Квазиконформные отображения и задачи на конформное склеивание

Л. И. Волковыский

Введение

В настоящей статье рассматриваются некоторые задачи на конформное склеивание, имеющие значение для проблемы типа односвязной римановой поверхности, а также для изучения диференциальных свойств квазиконформных отображений.

Для удобства читателя приводим некоторые используемые ниже сведения о квазиконформных отображениях.

I. Теорема существования ([1], теорема 3; мы приводим эту теорему в усиленной форме, вытекающей из построений М. А. Лаврентьева и указанной П. П. Белинским). *Какова бы ни была область G, расположенная в круге $|z|<1$ и каковы бы ни были характеристики $p(z)<M$ и $\theta(z)$, непрерывные в G, существует гомеоморфное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, квазиконформное с данными характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$ в области G.* При этом, как обычно, квазиконформность отображения выражается в том, что оно переводит в бесконечно малый круг бесконечно малый эллипс с отношением полуосей, равным $p(z)$, и углом между большой осью и осью иксов, равным $\theta(z)$ ($\theta(z)$ *определена и рассматривается только там, где* $p(z)\neq 1$). Заметим, что для точек диференцируемости квазиконформного отображения $w=f(z)=u+iv$ имеем

$$p+\frac{1}{p}=\frac{E+G}{J},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{E-G+\sqrt{(E-G)^2+4F^2}}{-2F},$$

где

$$E=u_x^2+v_x^2,\quad F=u_xu_y+v_xv_y,\quad G=u_y^2+v_y^2,\quad J=u_xv_y-u_yv_x.$$

II. *Из всякой последовательности квазиконформных отображений $\{f_n(z)\}$ круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, нормированных $f_n(0)=0$ и имеющих непрерывные равномерно (для всей последовательности) ограниченные характеристики, можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, сходящуюся равномерно внутри круга $|z|<1$ к гомеоморфному его отображению на круг $|w|<1$.*

III. Теорема О. Тайхмюллера (см. [2], а также [3]). *Если функция $w=f(z)$ осуществляет квазиконформное отображение области $|z|<\infty$ на область $|w|<\infty$ и интеграл*

$$\iint\limits_{|z|<\infty} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z < \infty$$

($d\sigma_z$ — элемент площади), *то существует* $\lim\limits_{z\to\infty} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = c$, $0<c<\infty$. Эту теорему можно формулировать и так: *если функция $w=f(z)$ осуществляет квазиконформное отображение области $0<|z|<1$ на область $0<|w|<1$ и интеграл*

$$\iint\limits_{0<|z|<1} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z = A < \infty,$$

то существует отличный от нуля $\lim\limits_{z\to 0} \left|\frac{f(z)}{z}\right|$. Можно показать, что этот предел не превосходит e^A.

IV. Теорема Б. В. Шабата ([4], стр. 206). *Квазиконформное отображение с характеристиками, удовлетворяющими условию Гельдера, с показателем δ ($0<\delta<1$) обладает частными производными, удовлетворяющими условию Гельдера с тем же показателем.*

1. Постановка задачи

Пусть $\varphi(x)$ непрерывная функция, определенная на отрезке $[-1,1]$ и возрастающая строго монотонно вместе с x от -1 до 1.

Мы скажем, что два полукруга D_1 ($|z|<1$, $y>0$) и D_2 ($|z|<1$, $y<0$), расположенные в плоскости $z=x+iy$, допускают *конформное склеивание*, соответствующее функции $\varphi(x)$, если можно указать две функции $w=f_1(z)$ и $w=f_2(z)$, конформно отображающие D_1 и D_2 на области D_1' и D_2', представляющие разбиение круга $|w|<1$ посредством некоторой открытой жордановой дуги γ так, что при обоих отображениях граничный диаметр $(-1, 1)$ полукругов D_1 и D_2 переходит в γ, причем

$$f_1(x)=f_2[\varphi(x)] \tag{1}$$

для всех $x\in(-1, 1)$. Мы скажем далее, что *склеивание является вполне определенным,* если оно определяется с точностью до линейного преобразования круга $|w|<1$ самого в себя.

