t_{n-2}\,\beta^{n-2}}, \tag{6.9}$$

$$\xi_k'=x_k\beta+\sum_{l=1}^{n-3}a_{kl}t_l+a_k\quad(k=1,\ldots,n-1),\ \xi_n'=t_{n-2}.$$

Если C есть окружность в t_{n-2}-плоскости с центром в нуле и радиусом σ_1, ориентированная положительно, то

$$\lim_{\eta\to 0}[\Phi_\eta(x)+\Phi_\eta(x')]=$$

$$=-2\pi i\frac{|\det A^0|}{|x|^{2(n-2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\int_C dt_{n-2}\left(\int_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\int_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')}{f(\xi')\,t_{n-2}\,\beta^{n-2}}\,d\beta=$$

$$=(2\pi)^2\frac{|\det A^0|}{|x|^{2(n-2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\left(\int_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}+(-1)^{n-1}\int_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\right)\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi'')}{f(\xi'')\,\beta^{n-2}}\,d\beta,\quad(6.10)$$

$$\xi_k''=\beta x_k+\sum_{l=1}^{n-3}a_{kl}t_l+a_k\quad(k=1,\ldots,n-1),\quad \xi_n''=0.$$

Аналогичное преобразование показывает, что

$$\int_{S(x)}\ldots(n)\ldots\int\frac{f'_{\alpha_n}(\alpha)}{f(\alpha)\,\alpha_n(x,\alpha)^{n-2}}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n$$

остается ограниченным при $\eta\to 0$.

Пусть $f_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},0)$. Тогда из формул (6.5), (6.10) получают

$$\lim_{\eta\to 0}J_n(\eta)=\frac{(-1)^{n-s}(n-3)!}{(2\pi i)^n}C_{n,s}\int_{\Sigma_{n-2}}\ldots(n-2)\ldots\int\lim_{\eta\to 0}[\Phi_\eta(x)+\Phi_\eta(x')]\,ds=$$

$$=\frac{(-1)^{n-s-1}(n-3)!}{(2\pi i)^{n-1}}C_{n,s}\int_{\Sigma_{n-2}}\ldots(n-2)\ldots\int dS\left\{2\pi i\frac{|\det A^0|}{|x|^{2(n-2)}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots(n-3)\ldots\int dt_1\ldots dt_{n-3}\left(\int_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}+(-1)^{n-1}\int_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\right)\frac{\sum_{j=1}^{n-1}x_jf_0(\xi^0)}{f_0(\xi^0)\,\beta^{n-2}}\,d\beta\right\},\quad(6.11)$$

$$\xi_k^0=\beta x_k+\sum_{l=1}^{n-3}a_{kl}t_l+a_k\quad(k=1,\ldots,n-1).$$

Если $n\geqslant 3$, то по формулам (4.7), (6.1) получается рекуррентная формула

$$J_n(0,f)=\frac{C_{n,s}}{C_{n-1,s}}J_{n-1}(0,f_0).\qquad(6.12)$$

Остается подсчитать $J_2(0,f)$.

По формуле (5.6) имеют

$$J_2(0,f)=\frac{(-1)^{s-1}}{(2\pi i)^2}C_{2s}\int\limits_{\Sigma_1}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{dx_1\,dx_2}{dx_j}\iint\limits_{S(x)}\frac{f'_{\alpha_j}(\alpha)}{f(\alpha)(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)}d\alpha_1\,d\alpha_2; \quad (6.13)$$

здесь Σ_1 есть положительно ориентированная полуокружность, определенная условием

$$x_1^2+x_2^2=1,\quad x_2\geqslant 0.$$

Прежде всего легко заметить, что во внутреннем интеграле $S(x)$ можно заменить, например, через $S(e)$, где $e=(0,1)$.

Пусть Γ есть положительно ориентированный контур в β-плоскости, состоящий из отрезка, соединяющего точки $-\frac{4}{\sigma}+\varepsilon i$, $\frac{4}{\sigma}+\varepsilon i$, и верхней половины полуокружности $|\beta|=\sqrt{\frac{16}{\sigma^2}+\varepsilon^2}$.

