К теории финально компактных пространств

Ю. М. Смирнов

Среди топологических пространств уже давно известны так называемые финально компактные пространства ([1], стр. 23), характеризующиеся тем свойством, что каждое покрытие данного пространства его открытыми множествами содержит конечное или счетное покрытие того же пространства. Понятие финальной компактности подробно исследовано в работе [2], к которой и примыкает настоящая статья.

Заметим прежде всего следующее. Если какое-либо свойство выполнено не только в данном пространстве, но и во всяком лежащем в нем множестве, то говорят, что это свойство выполнено в данном пространстве н а с л е д с т в е н н о. Оказывается ([2], стр. 171, теорема 2″), что необходимо и достаточно для наследственно финальной компактности следующее условие, которое назовем условием **S**:

У с л о в и е **S**. *Всякая убывающая, вполне упорядоченная по типу ω_1 система замкнутых множеств*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots \qquad (\alpha < \omega_1)$$

стационарна (то есть, начиная с некоторого α, имеем $F_\alpha = F_{\alpha+1} = \ldots$).

Естественно возникает вопрос: удовлетворяет ли всякое наследственно финально компактное пространство также и условию:

S′. *Всякая возрастающая вполне упорядоченная по типу ω_1 система замкнутых множеств стационарна.*

Вопрос этот представляет, повидимому, трансцендентные трудности. В самом деле, я доказываю в § 1 настоящей работы (теорема 1), что условие **S′** эквивалентно требованию, чтобы каждое бесконечное множество **M**, лежащее в данном пространстве, содержало счетное плотное в **M** подмножество. С другой стороны, известно (например, [5], теорема X), что в упорядоченных пространствах условие **S** является следствием так называемой „отрицательной аксиомы счетности“, то есть требования, чтобы всякое множество попарно непересекающихся открытых множеств было не более чем счетным. Поэтому, если из **S** следует **S′**, то знаменитая проблема Суслина имеет положительное решение. Очевидно, что и, наоборот, из положительного решения проблемы Суслина следует эквивалентность условий **S** и **S′** для упорядоченных множеств.

Не имея возможности что-либо сказать о взаимоотношениях между условиями S и S', я рассматриваю в § 1 пространства, одновременно удовлетворяющие этим двум условиям, и показываю, что если эти пространства, кроме того, локально бикомпактны, то в них всякая убывающая вполне упорядоченная система множеств, одновременно имеющих тип F_σ и G_δ, стационарна (этот результат был ранее доказан лишь для полных метрических пространств со счетной базой).

В § 2 я рассматриваю топологическое произведение двух финально компактных пространств и (отвечая на вопросы, поставленные П. С. Александровым) доказываю следующие предложения:

1. Существует наследственно финально компактное нормальное пространство Q, удовлетворяющее условию S', квадрат Q^2 которого не является финально компактным (и не удовлетворяет условию S'). При этом $\operatorname{ind} Q^2=0$, $\operatorname{Ind} Q^2 \neq 0$, $\dim Q^2 \neq 0$.

2. Существует бикомпакт P, являющийся наследственно финально компактным пространством, удовлетворяющим условию S', квадрат которого не является наследственно финально компактным и не удовлетворяет условию S'. В то же время:

3. Топологическое произведение пространства, удовлетворяющего условию S (соответственно условию S'), на пространство со счётной базой удовлетворяет условию S (соответственно S').

4. Топологическое произведение $[a, b]$-компактного[1] (в частности, финально компактного) пространства на бикомпакт есть $[a, b]$-компактное (соответственно финально компактное) пространство.

В том же § 2 дается положительный ответ и еще на один вопрос, поставленный П. С. Александровым: существует ли наследственно финально компактное пространство, не являющееся непрерывным образом пространства со счетной базой. Оказывается, что упомянутый выше бикомпакт P, удовлетворяющий обоим условиям S и S', обладает тем свойством, что никакое лежащее в нем несчетное множество не является непрерывным образом метрического пространства со счетной базой.

В § 3 доказывается следующая теорема:

Если при замкнутом отображении f (непрерывность которого не предполагается) *пространства X в $[a,\infty]$-компактное пространство Y прообраз каждой точки $y \in Y$ является $[a, b]$-компактным, то и все пространство X также $[a, b]$-компактно.*

В дальнейшем изложении перечисленные результаты доказываются в более общей форме, с заменой финальной компактности $[a, \infty]$-компактностью (при любом кардинальном числе a) и т. д.