Функцию $\varphi(x)$ будем называть *функцией склеивания,* линию γ — *линией склеивания,* функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — *склеивающими функциями.*

Задача на склеивание полукругов D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$ состоит в том, чтобы узнать, при каких ограничениях на $\varphi(x)$ склеивание возможно или возможно и является вполне определенным (вместо „конформное склеивание“ мы будем иногда говорить просто „склеивание“). Дополнением к этой задаче служит вопрос о связи между свойствами линии склеивания, функции склеивания и склеивающих функций.

Аналогично ставится задача на склеивание круга $|z|<1$ с радиальным разрезом, оба края которого связаны между собой некоторой функцией склеивания, а также задача на склеивание нескольких круговых секторов, составляющих вместе круг $|z|<1$ и связанных между собой попарно функциями склеивания вдоль общих граничных радиусов.

Заменяя в предыдущем круг $|z|<1$ на всю конечную плоскость $|z|<\infty$ и круг $|w|<1$ — на область $|w|<R\leqslant\infty$, приходим к задаче на склеивание двух полуплоскостей, плоскости с лучевым разрезом и плоскости, разбитой на конечное число углов с общей вершиной. В этом случае возникает еще задача о типе склеивания: *если $R<\infty$ — склеивание гиперболического типа, если $R=\infty$ — склеивание параболического типа.*

2. Возможность склеивания

Из теоремы существования квазиконформных отображений (см. введение) легко следует, что конформное склеивание полукругов D_1 и D_2 всегда возможно, если возможно их квазиконформное склеивание с ограниченными и непрерывными в D_1 и D_2 характеристиками. В самом деле, пусть функции $\zeta=f_1(z)$ и $\zeta=f_2(z)$ производят подобное квазиконформное склеивание полукругов D_1 и D_2 в круге $|\zeta|<1$. При этом склеивании бесконечно малым кругам в D_1 и D_2 в круге $|\zeta|<1$ соответствуют бесконечно малые эллипсы с некоторыми характеристиками $p(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$. Если $w=\Phi(\zeta)$ функция, реализующая гомеоморфное отображение круга $|\zeta|<1$ на круг $|w|<1$, квазиконформное с характеристиками $p(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$ вне линии склеивания, то функции $\Phi[f_1(z)]$ и $\Phi[f_2(z)]$ производят конформное склеивание D_1 и D_2.

Подобное построение конформного склеивания с помощью квазиконформного легко осуществимо в том важном случае (см. [5], а также [6]), когда функция склеивания $\varphi(x)$ всюду на интервале $(-1,1)$, исключая, быть может, произвольную точку x_0, обладает непрерывной положительной производной, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{K}<\varphi'(x)<K \tag{2}$$

или более общему условию

$$\frac{1}{K}<\frac{\varphi'(x)}{|x-x_0|^{\alpha}}<K, \tag{3}$$

где K — постоянная и $\alpha\neq-1$. Не останавливаясь на случае, когда выполняется условие (2), заметим, что второй случай, когда выполняется условие (3), сводится к первому посредством вспомогательного квазиконформного отображения полукруга D_1 самого на себя. Это отображение, в случае когда $x_0=\varphi(x_0)=0$ (к этому легко приводится общий случай путем линейных преобразований D_1 и D_2 самих на себя), можно взять в виде

$$\varrho=r^{1+\alpha}, \quad \vartheta=t,$$

где (r, t) и (ϱ, ϑ) — полярные координаты в D_1 до и после отображения.

3. Определенность склеивания

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если функция склеивания $\varphi(x)$ полукругов D_1 и D_2 всюду на отрезке $[-1,1]$ имеет положительную непрерывную производную $\varphi'(x)$, удовлетворяющую условию*

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{\varphi'(x)-\varphi'(t)}{x-t}\right| dx<K, \tag{4}$$

где t — произвольная точка отрезка $[-1,1]$ и K — постоянная, не зависящая от t, возможно вполне определенное склеивание, причем функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, производящие склеивание, имеют отличные от нуля производные $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, равномерно ограниченные на любом отрезке $[\alpha, \beta]$ интервала $(-1,1)$.