По лемме 2 легко проверить, что вне круга радиуса $\sqrt{\frac{16}{\sigma^2}+\varepsilon^2}$ $f(\alpha)=0$ не имеет корней на $S(x)$, поэтому в формуле (4.1) путь интегрирования по β можно заменить через Γ. Тогда, по формуле (4.1)

$$\iint\limits_{S(x)}\frac{f_{\alpha_j}(\alpha)\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{f(x)\,(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)}=$$

$$=2\pi i\left\{\int\limits_{\Gamma}\frac{f'_{\alpha_j}(\xi')\,d\beta}{f(\xi')(x_1\xi_1'+x_2\xi_2')}+\int\limits_{\Gamma}\frac{f'_{\alpha_j}(\xi'')\,d\beta}{f(\xi'')(x_1\xi_1''+x_2\xi_2'')}\right\}, \quad (6.14)$$

$$\xi_1'=-1,\quad \xi_2'=\beta,\quad \xi_1''=1,\quad \xi_2''=\beta.$$

Замечая, что

$$-f'_{\alpha_1}(\xi')+\beta f'_{\alpha_2}(\xi')=sf(\xi'),\qquad f'_{\alpha_2}(\xi')=\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi'),$$

$$f'_{\alpha_1}(\xi'')+\beta f'_{\alpha_2}(\xi'')=sf(\xi''),\quad f'_{\alpha_2}(\xi'')=\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi''),$$

получают из формулы (6.13)

$$J_2(0,f)=\frac{(-1)^{s-1}}{2\pi i}C_{2,s}\left\{\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{f(\xi')}\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')\,d\beta\int\limits_{\Sigma_1}\frac{-\beta\,dx_2+dx_1}{-x_1+\beta x_2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{f(\xi'')}\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi'')\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\beta\,dx_2+dx_1}{x_1+\beta x_2}\right\}=\frac{(-1)^{s-1}}{2}C_{2,s}\left\{\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{f(\xi')}\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi')\,d\beta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{f(\xi'')}\frac{\partial}{\partial\beta}f(\xi'')\,d\beta\right\}=\frac{(-1)^{s-1}}{2}C_{2,s}\cdot 2\pi is. \quad (6.15)$$

Теперь по формулам (6.12), (6.15) получают

$$J_n = \frac{C_{n,s}}{C_{2,s}} J_2 = (-1)^{s-1} \pi s C_{n,s}\, i = \frac{s}{2}, \tag{6.16}$$

при

$$C_{n,s} = \frac{(-1)^{s-1}}{2\pi i}. \tag{6.17}$$

Теорема 1 доказана.

Следует отметить, наконец, что, как видно по формулам (2.3), (2.4), (2.5), (4.7), $\varphi(x)$ принимает действительные значения в действительных точках, если коэфициенты f действительны.

7. Здесь будут даны некоторые подготовительные сведения для рассмотрения фундаментальных матриц, соответствующих случаю переменных коэфициентов. Будут использоваться следующие обозначения: E — n-мерное эвклидово пространство;

$$x=(x_1, \ldots, x_n) \in E, \quad dx = dx_1 \ldots dx_n, \quad |x| = +\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Пусть V некоторая конечная область этого пространства; K_p будет обозначать множество функций φ последовательности двух точек $x, y \in V$, — $\varphi = \varphi(x, y)$, непрерывных по совокупности точек x, y при $x \neq y$ и обладающих свойствами

$$|\varphi(x, y)| \cdot |x-y|^p \, (p>0), \quad \frac{|\varphi(x, y)|}{\lg|x-y|} \, (p=0), \quad |\varphi(x, y)| \quad (p<0)$$

ограничено;

$$K_{p-0} = \bigcup_{q<p} K_q.$$

Как известно, в случае, когда $\varphi(x, y) \in K_p$, $\psi(x, y) \in K_q$; $p, q < n$, то $\chi(x, y) = \int\limits_V \varphi(x, z)\psi(z, y)\, dz \in K_{p+q-n}$; если при этом $\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_1} \in K_{n-0}$, то $\chi(x, y)$ диференцируемо по x_1 при $x \neq y$ и возможно также диференцирование под знаком интеграла.

