Независимые системы аксиом, определяющие структуру

Ю. И. Соркин

Введение

Структура, как известно, определяется [1] как частично упорядоченное множество, то есть множество S, в котором для некоторых пар элементов a, b определено отношение порядка $a \leqslant b$, удовлетворяющее условиям

1) $a \leqslant a$ для любого $a \in S$;

2) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$;

3) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$,

и в котором определены две однозначные операции, называемые сложением и умножением (обозначаются символами $\cdot$ и $+$), согласованные с частичной упорядоченностью посредством следующих аксиом:

1. *При любых* a *и* b *их произведение* ab *удовлетворяет соотношениям* $ab \leqslant a$ *и* $ab \leqslant b$ *и всякий элемент* c *такой, что* $c \leqslant a$ *и* $c \leqslant b$ *удовлетворяет соотношению* $c \leqslant ab$.

2. *При любых* a *и* $b \in S$ *их сумма* $a + b$ *удовлетворяет соотношениям* $a + b \geqslant a$ *и* $a + b \geqslant b$ *и всякий элемент* c *такой, что* $c \geqslant a$ *и* $c \geqslant b$ *удовлетворяет соотношению* $c \geqslant a + b$.

Это определение, основанное на теоретико-множественном понятии частичной упорядоченности, можно заменить ему эквивалентным, вполне алгебраическим определением: множество S называется структурой, если в нем определены две бинарные однозначные операции, то есть каждой паре элементов a, b поставлены в соответствие некоторый элемент, обозначаемый символом ab, и некоторый элемент, обозначаемый

[1] См., например,

1. А. Г. Курош, Теория групп, 1944, стр. 325—326.

2. Труды семинара по теории групп, ГОНТИ, 1938, стр. 76.

3. В. И. Гливенко, Основы общей теории структур, Учен. зап. пед. ин-та, сер. физ.-мат., М., I (1937), стр. 3—33.

4. G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1940.

символом $a+b$, называемые соответственно произведением и суммой, причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

аксиомы ассоциативности

$$A_\pi \qquad a(bc)=(ab)c,$$
$$A_\Sigma \qquad a+(b+c)=(a+b)+c,$$

аксиомы коммутативности

$$K_\pi \qquad ab=ba,$$
$$K_\Sigma \qquad a+b=b+a,$$

аксиомы идемпотентности

$$I_\pi \qquad aa=a,$$
$$I_\Sigma \qquad a+a=a,$$

аксиомы абсорпции

$$B^1_\pi, \qquad \text{если } ab=b, \text{ то } a+b=a,$$
$$B^1_\Sigma, \qquad \text{если } a+b=b, \text{ то } ab=a.$$

Из первого определения легко следует второе [1]. Для доказательства того, что из второго определения следует первое, надо показать, что при выполнении во множестве S аксиом второго определения в нем можно ввести частичную упорядоченность и притом единственным способом. Это следует из нижеприводимой леммы.

Лемма 1. *Если множество S удовлетворяет аксиомам второго определения, то для выполнимости соотношения $a \leqslant b$ (a и b — некоторые элементы из S), согласованного с операциями в смысле первого определения, необходима и достаточна выполнимость равенства $ab=a$.*

Необходимость. Так как $a \leqslant b$ и $a \leqslant a$, то, по аксиоме 1 первого определения, $a \leqslant ab$; но по этой же аксиоме $ab \leqslant a$, то есть $ab=a$.

Доказательство достаточности см. в литературе, указанной в сноске на стр. 85. Лемма доказана.

Некоторая подсистема системы аксиом называется полной, если из аксиом этой подсистемы следуют все аксиомы системы. Полная система аксиом называется минимальной, если никакая истинная часть ее не является полной. Очевидно, что подсистема неполной системы неполна.

В § 1 находятся все полные минимальные подсистемы системы аксиом второго определения, причем, кроме аксиом B^1_π и B^1_Σ в исходную систему включаются аксиомы

$$B^2_\pi, \text{ если } ba=b, \text{ то } b+a=a,$$
$$B^2_\Sigma, \text{ если } b+a=b, \text{ то } ba=a,$$

которые при наличии аксиом коммутативности следуют, очевидно, из B^1_π и B^1_Σ.

[1] См. литературу, указанную в сноске на стр. 85.

Из результатов этого параграфа следуют результаты работы M. Kobayasi, On the axioms of the theory of lattice, Proc. Imp. Akad. Tokyo, 19 (1943), 6—9.