Доказательство. Продолжим функцию $\varphi(x)$ линейно за отрезок $[-1, 1]$, полагая для $x>1$ и $x<-1$ соответственно

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)=1+(x-1)\varphi'(1), \\ \varphi(x)=-1+(x+1)\varphi'(-1)\end{array}\right. \tag{5}$$

и рассмотрим квазиконформное склеивание полукругов D_1 и D_2, осуществляемое функциями

$$\left\{\begin{array}{l}\zeta_1(z)=\varphi(x)+i[\varphi(x+y)-\varphi(x)] \quad \text{для} \quad z\in D_1, \\ \zeta_2(z)\equiv z \quad \text{для} \quad z\in D_2\end{array}\right. \tag{6}$$

(использование функции вида $\zeta_1(z)$ было мне указано М. А. Лаврентьевым в устной беседе). Характеристики $p_1(\zeta)$ и $\theta_1(\zeta)$ первого отображения (бесконечно малые круги берем в области D_1) определяются из соотношений

$$\left\{\begin{array}{l}p_1+\dfrac{1}{p_1}=2\left[\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi'(x+y)}+\dfrac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)}-1\right], \\ \operatorname{tg}\theta_1=\dfrac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)}+\sqrt{\left[\dfrac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)}\right]^2+1},\end{array}\right. \tag{7}$$

откуда видно, что p_1 и θ_1 непрерывны до линии склеивания, соответствующей $y=0$ и совпадающей с интервалом $(-1, 1)$, затем p_1 ограничено ничена и стремится к 1 при $y \to 0$. С другой стороны, в области D_2 соответствующая характеристика $p_2 \equiv 1$.

Обозначая через D_1' область $\zeta_1(D_1)$ и полагая

$$p(\zeta)=p_1(\zeta), \quad \theta(\zeta)=\theta_1(\zeta) \text{ для } \zeta \in D_1',$$
$$p(\zeta) \equiv 1 \text{ для } \zeta \in D_2,$$

получаем характеристики $p(\zeta)$, $\theta(\zeta)$, непрерывные в области склеивания $D=D_1'+D_2$. Квазиконформное отображение $w=f(\zeta)$ области D с характеристиками $p(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$ на круг $|w|<1$ приводит к конформному склеиванию исходных полукругов D_1 и D_2 посредством функций $f_1(z)=f[\zeta_1(z)]$, $z \in D_1$ и $f_2(z)=f[\zeta_2(z)]$, $z \in D_2$.

Зафиксируем теперь в плоскости z отрезок $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ и на нем произвольную точку x_0. Пусть $\zeta=\psi(\tau)$ конформно отображает круг $|\tau|<1$, лежащий в плоскости вспомогательного переменного τ, на область D так, что $\psi(0)=\zeta_0=\varphi(x_0)$. Тогда функция $w=f[\psi(\tau)]=\chi(\tau)$ отображает квазиконформно круг $|\tau|<1$ на круг $|w|<1$, причем $\chi(0)=f(\zeta_0)$ и характеристика $p[\zeta(\tau)]$ равна 1 при $\tau=0$. Так как при квазиконформном склеивании (6) и конформном отображении $\psi(\tau)$ растяжения для $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и соответственно для $\zeta_0 \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ отличны от нуля и равномерно ограничены, то для доказательства утверждения теоремы о существовании и равномерной ограниченности производной $f_1'(x_0)$ достаточно показать, что отображение $\chi(\tau)$ имеет отличное от нуля и равномерно ограниченное растяжение в начале. На основании теоремы Тайхмюллера (см. введение) для этого достаточно показать равномерную ограниченность интеграла

$$\iint\limits_{|\tau|<1} \frac{p[\zeta(\tau)]-1}{|\tau|^2}\, d\sigma_\tau, \tag{8}$$

где $d\sigma_\tau$ — элемент площади.

Интеграл (8) будет, очевидно, равномерно ограничен вместе с интегралом

$$\iint\limits_{(D)} \frac{p(\zeta)-1}{|\zeta-\zeta_0|^2}\, d\sigma_\zeta,$$

эквивалентным интегралу

$$\iint\limits_{(D_2')} \frac{\sqrt{p(\zeta)+\dfrac{1}{p(\zeta)}-2}}{|\zeta-\zeta_0|^2}\, d\sigma_\zeta$$

(напомним, что в D_2 $p(\zeta) \equiv 1$), который, в силу (7), равномерно ограничен вместе с интегралом

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{|\varphi'(x+y)-\varphi'(x)|}{|z-x_0|}\, d\sigma_z,$$