---

[1] Если a и b два бесконечных кардинальных числа, тогда пространство R называется $[a, b]$-компактным, если каждое покрытие пространства R, имеющее регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$ содержит покрытие того же пространства, имеющее мощность меньше a. Если пространство $[a, b]$-компактно при всяком $b > a$, тогда пространство называется (a, ∞)-компактным. В этой терминологии финально компактные пространства называются $[\aleph_1, \infty]$-компактными.

§ 1. Напомним несколько определений, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Определение $[a, b]$ соответственно $[a, \infty]$-компактности дано в сноске на стр. 53. Наследственно $[a, \infty]$-компактные пространства будем для краткости называть S_a-пространствами: если a — регулярное кардинальное число, то они (как доказано в [2], глава 2, теорема 2″) характеризуются тем, что в них выполнено.

Условие S_a. *Всякая убывающая, вполне упорядоченная по типу, $\omega(a)$ система замкнутых множеств*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots, \qquad \alpha < \omega(a) \tag{1}$$

стационарна (то есть, начиная с некоторого $\alpha < \omega(a)$, имеем $F_\alpha = F_{\alpha+1} = \ldots$).

Назовем пространство S'_a-пространством, если в нем выполнено

Условие S'_a. *Всякая возрастающая вполне упорядоченная по типу $\omega(a)$ система замкнутых множеств*

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_\alpha \subseteq \ldots, \qquad \alpha < \omega(a) \tag{2}$$

стационарна.

Теорема 1. *Для того чтобы пространство R было S'_a-пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждое множество $M \subseteq R$ содержало плотное в нем множество мощности меньше a.*

Замечание. Кардинальное число a предполагается все время регулярным.

Доказательство необходимости. Докажем сначала, что условие S'_a является наследственным. Пусть M произвольное множество, лежащее в R, и (2) есть вполне упорядоченная по типу $\omega(a)$ система возрастающих, замкнутых в M множеств. Тогда замыкания $[F_\alpha]$ в R образуют вполне упорядоченную по тому же типу $\omega(a)$ возрастающую систему замкнутых в R множеств. В силу условия S'_a, начиная с некоторого $\alpha_0 < \omega(a)$, все $[F_\alpha] = [F_{\alpha_0}]$. Но так как каждое $F_\alpha = M \cap [F_\alpha]$, то, начиная с α_0, все $F_\alpha = F_{\alpha_0}$, то есть система (2) стационарна. В силу этого нам достаточно теперь доказать, что в самом пространстве R есть плотное множество мощности, меньшей чем a. Допустим, что это не так. Возьмем в R какое-нибудь непустое множество D_0 мощности, меньшей чем a. Согласно нашему предположению $[D_0] \neq R$. Допустим, что для всех α, меньших некоторого фиксированного $\beta < \omega(a)$, мы построили вполне упорядоченную, строго возрастающую последовательность

$$[D_0] \subset [D_1] \subset \ldots \subset [D_\alpha] \subset \ldots, \qquad \alpha < \beta, \tag{3}$$

в которой каждое D_α имеет мощность, меньшую чем a. Если $\beta = \beta_0 + 1$ — первого рода, то (так как в силу нашего предположения $[D_{\beta_0}] \neq R$) мы в $R \setminus [D_{\beta_0}]$ можем взять какое-нибудь непустое множество D'_{β_0} мощности, меньшей чем a, и положить $D_\beta = D_{\beta_0} \cup D'_{\beta_0}$. Если β — второго рода, то возьмем множество $D_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} D_\alpha$. Так как $\beta < \omega(a)$ и a — регулярно, то мощность множества D_β меньше чем a. Таким образом, мы получаем вполне упорядоченную по типу $\omega(a)$, строго возрастающую систему (2) замкнутых в R множеств $F_\alpha=[D_\alpha]$, вопреки предположению, что R является S'_a-пространством.