Наконец, на случай ядер $K(x, y) \in K_{n-0}$ переносится известным образом теория Фредгольма.

Теперь будет доказана

Лемма 1. *Пусть* $K(x, y) \in K_{n-1}$; $\varphi(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x, y) \in K_{n-0}$; $\frac{\partial}{\partial x_1} K(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y_1} K(x, y)$ *непрерывны при* $x \neq y$ и притом $\frac{\partial}{\partial x_1} K(x, y) + C \frac{\partial}{\partial y_1} K(x, y) = L(x, y) \in K_{n-1}$ (C постоянная, отличная от нуля).

Если $\psi(x, y) \in K_{n-0}$ *и*

$$\int\limits_V K(x, z)\,\psi(z, y)\,dz - \psi(x, y) = \varphi(x, y), \tag{7.1}$$

то $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\psi(x, y)$ *существует и непрерывна при* $x \neq y$. В частности, это справедливо для фундаментальных функций ядра $K(x, y)$ (и сопряженного ядра).

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V$; $a \neq y$; $S = S_\delta$ есть куб

$$|x_k - a_k| \leqslant \delta \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Пусть $\delta > 0$ выбрано столь малым, чтобы $y \overline{\in} S_{2\delta} \subseteq V$;

$$C_1 \int\limits_{S_{2\delta}} |K(x, z)|\,dz < \frac{1}{12}, \quad C_1 \int\limits_{S_{2\delta}} |K(x, z)|_{z_1 = a_1 - 2\delta}\,dz < \frac{1}{12}, \tag{7.2}$$

$$2\delta \int\limits_{S_{2\delta}} |L(x, z)|\,dz < \frac{1}{12} \quad (x \in S), \quad \text{где } C_1 = \max(1, |c|).$$

Очевидно, такой выбор возможен.

Теперь рассматривается интегральное уравнение

$$C \int\limits_S [K(x, z) - K(x, z)|_{z_1 = a_1}]\,\chi(z, y)\,dz - \chi(x, y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x, y) + C \int\limits_{a_2 - \delta}^{a_2 + \delta} dz_2 \ldots \int\limits_{a_n - \delta}^{a_n + \delta} dz_n [(K(x, z) - K(x, z)|_{z_1 = a_1 - 2\delta})\,\psi(z, y)]_{z_1 = a_1 - \delta}^{z_1 = a_1 + \delta} - \tag{7,3}$$

$$- \int\limits_S L(x, z)\,\psi(z, y)\,dz - \int\limits_{v - S} \frac{\partial}{\partial x_1} K(x, z)\,\psi(z, y)\,dz;$$

так как $C_1 \int\limits_S |K(x, z) - K(x, z)|_{z_1 = a_1 - 2\delta}|\,dz < 1$, то единица не является характеристическим числом ядра $c[K(x, z) - K(x, z)|_{z_1 = a_1 - 2\delta}]$ (рассматриваемого на S), и, следовательно, уравнение (7.3) имеет непрерывное (по $x, y \in S$) решение $-\chi(x, y)$.

Пусть

$$\psi_1(x, y) = \psi(x, y)|_{x_1 = a_1} + \int\limits_{a_1}^{x_1} \chi(x, y)|_{x_1 = \xi}\,d\xi.$$

Интегрируя (7.3) по x_1 в пределах a_1, x_1 и замечая, что почти всюду

$$c\int\limits_{a_1}^{x_1}[K(x,z)-K(x,z)|_{z_1=a_1-2\delta}]\,dx_1=-\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}]\,dz_1+$$

$$+\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\int\limits_{a_1}^{x_1}L(x,z)\,dx_1,$$

$$c\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1\int\limits_{S}[K(x,z)-K(x,z)|_{z=a_1-2\delta}]\,\chi(z,y)\,dz=$$

$$=\int\limits_{S}\left\{\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\left[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1\,L(x,z)\right]\right\}\chi(z,y)\,dz=$$

$$=\int\limits_{S}\left[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}L(x,z)\,dx_1\right]\psi_1(z,y)\,dz-$$

$$-\int\limits_{a_2-\delta}^{a_2+\delta}dz_2\ldots\int\limits_{a_n-\delta}^{a_n+\delta}dz_n\left[\left\{\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\left(K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1L(x,z)\right)\right\}\varphi_1(z,y)\right]_{z_1=a_1-\delta}^{z_1=a_1+\delta},$$