Аксиомы B^1_π, B^1_Σ, B^2_π, B^2_Σ часто заменяются[1] в определении структуры эквивалентными (при наличии остальных аксиом) аксиомами:

$$C^1_\pi \qquad a(a+b)=a,$$

$$C^1_\Sigma \qquad a+ab=a.$$

В § 2 находятся все полные минимальные подсистемы системы

$$\begin{pmatrix} I_\pi A_\pi K_\pi C^1_\pi C^2_\pi C^3_\pi C^4_\pi \\ I_\Sigma A_\Sigma K_\Sigma C^1_\Sigma C^2_\Sigma C^3_\Sigma C^4_\Sigma \end{pmatrix},$$

где через C^i ($i=2, 3, 4$) обозначены следующие аксиомы (a и b произвольные элементы структуры):

$$C^2_\pi \qquad (a+b)a=a,$$

$$C^2_\Sigma \qquad ab+a=a,$$

$$C^3_\pi \qquad a(b+a)=a,$$

$$C^3_\Sigma \qquad a+ba=a,$$

$$C^4_\pi \qquad (b+a)a=a,$$

$$C^4_\Sigma \qquad ba+a=a.$$

В частности, выясняется полнота систем аксиом

$$\begin{pmatrix} A_\pi & C^2_\pi C^3_\pi & \\ A_\Sigma C^1_\Sigma & & C^4_\Sigma \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_\pi K_\pi C^1_\pi \\ A_\Sigma K_\Sigma C^1_\Sigma \end{pmatrix}.$$

В § 3 рассматривается первое из данных выше определений структуры.

Для сокращения записи в дальнейшем будут применяться следующие обозначения: символом $*$ обозначается произвольная, но фиксированная операция — умножение или сложение, а символом $\circ$ — вторая из этих двух операций. В примерах операции на (конечных) множествах будут задаваться таблицами с двойным входом, в левых верхних углах которых будут указываться задаваемые операции соответствующими символами: $*$ или $\circ$.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. А. Г. Курошу за ценные указания при редактировании работы, учтенные автором.

[1] См. литературу, указанную в сноске на стр. 85.

§ 1

Пусть Ξ некоторая полная подсистема системы аксиом

$$\begin{pmatrix} I_\pi A_\pi K_\pi B^1_\pi B^2_\pi \\ I_\Sigma A_\Sigma K_\Sigma B^1_\Sigma B^2_\Sigma \end{pmatrix}. \tag{I}$$

Имеют место следующие предложения.

Лемма 2. *Ξ содержит аксиому* A_*. На множестве $G=\{a, b, c\}$ определим операции

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

Аксиома A_* не выполнена, ибо

$$b*(c*c)=a\neq c=(b*c)*c,$$

в то время как все остальные аксиомы системы (I), в том числе аксиома $A_\circ$, как легко проверяется, выполнены. Лемма доказана.

Лемма 3. *Ξ содержит хотя бы одну из аксиом коммутативности* K_π *или* K_Σ. На множестве $G=\{a, b\}$ определим операции

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

Здесь выполнены все аксиомы (I), кроме двух аксиом коммутативности, то есть лемма доказана.

Лемма 4. *Ξ содержит хотя бы одну из аксиом идемпотентности* I_π *или* I_Σ. На множестве $G=\{a, b\}$ определим операции

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

Здесь выполнены все аксиомы (I), кроме двух аксиом идемпотентности, то есть лемма доказана.

Лемма 5. *Ξ содержит хотя бы одну из аксиом абсорпции* B^1_* *или* B^2_*. На множестве $G=\{a, b, c\}$ определим операции

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

Аксиомы B_*^1 и B_*^2 не выполнены, так как $b*c=c*b=c$, в то время как $b\circ c=c\circ b=a\neq b$. Можно проверить, что остальные аксиомы (I) выполнены. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если Ξ не содержит аксиому K_*, то содержит аксиомы B_*^1 и B_*^2.*

Для доказательства этого утверждения достаточно показать неполноту систем

$$\begin{pmatrix} I_*A_* & B_*^1 \\ I_\circ A_\circ K_\circ B_\circ^1 B_\circ^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} I_*A_* & B_*^2 \\ I_\circ A_\circ K_\circ B_\circ^1 B_\circ^2 \end{pmatrix}.$$

Неполнота первой системы доказывается таким примером. На множестве $G=\{a,b,c,d\}$ определим операции

$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & c & c & a \\ b & a & b & c & b \\ c & a & c & c & c \\ d & a & b & c & d \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \circ & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & d & d \\ b & d & b & b & d \\ c & d & b & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

Здесь не выполнена аксиома B_*^2, ибо $a*c=c$, но $a\circ c=d\neq a$, и не выполнена аксиома K_*, ибо $a*b\neq b*a$, в то время как остальные аксиомы (I) выполнены.