Докажем достаточность. Допустим, что в R существует нестационарная последовательность (2) типа $\omega(a)$ замкнутых в R множеств. Переходя, если надо, к подпоследовательности и помня, что a регулярно, можем предположить, что (2) — строго возрастающая последовательность. В каждом множестве $F_{\alpha+1}\setminus F_\alpha$ возьмем по точке x_α. Множество P всех таких точек x_α, по предположению, содержит плотное в P подмножество D мощности, меньшей чем a. В силу замкнутости множеств F_α системы (2) для любого $\alpha<\omega(a)$ найдется точка $x_{\lambda_\alpha}\in D\setminus F_\alpha$, стало быть индексы λ_α точек $x_{\lambda_\alpha}\in D$ образуют последовательность, конфинальную регулярному числу $\omega(a)$, чего не может быть, так как мощность множества D меньше чем a. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Если R есть локально бикомпактное (S_a, S'_a)-пространство* [1]*, то всякая возрастающая или убывающая последовательность типа $\omega(a)$, состоящая из множеств* [2] *B_α, $\alpha<\omega(a)$, типа F_σ и G_δ одновременно, является стационарной.*

Перед доказательством теоремы отметим несколько очевидных свойств локально бикомпактных пространств:

а) всякое локально бикомпактное пространство — вполне регулярно;

б) всякое замкнутое или открытое множество локально бикомпактного пространства само является локально бикомпактным;

в) так же, как и для полных пространств, можно легко доказать что никакое локально бикомпактное пространство нельзя представить в виде суммы не более чем счетного числа нигде не плотных множеств.

Отсюда легко вытекает, что

г) никакое локально бикомпактное пространство R нельзя представить в виде суммы не более чем счетного числа нигде не плотных множеств типа G_δ.

Лемма 1. *Для любого множества M мощности $m\geqslant a$, лежащего в S_a-пространстве R, множество $M\cap M^a$ точек a-накопления* [3] *множества M, содержащихся в M, имеет мощность m; кроме того, всякая точка a-накопления множества M является точкой a-накопления и для множества $M\cap M^a$.*

Доказательство дано в [2], стр. 173.

Доказательство теоремы 2. Пусть в локально бикомпактном S_a, S'_a-пространстве R дана какая-нибудь возрастающая, вполне упорядоченная последовательность

$$B_0\subseteq B_1\subseteq\ldots\subseteq B_\alpha\subseteq\ldots,\qquad \alpha<\omega(a),\tag{4}$$

[1] То есть пространство, одновременно удовлетворяющее условиям S_a и S'_a.

[2] Легко видеть, что утверждение теоремы 2 справедливо для любой последовательности множеств B_α любого a-регулярного типа.

[3] См. [2], глава 2, § 2, замечание 4.

типа $\omega(a)$ множеств B_α, имеющих тип F_σ и G_δ одновременно. Допустим, вопреки утверждению теоремы 2, что эта последовательность не стационарна. Возьмем множество M мощности a, состоящее из точек x_α, выбранных по одной из разностей $B_{\alpha+1}\setminus B_\alpha$. Множество $M\cap M^a$ содержит плотное множество $D=\{x_{\alpha_\lambda}\}$ мощности, меньшей чем a. Взяв число $\beta<\omega(a)$, являющееся наименьшим возможным из чисел, превосходящих каждое α_λ, видим, что $D\subseteq B_\beta$. Значит, множество $M\cap M^a\cap B_\beta$ плотно в M^a. Однако, так как множество $M\cap M^a\cap B_\beta$ имеет мощность, меньшую чем a, то множество $(M\cap M^a)\setminus B_\beta$ имеет мощность a. Это множество $(M\cap M^a)\setminus B_\beta$ плотно в M^a, потому что в силу леммы всякая точка из M^a является точкой a-накопления для $M\cap M^a$, значит, и для $(M\cap M^a)\setminus B_\beta$. Из всего этого следует, что большие множества $M^a\cap B_\beta$ и $M^a\setminus B_\beta$ плотны в M^a. Это приводит к противоречию, так как множества $M^a\cap B_\beta$ и $M^a\setminus B_\beta$ имеют тип G_δ в M^a, чего в локально бикомпактном пространстве M^a быть не может. Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что все вышеописанные свойства а), б), в), г) выполнены и в локально полных пространствах. Следовательно, теорема имеет место и для локально полных S_a, S'_a-пространств. Однако тут надо иметь в виду, что *всякое локально метризуемое* $[a, \infty]$-*компактное пространство имеет вес, меньший чем* a [1]. Кроме того, известно, что всякое *локально полное со счетною базой пространство является полным* [2]. В силу этого теорему 2 при $a=\aleph_1$ надо формулировать просто для полных пространств со счетной базой. В этом виде теорема и была доказана Зальцвассером [3].

§ 2. Приступим к построению примеров, упомянутых во введении.

Пример 1. Наследственно финально компактное нормальное пространство Q, удовлетворяющее условию S' и обладающее тем свойством, что и его топологический квадрат Q^2, не является финально компактным и не удовлетворяет условию S'.