получают

$$\int\limits_{S}\left[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}L(x,z)\,dx_1\right]\psi_1(z,y)\,dz-$$

$$-\int\limits_{a_2-\delta}^{a_2+\delta}dz_2\ldots\int\limits_{a_n-\delta}^{a_n+\delta}dz_n\left[\left\{\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\left(K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1L(x,z)\right)\right\}\psi_1(z,y)\right]_{z_1=a_1-\delta}^{z_1=a_1+\delta}-$$

$$-\psi_1(x,y)+\psi(x,y)|_{x_1=a_1}=\varphi(x,y)-\varphi(x,y)|_{x_1=a_1}-$$

$$-\int\limits_{a_2-\delta}^{a_2+\delta}dz_2\ldots\int\limits_{a_n-\delta}^{a_n+\delta}dz_n\left[\left\{\int\limits_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\left(K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1L(x,z)\right)\right\}\psi(z,y)\right]_{z_1=a_1-\delta}^{z_1=a_1+\delta}-$$

$$-\int\limits_{a_1}^{x_1}dx_1\int\limits_{S}L(x,z)\,\psi(z,y)\,dz-\int\limits_{V-S}[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}]\,\psi(z,y)\,dz.$$

С другой стороны, из (7.1)

$$\int_S [K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}]\psi(z,y)\,dz-\psi(x,y)+\psi(x,y)|_{x_1=a_1}=$$

$$=\varphi(x,y)-\psi(x,y)|_{x_1=a_1}-\int_{V-S}[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}]\,\psi(z,y)\,dz.$$

Таким образом, окончательно получается

$$\int_S\left[K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\int_{a_1}^{x_1}L(x,z)\,dx_1\right][\psi_1(z,y)-\psi(z,y)]\,dz-$$

$$-\int_{a_2-\delta}^{a_2+\delta}dz_2\ldots\int_{a_n-\delta}^{a_n+\delta}dz_n\left[\int_{a_1-2\delta}^{z_1}dz_1\left(K(x,z)-K(x,z)|_{x_1=a_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{a_1}^{x_1}dx_1\,L(x,z)\right)\right][\psi_1(z,y)-\psi(z,y)]_{z_1=a_1-\delta}^{z_1=a_1+\delta}=\psi_1(x,y)-\psi(x,y).$$

На основании (7.2) отсюда получают

$$\frac{1}{2}\max_{x\in S}|\psi_1(x,y)-\psi(x,y)|\geqslant|\psi_1(x,y)-\psi(x,y)|$$

и, наконец,

$$\psi_1(x,y)=\psi(x,y)\qquad(x\in S).$$

Лемма доказана.

8. Здесь будет доказана теорема существования фундаментальной матрицы (φ_{kl}) для операторной матрицы

$$(A'_{kl})\quad(k,l=1,\ldots,p)$$

эллиптического типа.

Пусть

$$(A_{kl})=\sum_{j_1,\ldots,j_n\geqslant 0}f_{kl}^{j_1\ldots j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}$$

есть оператор порядка s_{kl}, коэфициенты которого суть комплексные функции действительных аргументов $x_1,\ldots,x_n$, непрерывно диференцируемые s раз в некоторой области D. Пусть $f(x,\alpha)$, $f_{kl}(x,\alpha)$ суть соответственно определитель матрицы

$$\left((-1)^{S_k}\sum_{j_1+\ldots+j_n=s_k}f_{kl}^{j_1\ldots j_n}(x)\,\alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\right)$$

$(s_k=\max\limits_l s_{kl})$ и алгебраическое дополнение элемента с индексами (kl) в этой матрице; $f(x,\alpha)$ есть форма степени $s=\sum\limits_{k=1}^{p}s_k$, которая предполагается определенной; $f_{kl}(x, \alpha)$ есть или форма степени $s-s_k$ или нуль.