Неполнота второй системы следует из неполноты первой по соображениям симметрии. Лемма доказана.

Таким образом, мы видим, что для полноты системы аксиом условие выполнимости лемм 2—6 необходимо, оно же и достаточно, как показывает следующая

Теорема 1. *Всякая подсистема Ξ системы аксиом* (I), *удовлетворяющая условиям лемм 2—6, полна.*

Для доказательства достаточно показать полноту систем

$$\begin{pmatrix} I_*A_*K_*B_*^i \\ A_\circ K_\circ B_\circ^j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_*A_* & B_*^1B_*^2 \\ A_\circ K_\circ & B_\circ^i \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_* & B_*^1B_*^2 \\ I_\circ A_\circ K_\circ & B_\circ^i \end{pmatrix},$$

где $i=1$ или 2, $j=1$ или 2.

Полнота первой системы аксиом доказывается следующим образом: из аксиом B_*^i и $B_\circ^j$ при помощи аксиом K_* и $K_\circ$ следуют недостающие аксиомы B_* и $B_\circ$. Затем согласно I_* для любого $a\in S$ имеет место равенство $a*a=a$.

Применяя B_*^1, имеем $a\circ a=a$, то есть справедлива аксиома $I_\circ$.

Докажем полноту второй системы аксиом. Положим для определенности $i=1$; для $i=2$ доказательство проводится аналогично. Согласно I_* будет $a*a=a$, откуда, по B_*^1, $a\circ a=a$, то есть справедлива аксиома $I_\circ$. Докажем справедливость аксиомы K_*.

Пусть $a*b=c$ и $b*a=d$; покажем, что $c=d$.

Согласно A_* и I_*

$$c*b=(a*b)*b=a*(b*b)=a*b=c,$$

$$d*a=(b*a)*a=b*(a*a)=b*a=d.$$

Отсюда, по B_*^1,

$$c\circ b=b,$$

$$d\circ a=a,$$

откуда, по $K_\circ$,

$$b\circ c=b,$$

$$a\circ d=a$$

и, по $B_\circ^1$,

$$b*c=c,$$

$$a*d=d.$$

Согласно A_* и I_*

$$c*d=(b*c)*(a*d)=[b*(a*b)]*[a*(b*a)]=$$

$$=(b*a)*(b*a)*(b*a)=d*d*d=d,$$

$$d*c=(a*d)*(b*c)=[a*(b*a)]*[b*(a*b)]=$$

$$=(a*b)*(a*b)*(a*b)=c*c*c=c,$$

откуда, по B_*^2, $c\circ d=c$, $d\circ c=d$ и, наконец, по K_0, $c\circ d=d\circ c$, то есть $c=d$.

Справедливость аксиомы $B_\circ^2$ тривиально следует из аксиом $B_\circ^1$, $K_\circ$, K_*.

Доказательство полноты третьей системы аксиом легко сводится к доказательству полноты второй системы, так как, по $I_\circ$, $a\circ a=a$ и отсюда согласно $B_\circ^i$ $a*a=a$ при любом $a\in S$, то есть справедлива аксиома I_*, и мы находимся в условиях второй системы. Теорема доказана.

Таким образом, мы нашли все минимальные полные подсистемы системы аксиом (I).

§ 2

Пусть Ξ некоторая полная подсистема системы аксиом

$$\begin{pmatrix} I_\pi A_\pi K_\pi C_\pi^1 C_\pi^2 C_\pi^3 C_\pi^4 \\ I_\Sigma A_\Sigma K_\Sigma C_\Sigma^1 C_\Sigma^2 C_\Sigma^3 C_\Sigma^4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(II)}$$

Имеют место следующие предложения.

Лемма 7. *Ξ содержит аксиому A_*.*

На множестве $G=\{a, b, c, d, e\}$ определим операции

$*$	a	b	c	d	e
a	a	d	c	d	a
b	d	b	c	d	b
c	c	c	c	d	c
d	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	e	a	a	e
b	e	b	b	b	e
c	a	b	c	c	e
d	a	b	c	d	e
e	e	e	e	e	e

Здесь не выполнена аксиома A_*, так как $(a*b)*c=d*c=d$, в то время как $a*(b*c)=a*c=c$. Можно проверить, что все остальные аксиомы, в том числе аксиома $A_\circ$, выполнены.