Пространство Q, давно рассмотренное П. С. Александровым, состоит из множества всех действительных чисел x, в котором в качестве окрестностей любой точки x берутся всевозможные полусегменты $[x, y]=\mathcal{E}\{x\leqslant t<y\}$, имеющие точку x своим левым концом.

Пространство Q является, очевидно, регулярным пространством. Его нормальность следует из финальной компактности; мы докажем, что оно даже наследственно финально компактно. Для этого достаточно доказать, что всякое лежащее в Q несчетное множество M содержит хотя бы одну точку конденсации. Это последнее утверждение является очевидным следствием того, что множество M, рассматриваемое в обычной топологии числовой прямой, содержит несчетное множество точек кон-

[1] Заметим, что (в случае $a=\aleph_1$) *всякое локально метризуемое финально компактное пространство является метризуемым со счетной базой.*

[2] См. [3], стр. 264, X.

[3] См. [3], стр. 324, § VI, утверждение 3.

денсации, из которых все точки, за исключением не более чем счетного числа, являются точками конденсации в Q.

Условие S' выполнено в Q, так как каждое несчетное множество $M \subseteq Q$ содержит такое счетное подмножество D, что каждая точка $x \in M \setminus D$ является двусторонней (в топологии числовой прямой) предельной точкой множества D.

Докажем, что Q^2 не нормально[1]. Пространство Q^2 можно определить как окрестностное пространство, точками которого являются точки открытого квадрата $(0,1)^2$ и база которого состоит из всех множеств вида $[x, x')^2$, где $0 < x < x' < 1$. Рассмотрим в Q^2 „диагональ" D, то есть множество точек вида $(x, 1 \setminus x)$ и на ней множество J точек вида $(x, 1 \setminus x)$, у которых x иррационально, и множество $R = D \setminus J$. Множества J и R замкнуты в Q^2. Легко видеть, что они не имеют непересекающихся окрестностей (это доказывается так же, как аналогичное свойство известного пространства Немыцкого).

Из доказанного сразу в силу теоремы Веденисова (см. [2], стр. 166, следствие) получаем:

1) пространство Q^2 не финально компактно.

Значит,

2) пространство Q^2 не является S-пространством;

3) пространство Q^2 не является S'-пространством, потому что „диагональ" D состоит из несчетного числа изолированных в D точек;

4) $\operatorname{ind} Q^2 = 0$, тогда как $\operatorname{Ind} Q^2 > 0$ и $\dim Q^2 > 0$.

Пример 2. Это — давно известное (см. [1], стр. 78) пространство P множества, упорядоченного по типу $1+2\lambda+1$. Его можно представить в виде множества точек, лежащих на двух параллельных $y=0$ и $y=1$ с абсциссами $0 \leqslant x < 1$ для точек верхней прямой и $0 < x \leqslant 1$ для точек нижней прямой. Для любой точки вида $(x, 1)$ за окрестность принимают теоретико-множественную сумму полуинтервала $[x, x') \times 1$ на верхней прямой и интервала $(x, x') \times 0$ на нижней прямой; для точек вида $(x, 0)$ за окрестность принимают сумму полуинтервала $(x', x] \times 0$ на нижней прямой и интервала $(x', x) \times 1$ на верхней прямой. Если из P вычесть точки $(0,1)$ и $(1,0]$, то получим пространство, составленное из двух подмножеств, верхнего и нижнего оснований, гомеоморфных множеству Q. Отсюда сразу следует, что пространство P, как сумма конечного числа S-пространств, само является S-пространством. По той же причине оно является и S'-пространством. Из того, что P не имеет ни одной щели как собственной, так и несобственной следует, что P является бикомпактом. Топологический квадрат P^2 пространства P содержит Q^2; поэтому P^2, являясь топологическим квадратом бикомпактного S, S'-пространства P, а следовательно, будучи бикомпактом, тем не менее не является ни S-, ни S'-пространством.

---

[1]) Это доказательство не ново — см. R. Sorgenfrey, On the topological product of paracompact spaces, Bull. Am. Math. Soc., v. 53, N 6 (1947), 631—632.

Теорема 3. *Топологическое произведение $[a, b]$-компактного пространства R на бикомпактное пространство Φ является $[a, b]$-компактным пространством* (регулярность кардинального числа a при этом не предполагается).