эквивалентным интегралу

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{|\tilde{\varphi}'(x+y)-\tilde{\varphi}'(x)|}{|z|^2}\, d\sigma_z,$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ — функция склеивания, получающаяся из $\varphi(x)$ при линейном преобразовании полукруга D_1 самого в себя так, что точки -1, x_0, 1 переходят соответственно в точки -1, 0, 1. Замечая, что для $\tilde{\varphi}(x)$ сохраняется условие (4) с постоянной, *зависящей от* $[\alpha, \beta]$, и представляя последний интеграл в виде

$$\int\limits_0^\pi dt \int\limits_0^1 \frac{|\tilde{\varphi}'(x+y)-\tilde{\varphi}'(x)|}{r}\, dr, \quad x=r\cos t, \quad y=r\sin t,$$

докажем его, а с ним и интеграла (8), равномерную ограниченность для $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Из соотношения $f_2(x)=f_1[\varphi^{-1}(x)]$ заключаем, что вместе с $f_1'(x)$ существует производная $f_2'(x)$, равномерно ограниченная на любом отрезке интервала $(-1, 1)$. Таким образом теорема 1 доказана полностью.

* *
*

Спрашивается, можно ли в условиях теоремы 1 утверждать равномерную ограниченность производных $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ *на всем отрезке* $[-1,1]$? Утвердительный ответ напрашивается из следующих соображений. Продолжая, хотя бы линейно, функцию склеивания за отрезок $[-1,1]$ и склеивая конформно несколько увеличенные полукруги $D_1^* \supset D_1$ и $D_2^* \supset D_2$ посредством каких-то функций $\zeta=f_1^*(z)$ и $\zeta=f_2^*(z)$ мы одновременно производим склеивание полукругов D_1 и D_2 с некоторой областью склеивания D^* и линией склеивания γ^*, лежащими внутри круга $|\zeta|<1$. К этому склеиванию D_1 и D_2 применимо заключение теоремы 1; если бы нам было еще известно, что на концах дуги γ^* граница Γ^* области D^* ведет себя достаточно хорошо, то, отображая D^* конформно на круг $|w|<1$, мы пришли бы к высказанному выше утвердительному ответу на поставленный вопрос. Однако такое заключение о поведении Γ^* нам неизвестно. В связи с этим заметим, что нам неизвестно доказательство (или опровержение) следующего вероятного утверждения: *если Γ^* спрямляема, то образ γ линии γ^* в круге $|w|<1$ также спрямляем и более того, если фиксированы только линия γ^* и длина $l(\Gamma^*)\leqslant K$, то длина $l(\gamma)<C$, где C зависит только от γ^* и K.* Ниже мы из других, элементарных, соображений получаем утвердительный ответ на наш вопрос.

Прежде всего заметим, что теорема 1 распространяется на случай склеивания двух полуплоскостей $y>0$ и $y<0$ с положительной непрерывно диференцируемой функцией склеивания $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_a^b \left| \frac{\varphi'(x)-\varphi'(t)}{x-t} \right| dx < K, \tag{9}$$

где $t \in [a, b] \subset (-\infty, \infty)$ и K зависит от $[a, b]$. Доказательство даже проще, так как функцию $\varphi(x)$ не нужно продолжать и нет необходимости вводить плоскость τ. В качестве области склеивания получаем круг конечного или бесконечного радиуса: $|w| < R \leqslant \infty$.

Заметив это, вернемся к случаю склеивания из теоремы 1. Предполагая дополнительно, что $\varphi(0) = 0$, продолжим $\varphi(x)$ за отрезок $[-1,1]$ по принципу симметрии, то есть положим $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)}$ для $|x| > 1$. Если теперь функции $w = f_1(z)$ и $w = f_2(z)$ производят конформное склеивание полукругов D_1 и D_2 с областью склеивания $|w| < 1$, то, продолжая эти функции по принципу симметрии за круг $|z| > 1$, получим конформное склеивание полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$ с построенной выше функцией склеивания. Из условия (4) и способа продолжения $\varphi(x)$ на всю ось иксов легко следует, что выполняется условие (9), но тогда, как было указано выше, для склеивания полуплоскостей справедлива теорема, аналогичная теореме 1. Беря в качестве отрезка $[\alpha, \beta]$ отрезок $[-1,1]$, приходим к высказанному выше утверждению. Так как ограничение $\varphi(0) = 0$, очевидно, не существенно, то нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 производные* $f_1'(x)$ *и* $f_2'(x)$ *существуют и равномерно ограничены на всем отрезке* $[-1,1]$.