Пусть $x, y, z \in D$ и $\varphi(x-y, z)$ есть построенная в п. 2 фундаментальная (по x) в точке y функция оператора $f\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Имеют место очевидные свойства

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}\varphi(x-y, z)=(-1)^{j_1+\ldots+j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial y_1^{j_1}\ldots\partial y_n^{j_n}}\varphi(x-y, z),$$

$$\left|\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n+j_1'+\ldots+j_n'}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}\partial z_1^{j_1'}\ldots\partial z_n^{j_n'}}\varphi(x-y, z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \mu_1(z)\,|x-y|^{s-n-\sum\limits_{k=1}^{n} j_k}\lg|x-y| & \left(s \geqslant n+\sum\limits_{k=1}^{n} j_k\right) \\ \mu_1(z)\,|x-y|^{s-n-\sum\limits_{k=1}^{n} j_k} & \left(s < n+\sum\limits_{k=1}^{n} j_k\right) \end{cases}$$

при $j_1'+\ldots+j_n'\leqslant s$, причем $\mu_1(z)$ ограничено в каждой конечной замкнутой части области D.

Полагая тогда $\psi(x, y)=\varphi(x-y, x)$, заключают, что

$$\left|\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n+j_1'+\ldots+j_n'}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{j_1'}\ldots\partial y_n^{j_n'}}\psi(x, y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \mu(x)\,|x-y|^{s-n-\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')}\lg|x-y| & \left(s \geqslant n+\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')\right), \\ \mu(x)\,|x-y|^{s-n-\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')} & \left(s < n+\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')\right); \end{cases} \tag{8.1}$$

при этом предполагается, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')\leqslant s$ и $\mu(x)$ ограничено в каждой конечной замкнутой части области D. Таким образом, в обозначениях п. 7 в каждой такой части V, при $\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')\leqslant s$,

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n+j_1'+\ldots+j_n'}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{j_1'}\ldots\partial y_n^{j_n'}}\psi(x, y)\in K_{-\left(s-n-\sum\limits_{k=1}^{n}(j_k+j_k')\right)}.$$

Как легко видеть, далее

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}\psi(x, y)}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}-(-1)^{j_1+\ldots+j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}\psi(x, y)}{\partial y_1^{j_1}\ldots\partial y_n^{j_n}}\in K_{-\left(s-n-\sum\limits_{k=1}^{n} j_k\right)-1}. \tag{8.2}$$

Теперь составляющие φ_{kl} фундаментальной матрицы в точке y для области V будут определяться в виде (см. п. 1)

$$\varphi_{kl}(x, y) = \psi_k(x, y) + \sum_{j=1}^{p} \int_V \psi_{kj}(x, z) g_{jl}(z, y)\, dz + g_{kl}(x, y), \tag{8.3}$$

$$\psi_{kl}(x, y) = f_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, y), \tag{8.4}$$

где функции $g_{kl}(x, y)$ подлежат определению.

Прежде всего высказывается гипотеза, что $g_{kl}(x, y) \in K_{n-0}$ и $\frac{\partial}{\partial x_j} g_{kl}(x, y)$ $(k, l = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, n)$ непрерывны по x и y при $x, y \in V$, $x \neq y$; далее предполагается, что $g_{kl}(x, y)$ и

$$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} g_{kl}(x, y) \quad (j_1 + \ldots + j_n \leqslant \max_l s_{kl})$$

принадлежат K_{n-0}.

Функции φ_{kl} должны удовлетворять прежде всего условиям (1.3).