Доказательство. Надо показать, что любое множество $M \subseteq \Phi \times R$ регулярной мощности $\mu(M) = m \in [a, b]$ имеет хотя бы одну точку полного накопления. Если проекция M_R множества M на R (то есть множество всех таких $\xi \in R$, что существует хотя бы одно такое $x \in \Phi$, что $(x, \xi) \in M$ имеет мощность, меньшую чем a, то хотя бы одно из множеств $\Phi_\xi = \Phi \times \xi$ содержит множество $M_\xi = M \cap \Phi_\xi$ мощности $\mu(M_\xi) = \mu(M) = m$ (в силу регулярности m). Так как каждое множество Φ_ξ бикомпактно, то M_ξ, а следовательно, и все M имеет в Φ_ξ хотя бы одну точку полного накопления. Итак, остается рассмотреть другой случай, когда мощность множества M_R равна m. Тогда существует точка $\xi \in R$, являющаяся точкой полного накопления множества M_R в R. Докажем теперь, что множество Φ_ξ содержит хотя бы одну точку полного накопления множества M. Предположим, что это неверно. Тогда для любой точки $(x, \xi) \in \Phi_\xi$ есть окрестность вида $O(x, \xi) = O(x) \times O_x(\xi)$ такая, что $\mu(M \cap O(x, \xi)) < m$. Выбрав из них конечное число окрестностей $O(x_j, \xi) = O(x_j) \times O_j(\xi)$, покрывающих бикомпактное пространство Φ_ξ, получим, что для окрестности $O\Phi_\xi = \bigcup\limits_j O(x_j, \xi)$ множества Φ_ξ мощность $\mu(M \cap O\Phi_\xi) < m$. Но тогда и для окрестности $U\Phi_\xi = R \times O(\xi) \subseteq O\Phi_\xi$, где $O(\xi) = \bigcap\limits_j O_j(\xi)$, получим, что $\mu(M \cap U\Phi_\xi) < m$. Значит, $\mu(M_R \cap O(\xi)) < m$, вопреки выбору точки ξ, как точки полного накопления множества M_R в R. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть на протяжении оставшейся части работы кардинальное число a — снова регулярно.

Теорема 4. *Топологическое произведение S_a-пространства R на пространство R' веса, меньшего чем a, является S_a-пространством.*

Доказательство. Прежде всего выберем в R' какую-нибудь базу $\{V^\lambda\}$ мощности, меньшей чем a, и занумеруем элементы этой базы порядковыми числами $\lambda < \mu < \omega(a)$. Легко видеть, что для каждого открытого в $R \times R'$ множества G в пространстве R существует наибольшее такое открытое множество $U^\lambda(G)$, что $U^\lambda(G) \times V^\lambda \subseteq G$ (оно может оказаться и пустым). Тогда мы получим, что

$$G = \bigcup_\lambda (U^\lambda(G) \times V^\lambda). \tag{5}$$

Пусть нам теперь дана возрастающая вполне упорядоченная последовательность

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_\alpha \subseteq \ldots, \qquad \alpha < \omega(a), \tag{6}$$

типа $\omega(a)$ открытых в $R \times R'$ множеств G_α. Каждое множество G_α представим в виде (5): $G_\alpha = \bigcup\limits_\lambda (U^\lambda_\alpha \times V^\lambda)$, где $U^\lambda_\alpha = U^\lambda(G_\alpha)$. Очевидно, при каждом λ последовательность $\tau_\lambda=\{U_\alpha^\lambda\}$ открытых в R множеств U_α^λ является возрастающей. Так как R есть S_α-пространство, то каждая из последовательностей τ_λ стационарна. Это значит, что существует число $\alpha_\lambda<\omega(a)$ такое, что все $U_\alpha^\lambda=U_{\alpha_\lambda}^\lambda$ для $\alpha\geqslant\alpha_\lambda$ при любом фиксированном λ.

Но из неравенств $\lambda<\mu<\omega(a)$ следует, что есть $\beta<\omega(a)$ такое, что все $\alpha_\lambda<\beta$. Значит, все $U_\alpha^\lambda=U_\beta^\lambda$ при любых $\alpha\geqslant\beta$ для каждого λ. Значит, все $G_\alpha=G_\beta$ при любом $\alpha\geqslant\beta$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Топологическое произведение S'_a-пространства R на пространство R' веса, меньшего чем a, является S'_a-пространством.*

§ 3. Определение. Отображение f пространства X в пространство Y называется замкнутым, если образ всякого замкнутого в X множества является замкнутым множеством в Y.