* *
*

Если речь идет только о спрямляемости линии склеивания, ограничения на диференциальные свойства функции склеивания, содержащиеся в предыдущих теоремах, можно значительно ослабить. Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Если функция склеивания* $\varphi(x)$ *полукругов* D_1 *и* D_2 *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{K} < \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} < K, \tag{10}$$

где K *— постоянная и* x_1, x_2 *— произвольные две точки отрезка* $[-1,1]$, *а также условию*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{\varphi'(x)-\varphi'(t)}{x-t} \right| dx < K, \tag{11}$$

где $\varphi'(x)$ *определена почти всюду, интеграл берется в смысле Лебега и* t *— произвольная точка диференцируемости* $\varphi(x)$, *то склеивание воз-*

можно, линия склеивания — спрямляема, и склеивание является вполне определенным.

Доказательство. Построим последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2,\ldots)$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, имеющих там непрерывные производные $\{\varphi'_n(x)\}$ и удовлетворяющих следующим условиям: $\varphi_n(\pm 1)=\pm 1$; $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, $\varphi'_n(x) \to \varphi'(x)$ в точках диференцируемости функции $\varphi(x)$ и

$$\frac{1}{\tilde{K}} < \varphi'_n(x) < \tilde{K}, \quad \int_{-1}^{1} \left| \frac{\varphi'_n(x) - \varphi'_n(t)}{x-t} \right| dx < \tilde{K}, \tag{12}$$

где $\tilde{K}$ — не зависит от n и t — произвольная точка отрезка $[-1, 1]$[1]. Построим затем квазиконформное склеивание полукругов D_1 и D_2 с функциями склеивания $\varphi_n(x)$ посредством функций $\tau=\tau_n^{(1)}(z)$ и $\tau=\tau_n^{(2)}(z)$, поступая для этого как при доказательстве теоремы 1, то есть продолжая линейно $\varphi_n(x)$ за отрезок $[-1, 1]$, склеивая D_1 и D_2 посредством функций [см. (6)]

$$\begin{cases} \zeta_n^{(1)}(z)=\varphi_n(x)+i[\varphi_n(x+y)-\varphi_n(x)] \text{ для } z\in D_1, \\ \zeta_n^{(2)}(z)\equiv z \text{ для } z\in D_2 \end{cases} \tag{13}$$

и отображая конформно область склеивания $G_n = D_2+\zeta_n^{(1)}(D_1)$ на круг $|\tau|<1$. Тогда, если $\tau=\Phi_n(\zeta)$, $\tau_n^{(1)}(z)=\Phi_n[\zeta_n^{(1)}(z)]$ и $\tau_n^{(2)}(z)=\Phi_n[\zeta_n^{(2)}(z)]$.

Для дальнейшего заметим, что из равномерной сходимости $\varphi_n(x)$ к $\varphi(x)$ следует равномерная сходимость функций $\zeta_n^{(1)}(z)$ и $\zeta_n^{(2)}(z)$ соответственно внутри D_1 и D_2, а также равномерная сходимость функций $\Phi_n(\zeta)$ внутри области $G=\lim G_n$ при нормировке $\Phi_n(\zeta_0)=0$, $\Phi'_n(\zeta_0)>0$, где ζ_0 произвольная фиксированная точка области G. Отсюда следует, что *квазиконформные* склеивания $[\tau_n^{(1)}(z), \tau_n^{(2)}(z)]$, соответствующие функциям склеивания $\varphi_n(x)$, сходятся равномерно к некоторому, вообще *гомеоморфному,* склеиванию $[\tau^{(1)}(z), \tau^{(2)}(z)]$ полукругов D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$.

Из непрерывной диференцируемости функций $\varphi_n(x)$ и первого из условий (12) следует непрерывность и равномерная ограниченность характеристик $p_n(\tau)$ и $\theta_n(\tau)$ отображений $\Phi_n^{-1}(\tau)$. Поэтому, если $w=w_n(\tau)$

---

[1] Возможность такого аппроксимирования следует из известных теорем о приближении непрерывных функций. Для построения функций $\varphi_n(x)$ можно, например, воспользоваться интегралом Пуассона

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \frac{y\, d\xi}{(x-\xi)^2+y^2},$$

где $\varphi(\xi)\equiv 1$ для $\xi>1$ и $\varphi(\xi)\equiv -1$ для $\xi<-1$.