Лемма 8. *Ξ содержит хотя бы одну из аксиом адсорпции C_*^i,* $i=1, 2, 3, 4$.

На множестве $G=\{a, b, c\}$ определим операции

$*$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

Здесь не выполнены все аксиомы C_*^i; $i=1, 2, 3, 4$, так так $(a\circ b)*b=(b\circ a)*b=b*(a\circ b)=b*(b\circ a)=c\neq b$, остальные же аксиомы (II) выполнены. Лемма доказана.

Теорема 2. *Системы*

$$\begin{pmatrix} A_\pi K_\pi C_\pi^i \\ A_\Sigma K_\Sigma C_\Sigma^j \end{pmatrix}, \quad i, j=1, 2, 3, 4,$$

являются полными и минимальными.

Из аксиом C_π^i и C_Σ^j, где i и j произвольны, но фиксированы, при помощи аксиом K_π и K_Σ очевидным образом следуют остальные аксиомы C. Докажем справедливость аксиом идемпотентности. Пусть $aa=b$. Тогда по аксиоме C_Σ^1 $a+b=a+aa=a$ и по аксиоме C_π^1 $b=aa=a(a+b)=a$, то есть доказана аксиома I_π. Теперь, снова применяя аксиому C_Σ^1, имеем $a+a=a+aa=a$. Полнота доказана.

Минимальность следует из лемм 7—8 и нижеследующей леммы 9.

Лемма 9. *Если Ξ не содержит K_*, то содержит аксиомы $C_\circ^i$ и $C_\circ^j$,* где $i=1$ или 2, а $j=3$ или 4.

Для доказательства достаточно показать неполноту систем аксиом

$$\begin{pmatrix} I_* A_* & C_*^1 C_*^2 C_*^3 C_*^4 \\ I_\circ A_\circ K_\circ C_\circ^1 C_\circ^2 & \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} I_* A_* & C_*^1 C_*^2 C_*^3 C_*^4 \\ I_\circ A_\circ K_\circ & C_\circ^3 C_\circ^4 \end{pmatrix}.$$

На множестве элементов $G=\{a, b, c, d, e\}$ определим операции

$*$	a	b	c	d	e
a	a	c	c	c	a
b	d	b	d	d	b
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	e	a	e	e
b	e	b	e	b	e
c	a	e	c	e	e
d	e	b	e	d	e
e	e	e	e	e	e

Аксиомы $K_\circ$, $C_\circ^3, C_\circ^4$ не выполнены, так как $a*b\neq b*a$, $a\circ(b*a)\neq a$ и $(b*a)\circ a\neq a$, остальные же аксиомы (II) выполнены.

Неполнота первой системы аксиом доказана. Неполнота второй системы следует отсюда, ввиду симметрии посылок.

Теорема 3. *Системы*

$$\begin{pmatrix} A_\circ & C_*^k \\ A_\circ K_\circ C_\circ^i C_\circ^j & \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, 3, 4;\ i=1, 2;\ \ j=3, 4,$$

являются полными и минимальными.

Положим для определенности $k=1$; при $k\neq 1$ доказательство проводится аналогично.

Из аксиом $C_\circ^i$ и $C_\circ^j$ при помощи аксиомы $K_\circ$, очевидно, следуют остальные аксиомы $C_\circ$, а из аксиомы C_*^1 следует C_*^3. Справедливость аксиом идемпотентности доказывается точно так же, как в теореме 2.

Докажем справедливость аксиомы K_*. Пусть $a*b=c$ и $b*a=d$. По $C_\circ^1$,

$$a\circ c=a\circ(a*b)=a,$$
$$b\circ d=b\circ(b*a)=b.$$

Теперь применим C_*^3

$$c*a=c*(a\circ c)=c,$$
$$d*b=d*(b\circ a)=d.$$

Воспользовавшись A_* и I_*, получаем

$$c*d=(a*b)*(b*a)=[a*(b*b)]*a=(a*b)*a=c*a=c,$$
$$d*c=(b*a)*(a*b)=[b*(a*a)]*b=(b*a)*b=d*b=d.$$

Наконец, применяя $C_\circ^3$ и $K_\circ$, имеем

$$d=d\circ(c*d)=d\circ c=c\circ d=c\circ(d*c)=c.$$

Пользуясь только что полученной аксиомой K_*, легко получаем аксиомы C_*^2 и C_*^4 из аксиом C_*^1 и C_*^3.

Минимальность рассмотренной системы аксиом следует из лемм 7—9.