Пусть

$$A'_{kl} = (-1)^{s_{kl}} \sum_{j_1+\ldots+j_n = s_{kl}} f_{kl}^{j_1 \ldots j_n} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} + A''_{kl} = A^0_{kl} + A''_{kl},$$

порядок A''_{kl} меньше s_{kl}. Тогда, в предположении, что порядок $A'_{kl} f_{kl'}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не больше чем s, заключают, что порядок $A''_{kl} f_{kl'}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ меньше s и, следовательно,

$$A''_{jk} \varphi_{jk}(x, y) = A''_{jk} \psi_{jl}(x, y) + \sum_{j=1}^{p} \int_V A'_{jk} \psi_{jm}(x, z) \cdot g_{ml}(z, y)\, dz +$$

$$+ A''_{jk} h_{jl}(x, y). \tag{8.5}$$

Пусть S некоторый достаточно малый шар радиуса ϱ, содержащий точку x и не содержащий точки y, с границей C; $\overline{S} \subseteq V$.

Пусть

$$f_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - f_{kl}\left(x, -\frac{\partial}{\partial y}\right) = f^0_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Очевидно, на основании (8.1), (8.2), что при $j_1 + \ldots + j_n \leqslant S_k$, $x, y \in V$

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} f^0_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(x, y) \in K_{n-1}. \tag{8.6}$$

Пусть

$$f_{kl}\left(x, -\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_q} f_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где f_{qkl} есть оператор меньшего порядка, чем f_{kl}. Тогда

$$\int_S \psi_{jm}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz = \int_S \left\{ f_{jm}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\, dz =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \int_S \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\, dz +$$

$$+ \int_S \left\{ \overset{\circ}{f}_{jm}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\, dz =$$

$$= -\sum_{q=1}^{n} \int_S \left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} \frac{\partial}{\partial z_q} g_{ml}(z, y)\, dz +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \int_C \left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y) \cos(n, z_q)\, dC_z +$$

$$+ \int_S \left\{ \overset{\circ}{f}_{jm}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\, dz.$$

Следовательно, замечая возможность диференцирования здесь по x под знаком интеграла до s_j порядка, на основании (8.5) получают

$$\sum_{j=1}^{p} A'_{jk} \varphi_{jl}(x, y) = \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} \psi_{jl}(x, y) + \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} h_{jl}(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \int_{F-S} A'_{jk} \psi_{jm}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz + \sum_{j,\, m=1}^{p} \int_S A''_{jk} \psi_{jm}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz - \tag{8.7}$$

$$- \sum_{j,\, m=1}^{p} \sum_{q=1}^{n} \int_S \overset{\circ}{A}_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} \frac{\partial}{\partial z_q} g_{ml}(z, y)\, dz +$$

$$+ \sum_{j,\, m=1}^{p} \sum_{q=1}^{n} \int_C \overset{\circ}{A}_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y) \cos(n, z_q)\, dC_z +$$

$$+ \sum_{j,\, m=1}^{p} \int_S \overset{\circ}{A}_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \overset{\circ}{f}_{jm}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\, dz.$$

Здесь n есть внешняя нормаль к C, dC_z элемент C, z точка интегрирования.

Пусть теперь точка x есть центр S и S стягивается к точке x. Тогда на основании (8.1) четвертое, пятое и седьмое слагаемые стремятся к нулю.

Далее,

$$\sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jm}(x, z) = \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} f_{jm}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, z) \in K_{n-1},$$

следовательно, третье слагаемое имеет предел

$$\sum_{m=1}^{p}\int_V \sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jm}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz.$$

Остается определить предел шестого слагаемого.

Прежде всего вследствие оценок (8.1), (8.2)

$$\begin{gathered}\int_C \left[A^{0}_{jk}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x, z)\right\} - \right.\\ \left. - A^{0}_{jk}\left(x, -\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{ f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x, z)\right\}\right] g_{ml}(z, y)\cos(n, z_q)\, dC_z \xrightarrow[S\to 0]{} 0.\end{gathered} \tag{8.8}$$

Теперь будет преобразовано

$$\sum_{j=1}^{p} A^{0}_{jk}\left(x, -\frac{\partial}{\partial z}\right) f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right) = f^{x}_{qkm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{8.9}$$

Так как коэфициенты этих диференциальных операторов не зависят от z, то их можно рассматривать как полиномы $\frac{\partial}{\partial z}$; $\frac{\partial}{\partial z}$ для удобства заменяется через неопределенное