функции, отображающие квазиконформно с характеристиками $p_n(\tau)$, $\theta_n(\tau)$ круг $|\tau|<1$ на круг $|w|<1$, так что $w_n(0)=0$, то (см. введение) из последовательности $\{w_n(\tau)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{w_{n_k}(\tau)\}$, равномерно сходящуюся внутри круга $|\tau|<1$ к гомеоморфному его отображению $w(\tau)$ на круг $|w|<1$, причем $w(0)=0$. Функции $f_n^{(1)}(z)=w_n[\tau_n^{(1)}(z)]$ и $f_n^{(2)}(z)=w_n[\tau_n^{(2)}(z)]$ производят, очевидно, *конформное* склеивание полукругов D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi_n(x)$. Поэтому в силу равномерной сходимости функций $\tau_n^{(1)}(z)$, $\tau_n^{(2)}(z)$ и $w_{n_k}(\tau)$ заключаем, что функции $f_n^{(1)}(z)$ и $f_n^{(2)}(z)$ сходятся соответственно равномерно внутри D_1 и D_2 к некоторым функциям $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$, осуществляющим в круге $|w|<1$ конформное склеивание полукругов D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$.

Таким образом, доказана *возможность* конформного склеивания в условиях теоремы 3, *без условия* (11). Вспоминая доказательство теоремы 2, мы на основании условия (11) заключаем, что при склеиваниях $f_n^{(1)}(z)$, $f_n^{(2)}(z)$ в круге $|w|<1$ получаются линии склеивания γ_n с равномерно ограниченной длиной, откуда следует спрямляемость линии склеивания $\gamma=\lim\gamma_{nk}$, соответствующей склеиванию $f^{(1)}(z)$, $f^{(2)}(z)$, откуда, в свою очередь, следует определенность склеивания. Теорема 3 доказана полностью.

4. Общая задача на склеивание

Рассмотрим произвольную конечную или счетную систему однолистных односвязных областей $\{\Sigma\}$, каждая из которых ограничена конечным числом сторон, представляющих отрезки, лучи или прямые. Пусть $\{\varphi\}$ система функций, называемых далее функциями склеивания, каждая из которых устанавливает топологическое соответствие между парой граничных сторон областей $\{\Sigma\}$ (такие стороны могут быть граничными и для одной и той же области), причем каждой стороне соответствует не более одной другой стороны; кроме того, предположим, что в каждой конечной точке плоскости, где оканчиваются несколько сторон (такие точки в дальнейшем будем называть вершинами), число таких сторон конечно и соответствующие области вблизи вершины циклически следуют друг за другом (цикл может быть полным или неполным). Наконец, предположим, что, отождествляя соответствующие друг другу пары граничных точек и определяя для них естественным образом окрестности, мы получаем абстрактную поверхность Φ, которая при возможном включении в нее некоторых бесконечно удаленных вершин областей $\{\Sigma\}$ является односвязной.

Общая задача на склеивание может быть тогда сформулирована следующим образом: для каких систем $\{\Sigma, \varphi\}$ возможно конформное склеивание, то есть возможно такое угловое мероопределение в окрестностях точек склеивания на указанной выше односвязной поверхности Φ, которое, в соединении с эвклидовой угловой мерой, перенесенной на остальную часть Φ, превращает ее в односвязную риманову поверхность?

В случае возможности конформного склеивания, спрашивается да является ли склеивание вполне определенным, то есть определени с точностью до конформного отображения римановой поверхности скл вания. Наконец, когда склеивание является вполне определенным, воз кает вопрос о типе склеивания, то есть вопрос о типе односвязной ри новой поверхности, получаемой при конформном склеивании.

Прежде всего заметим, что для возможности вполне определенн склеивания в целом достаточно, чтобы в малом (в окрестностях то склеивания) склеивание было возможно всюду и, исключая, быть мож изолированные точки, было вполне определенным. В самом деле, в э случае склеивание в малом будет вполне определенным всюду, ибо в кие две области склеивания для окрестности какой-либо из указанн исключительных точек будут связаны гомеоморфным соответствием, к формным всюду вне пары точек, являющихся образами рассматривае исключительной точки, поэтому указанное соответствие областей бу конформным всюду. Теперь, поскольку в малом склеивание являе вполне определенным всюду, мы на поверхности можем ввести треб мую угловую метрику, превращающую ее в абстрактную односвязн риманову поверхность, и склеивание будет определено с точностью конформного отображения этой поверхности.