Лемма 2. *Пусть дано замкнутое отображение пространства X на пространство Y; тогда для любой точки $y\in Y$ и любого открытого в X множества $\Gamma\supseteq C_y=f^{-1}(y)$ существует окрестность Oy точки y в Y такая, что $f^{-1}(Oy)\subseteq\Gamma$.*

Доказательство. Так как $C_y\cap(X\setminus\Gamma)=\Lambda$, то замкнутое в Y множество $\Phi=f(X\setminus\Gamma)$ не содержит точки y. За искомую окрестность точки y примем множество $Oy=Y\setminus\Phi\ni y$. Теперь имеем

$$f^{-1}(Oy)=X\setminus f^{-1}(\Phi)\subseteq X\setminus(X\setminus\Gamma)=\Gamma,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если при* замкнутом *отображении f пространства X в $[a,\infty]$-компактное пространство Y прообраз каждой точки $y\in f(X)$ является $[a,b]$-компактным множеством, то и само пространство X также $[a,b]$-компактно.*

Доказательство. В силу определения замкнутого отображения образ $f(X)$ пространства X будет замкнутым множеством $[a,\infty]$-компактного пространства Y, следовательно, само будет $[a,\infty]$-компактным. Поэтому теорему достаточно доказать для того случая, когда отображение f является отображением на все пространство Y. Итак, пусть нам дано замкнутое отображение f пространства X на $[a,\infty]$-компактное пространство Y такое, что прообраз $C_y=f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in Y$ является $[a,b]$-компактным множеством. Надо показать, что пространство X также $[a,b]$-компактно. Пусть нам дано какое-либо открытое покрытие $\gamma=\{\Gamma_\alpha\}$ пространства X регулярной мощности m, $a\leqslant m\leqslant b$. В силу условия теоремы для каждого множества C_y из покрытия γ можно выбрать подсистему γ_y мощности $m_y<a$, покрывающую множество C_y. В силу леммы для любой точки $y\in Y$ и для открытого множества $\Gamma_y=\bigcup_{\Gamma_\alpha\in\gamma_y}\Gamma_\alpha\supseteq C_y$ можно подобрать такую окрестность Oy точки y, что $f^{-1}(Oy)\subseteq\Gamma_y$. Система $\omega=\{Oy\}$ всех выбранных нами окрестностей Oy является покрытием простран-

ства Y, поэтому в силу условия теоремы из нее можно выбрать подпокрытие $\omega'=\{Oy_\beta\}$ пространства Y мощности $k<a$. Тогда система $\Delta=\{D_\beta\}$, состоящая из прообразов $D_\beta=f^{-1}(Oy_\beta)$ всех элементов покрытия ω', является покрытием пространства X той же мощности $k<a$ (так как отображение f не предполагается непрерывным, то множества D_β не обязаны быть открытыми множествами пространства X, но это никак не может помешать нашим рассуждениям). Так как каждое множество D_β покрыто системой γ_{y_β} мощности $m_{y_\beta}<a$, то система $\gamma'=\bigcup_\beta \gamma_{y_\beta}$, являющаяся подсистемой системы γ, покрывает пространство X и имеет мощность $m'=\sum_\beta m_{y_\beta}<a$, потому что кардинальное число a предположено регулярным. Теорема доказана.

Замечание. *Если для данного замкнутого отображения f бикомпакта X в бикомпакт Y прообраз каждой точки $y\in Y$ замкнут в X, то отображение f — непрерывно.*

Очевидно, достаточно доказать это утверждение в случае замкнутого отображения f бикомпакта X на бикомпакт Y. Пусть Φ — произвольное замкнутое подмножество бикомпакта Y и $F=f^{-1}(\Phi)$. Так как для любого замкнутого в X множества A имеем $f(A\cap F)=f(A)\cap\Phi$, то отображение f, рассматриваемое на F, является замкнутым, следовательно, в силу теоремы 5, множество F оказывается бикомпактом, а поэтому замкнутым в X множеством. Значит, действительно, отображение f — непрерывно, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров и П. С. Урысон, О компактных топологических пространствах, Труды Матем. ин-та Академии наук СССР, XXXI (1950).

2. Ю. М. Смирнов, О топологических пространствах, компактных в данном отрезке мощностей, Изв. Академии наук СССР, матем., т. 14, № 2 (1950), стр. 155—178.

3. К. Куратовский, **Topologie I, Warszawa,** II изд. (1948).

4. Н. Б. Веденисов, О некоторых топологических свойствах упорядоченных множеств, Учен. зап. Педаг. ин-та, серия физ.-мат., 2, М. (1938), стр. 15—26.

Поступила 14.XI 1950 г.