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Наконец,

$$\sum_{j=1}^{p} A^{0}_{jk}(x, \alpha)\, f_{jm}(x, \alpha) = \delta_{km} f(x, \alpha)$$

и, следовательно,

$$\sum_{q=1}^{n} \alpha_q f^{x}_{qkm}(x, \alpha) = \delta_{km} f(x, -\alpha),$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & (k = m), \\ 0 & (k \neq m). \end{cases}$$

Основываясь на леммах 1, 2 п. 5 и на (8.8), сразу получают

$$\int\limits_C \sum_{j=1}^{p} A_{jk}^{0}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x, z)\right\} g_{ml}(z, y)\cos(n, z_q)\, dC_z \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \qquad (k \neq m),$$

$$\int\limits_C \sum_{j=1}^{p} A_{jk}^{0}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{f_{qjm}\left(x, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x, z)\right\} g_{kl}(z, y)\cos(n, z_q)\, dC_z \xrightarrow[\rho\to 0]{} -g_{kl}(x, y),$$
$$(k = m).$$

Таким образом, (8.7) приводит к соотношению:

$$\sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\varphi_{jl}(x, y) = \sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jl}(x, y) + \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} h_{jl}(x, y) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{V} \left\{ \sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jm}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz - g_{kl}(x, y).\right.$$

Полагая $\sum\limits_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jm}(x, y) = L_{km}(x, y)$ и замечая, что $L_{km}(x, y) \in K_{n-1}$, для определения $g_{kl}(x, y)$, $h_{kl}(x, y)$ получают систему уравнений, интегральных относительно $g_{kl}(x, y)$

$$\sum_{m=1}^{p} \int\limits_{V} L_{km}(x, z)\, g_{ml}(z, y)\, dz - g_{kl}(x, y) =$$
$$= -\sum_{j=1}^{p} A'_{jk}\psi_{jl}(x, y) - \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} h_{jl}(x, y) \qquad (k, l = 1, \ldots, p). \tag{8.10}$$

К этой системе (рассматриваемой при фиксированном l) применима теория Фредгольма. Поэтому, если однородная система имеет только нулевое непрерывное решение, можно положить $h_{jl}(x, y) = 0$. По лемме 1 п. 7 следует, что решение $(g_{ml}(x, y))$ этой системы будет непрерывно диференцируемым при $x \neq y$, и, следовательно, формулы (8.3), (8.4) определяют искомую фундаментальную матрицу.

Пусть теперь однородная система (8.10) (при фиксированном l) имеет ненулевые непрерывные решения. Пусть $t_{kq}(x)$ при каждом $q = 1, \ldots, r$ образуют полную систему независимых решений однородной системы, сопряженной к (8.10).

Условие разрешимости неоднородной системы (8.10) (при фиксированном l) тогда представим в форме

$$\sum_{j,k=1}^{p} \int\limits_{V} t_{kq}(x)\, A'_{jk}\psi_{jl}(x, y)\, dx + \sum_{j,k=1}^{p} \int\limits_{V} t_{qk}(x)\, A'_{jk} h_{jl}(x, y)\, dx = 0 \tag{8.11}$$
$$(q = 1, \ldots, r).$$

Достаточно положить

$$h_{jl}(x, y)=\sum_{q=1}^{r} P_{jq}(x) Q_{ql}(y) \tag{8.12}$$

и подобрать $P_{jq}(x)$ так, чтобы числа

$$\sum_{k=1}^{p} \int_V t_{kq}(x) \sum_{j=1}^{p} A'_{jk} P_{jq'}(x)\, dx = \tau_{qq'} \quad (q, q'=1, \ldots, r) \tag{8.13}$$

образовывали определитель, отличный от нуля.

Тогда формулы (8.12) позволят определить $h_{kl}(x, y)$, удовлетворяющие условию разрешимости (8.11).

Остается показать возможность выбора функций $P_{kl}(x)$, непрерывно диференцируемых нужное число раз так, чтобы $\det(\tau_{qq'}) \neq 0$.