Замечая, что склеивание в малом эквивалентно склеиванию по кругов, круга с разрезом или круговых секторов, мы (на основании в шесказанного и теоремы 1) можем формулировать следующую теорему

Теорема 4. *Если для данной системы $\{\Sigma, \varphi\}$ функции склеи ния, исключая сколь угодно малые окрестности изолированных то склеивания, обладают положительными производными, удовлетворя щими условию* (4) *теоремы* 1, *с постоянной K, зависящей от выбо указанных окрестностей и вообще различной для различных склеив мых граничных отрезков областей $\{\Sigma\}$, в окрестностях же исключите ных точек функции склеивания удовлетворяют условию вида* (2) *ил для точек, отличных от вершин, условию вида* (3), *то система $\{\Sigma,$ допускает вполне определенное склеивание.*

5. Диференциальные свойства квазиконформных отображений

Если в теореме 1 условие (4) заменить более жестким требование H_δ (условие Гельдера с показателем δ, $0<\delta\leqslant 1$ и постоянной H):

$$|\varphi'(x_1)-\varphi'(x_2)|<H|x_1-x_2|^\delta, \qquad (4$$

где x_1, x_2 произвольные две точки отрезка $[-1, 1]$, то склеивающи функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в любой замкнутой части полукруга D_1 и соо ветственно D_2, имеющей с D_1 и соответственно с D_2, общую гранич ную дугу на интервале $(-1, 1)$, будут иметь частные производные

[1]) Некоторые теоремы и задачи на склеивание, имеющие значение для проблемы типа односвязной римановой поверхности, читатель найдет в нашей работе [6].

удовлетворяющие условию $H_{\delta'}'$, где показатель δ' совпадает с δ, если $\delta < 1$, и сколь угодно близок к 1, если $\delta = 1$, а постоянная H' зависит от выбора указанных подобластей. В самом деле, если выполняется условие (4), то частные производные квазиконформного склеивания (6) и его характеристики, определяемые из (7), также удовлетворяют условию (4), возможно, с другой постоянной. Тогда, по теореме Шабата (см. введение), квазиконформное отображение $w = f(z)$, приводящее к конформному склеиванию полукругов D_1 и D_2, обладает частными производными, удовлетворяющими условию $H_{\delta'}'$, откуда следует утверждение. Заметим еще, что из доказательства теоремы 2 следует, что для данных склеивающих функций постоянную H' можно выбрать сразу для всей области склеивания.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть функция $w = f(z)$ производит квазиконформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$, равномерно непрерывными и удовлетворяющими условию H_δ всюду внутри круга $|z| < 1$, исключая произвольную гладкую дугу β (на β характеристики терпят разрыв первого рода [1]), причем условие H_δ выполняется на каждом береге дуги β). Тогда, если дуга β также удовлетворяет условию H_δ, то есть производные $x'(s)$ и $y'(s)$ определяющих β функций $x(s)$ и $y(s)$, где s — длина дуги, удовлетворяют условию H_δ, то функция $f(z)$ обладает частными производными, имеющими разрыв первого рода на β, причем во всякой замкнутой подобласти круга $|z| < 1$, включая, возможно, попадающие туда берега дуги β, эти производные удовлетворяют условию $H_{\delta'}'$, где показатель δ' совпадает с δ, если $\delta < 1$ и сколь угодно к нему близок, если $\delta = 1$, а постоянная H' зависит от выбора подобласти круга $|z| < 1$.*

Доказательство. Зафиксируем на β произвольную внутреннюю точку z_0 и достаточно малую ее окрестность $U(z_0)$, разбиваемую частью γ дуги β на два „полукруга" G_1 и G_2. Пусть функции $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$ отображают G_1 и G_2 квазиконформно с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$ соответственно на полукруги D_1 ($|\zeta| < 1$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$ и D_2 ($|\zeta| < 1$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$), расположенные в плоскости ζ, так что дуга γ переходит в диаметр $(-1, 1)$. Ниже мы покажем, что функции $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$ обладают первыми частными производными с положительным якобианом, удовлетворяющими условию $H_{\delta'}'$ в любой замкнутой подобласти области $G_1 + \gamma$ и соответственно $G_2 + \gamma$. Приняв это пока без доказательства, заключаем, что функция склеивания $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$, где $\xi_1 = \zeta_2(z)$, $\xi_2 = \zeta_2(z)$, $z \in \gamma$, связывающая полукруги D_1 и D_2, удовле-