Пусть $R_{kq'}(x)$ $(k=1, \ldots, p;\ q'=1, \ldots, r)$ произвольные непрерывные в $\overline{V}$ функции такие, что числа

$$\sum_{k=1}^{p} \int_V t_{kq}(x) R_{kq'}(x)\, dx = \sigma_{qq'} \tag{8.14}$$

образуют детерминант, отличный от нуля.

Для этого достаточно, чтобы векторы $(R_{1q'}(x), \ldots, R_{pq'}(x))$ $(q'=1, \ldots, r)$ в Гильбертовом пространстве образовывали r-мерное многообразие ортогональное многообразию, порождаемому векторами $(t_{1q}(x), \ldots, t_{pq}(x))$ $(q=1, \ldots, r)$.

Функции $R_{kq'}(x)$ можно считать непрерывно диференцируемыми.

Пусть теперь $\mu>0$ таково, что для всякого круга, лежащего вместе с границей в D, радиуса, меньшего μ,

$$\int_S |L_{km}(x, z)|\, dz \leqslant \frac{1}{2p} \qquad (x \in \overline{V}). \tag{8.15}$$

Тогда система

$$\sum_{m=1}^{p} \int_S L_{km}(x, z)\, g_m(z)\, dz - g_k(x) = 0 \qquad (k=1, \ldots, p)$$

имеет, как легко видеть, только нулевое непрерывное решение во всяком круге S.

Но тогда система

$$\sum_{m=1}^{p} \int_S L_{km}(x, y)\, q_{mq'}(z)\, dz - g_{kq'}(x) = R_{kq'}(x)$$

имеет в круге S единственное непрерывное решение

$$g_{kq'}(x/s) \qquad (k=1, \ldots, p),$$

следовательно, функции

$$h_{kq'}(x\,|\,s)=\sum_{j=1}^{p}\int\limits_{S}\psi_{kj}(x,z)\,g_{jq'}(z)\,dz \qquad (k=1,\ldots,p)$$

есть непрерывные и непрерывно диференцируемые в S функции, удовлетворяющие в S системе

$$\sum_{j=1}^{p}A'_{jk}\,h_{jq'}(x\,|\,s)=R_{kq'}(x).$$

Пусть теперь $S_1,\ldots,S_N$ шары радиуса, меньшего μ, покрывающие $\overline{V}$.

Пусть $h_{kq'}(x)$ определено на $\overline{V}$ правилом

$$h_{kq'}(x)=h_{kq'}(x|S_i),$$

где S_i есть шар наименьшего индекса, содержащий точку.

Функции $h_{kq'}(x)$ вместе с их производными до порядка s_k суммируемы в квадрате по области $\overline{V}$ и удовлетворяют почти всюду в этой области системе

$$\sum_{j=1}^{p}A'_{jk}\,h_{jq'}(x)=R_{kq'}(x) \qquad (k=1,\ldots,p).$$

В Гильбертовом пространстве векторов $(a_1(x),\ldots,a_n(x))$ $(x\in\overline{V})$ подмножество векторов, неограниченно диференцируемых, всюду плотно.

Если $h^0_{kq'}(x)$ такие неограниченно непрерывно диференцируемые функции, что $\sum_{j=1}^{p}A'_{jk}\,h^0_{jq'}(x)=R^0_{kq'}(x)$ и

$$\sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{V}|R^0_{kq'}(x)-R_{kq'}(x)|^2\,dx$$

достаточно мало, то определитель, составленный из чисел

$$\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{V}t_{kq}(x)\,R^0_{kq'}(x)\,dx=\sigma^0_{qq'},$$

будет отличаться как угодно мало от определителя $\det(\sigma_{qq'})$; итак, можно считать $\det(\sigma^0_{qq'})\neq 0$, и возможность выбора функций $P_{kq}(x)$ доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Э. Леви, Усп. матем. наук, 8, 449 (1941).

2. З. Я. Шапиро, ДАН, 46, № 4 (1945).

3. П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М., 1947.

Поступила 15.VI 1950 г.