---

[1] Напомним, что характеристика θ рассматривается только там, где $p \neq 1$. Это замечание становится излишним, если рассматривать эквивалентные им характеристики (см. [4]):

$$\alpha = p\cos^2\theta + \frac{1}{p}\sin^2\theta, \quad \beta = \left(p - \frac{1}{p}\right)\cos\theta\sin\theta, \quad \gamma = p\sin^2\theta + \frac{1}{p}\cos^2\theta.$$

творяет условию вида (4′). Поэтому функции $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$, осуществляющие в единичном круге $|w|<1$ конформное склеивание полукругов D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi(\xi)$, в силу вышесказанного обладают частными производными, также удовлетворяющими условию вида $H'_{\delta'}$ в замкнутых подобластях области D_1, включая диаметр $(-1, 1)$, и соответственно в области D_2, включая диаметр $(-1, 1)$, откуда следует, что сложная функция $w[\zeta(z)]$, отображающая квазиконформно с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$ окрестность $U(z_0)$ на круг $|w|<1$, обладает вблизи точки z_0 утверждаемыми в теореме диференциальными свойствами. Если же точка z_0 является концом дуги β, лежащим внутри круга $|z|<1$, то, несколько продолжив β за точку z_0 и применяя предыдущие рассуждения, заключаем, что и в этом случае утверждение теоремы справедливо для достаточно малой окрестности точки z_0. Наконец, так как квазиконформное отображение всего круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$, очевидно, единственно (с точностью до конформного преобразования круга $|w|<1$ самого на себя), то из предыдущего следует утверждение доказываемой теоремы в полном виде.

Вернемся к квазиконформным отображениям $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$ областей G_1 и G_2 на полукруги D_1 и D_2. Для определенности будем строить и рассматривать первое отображение. Пусть сперва функция $\tau=\tau(z)$ отображает G_1 конформно на единичный полукруг $K_1(|\tau|<1$, $\operatorname{Im}\tau>0)$, расположенный в плоскости τ, так что дуга γ переходит в диаметр $(-1, 1)$. При этом характеристики $p(z)$ и $\theta(z)$, определенные в G_1, перейдут в характеристики $p(\tau$ и $\theta(\tau)$, удовлетворяющие внутри K_1 и на диаметре $(-1, 1)$ условию $H'_{\delta'}$, что следует из ограничений, наложенных на дугу β.

Продолжим теперь $p\ \tau)$ и $\theta(\tau)$ на нижний полукруг $|\tau|<1$, $\operatorname{Im}\tau<0$ так, чтобы сохранилось условие $H'_{\delta'}$ (для этого достаточно, например, на вертикальных сечениях этого полукруга положить $p(\tau)$ и $\theta(\tau)$ равными тождественно их значениям в соответствующих точках на диаметре $(-1, 1)$) и построим квазиконформное отображение $\omega=\omega(\tau)$ круга $|\tau|<1$ на круг $|\omega|<1$ с характеристиками $p(\tau)$ и $\theta(\tau)$. При этом полукруг K_1 перейдет в некоторую область Q_1, ограниченную дугой единичной окружности $|\omega|=1$ и образом γ^* диаметра $(-1, 1)$. По теореме Шабата отображение $\omega(\tau)$ обладает частными производными с положительным якобианом, удовлетворяющими условию $H'_{\delta'}$ (с тем же допустимым изменением H' и δ'), откуда, в частности, следует, что дуга γ^* также удовлетворяет условию $H'_{\delta'}$. Отображая конформно область Q_1 на полукруг $D_1(|\zeta|<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0)$ так, чтобы дуга γ^* перешла в диаметр $(-1, 1)$, получим в результате всего искомое квазиконформное отображение $\zeta_1(z)$ области G_1 на полукруг D_1, обладающее, как теперь нетрудно видеть, указанными выше свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Lavrentieff, Sur une classe de représentations continues, Матем. сб., 42 : 4 (1935).

2. O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutsche Mathematik, 3, 1938.

3. H. Wittich, Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen, Math. Z., 51 : 6, 1949.

4. Б. Шабат, Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Матем. сб., 17 (59), 1945.

5. Ch. Blanc, Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes, Comment. Math. Helv., 9, 1937.

6. Л. Волковыский, Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, Труды математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXIV, 1950.

Поступила 21.XI 1950 г.