Т е о р е м а 4. *Система аксиом*

$$\begin{pmatrix} A_* & C_*^2 C_*^3 & \\ A_\circ C_\circ^1 & & C_\circ^4 \end{pmatrix}$$

полна и минимальна.

Докажем справедливость $K_\circ$. Пусть $a \circ b = c$ и $b \circ a = d$. Применяя C_*^3 и C_*^2, имеем

$$a * d = a * (b \circ a) = a,$$

$$c * a = (a \circ b) * a = a.$$

Теперь воспользуемся аксиомами $C_\circ^1$ и $C_\circ^4$

$$c \circ a = c \circ (c * a) = c,$$

$$a \circ d = (a * d) \circ d = d.$$

Наконец, по $A_\circ$,

$$c = c \circ a = (a \circ b) \circ a = a \circ (b \circ a) = a \circ d = d.$$

Таким образом, аксиома $K_\circ$ выведена, и теперь можно применить теорему 3, чем и докажем полноту.

Минимальность следует из леммы 7 и следующей леммы:

Л е м м а 10. *Если* Ξ *не содержит обе аксиомы коммутативности* K_π *и* K_Σ, *то содержит хотя бы одну из аксиом* C_π^1 *или* C_Σ^1, *а также хотя бы одну из аксиом* C_π^4 *или* C_Σ^4 *и, наконец, хотя бы одну из аксиом* C_*^2 *или* $C_\circ^3$.

Для доказательства достаточно показать неполноту систем

$$\begin{pmatrix} I_\pi A_\pi & C_\pi^2 C_\pi^3 C_\pi^4 \\ I_\Sigma A_\Sigma & C_\Sigma^2 C_\Sigma^3 C_\Sigma^4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_\pi A_\pi C_\pi^1 C_\pi^2 C_\pi^3 \\ I_\Sigma A_\Sigma C_\Sigma^1 C_\Sigma^2 C_\Sigma^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} I_* A_* C_*^1 & C_*^3 C_*^4 \\ I_\circ A_\circ C_\circ^1 C_\circ^2 & C_\circ^4 \end{pmatrix}.$$

На множестве $G = \{a, b\}$ определим операции

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

$+$	a	b
a	a	b
b	a	b

Здесь не выполнены аксиомы C_π^1 и C_Σ^1, так как $a * (a \circ b) = a * b = b \neq a$, и не выполнены аксиомы коммутативности K_π и K_Σ, в то время как все остальные аксиомы системы (II) выполнены. Неполнота первой системы доказана. Неполнота второй системы доказывается аналогично ввиду симметрии посылок.

Наконец, на множестве $G = \{a, b\}$ определим операции

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

Аксиомы C_*^2 и $C_\circ^3$ не выполнены, ибо $(a \circ b) * a = b * a = b \neq a$ и $a \circ (b * a) = a \circ b = b \neq a$, и не выполнены аксиомы коммутативности K_π и K_Σ, остальные же аксиомы (II) выполнены. Лемма доказана.

Теорема 5. *Системы аксиом*

$$\begin{pmatrix} A_* C_*^1 C_*^2 C_*^i \\ A_\circ \quad C_\circ^2 \quad C_\circ^4 \end{pmatrix}, \quad i=3, 4, \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_* \quad C_*^j C_*^3 C_*^4 \\ A_0 C_\circ^1 \quad C_\circ^3 \end{pmatrix}, \ j=1, 2,$$

полны и минимальны.

Докажем полноту первой системы. Пусть $a*b=c$ и $b*a=d$. Согласно аксиомам $C_\circ^2$ и $C_\circ^4$

$$c\circ a=(a*b)\circ a=a,$$
$$d\circ a=(b*a)\circ a=a.$$

Воспользуемся аксиомами C_*^1 и C_*^2

$$c*a=c*(c\circ a)=c,$$
$$a*d=(d\circ a)*d=d.$$

Теперь применим A_*

$$c=c*a=(a*b)*a=a*(b*a)=a*d=d.$$

Таким образом, мы вывели из нашей системы аксиому и тем самым находимся в условиях теоремы 3. Применяя последнюю, мы и получим полноту нашей системы. Полнота второй системы следует из соображений симметрии.

Минимальность наших систем следует из лемм 7, 9 и 10. Теорема доказана.

Не трудно видеть, что из лемм 7—10 и теорем 2—5 следует, что *полные минимальные подсистемы системы аксиом (II) исчерпываются системами, перечисленными в теоремах 2—5.*

Интересно заметить, что аксиомы идемпотентности не вошли ни в одну полную минимальную систему аксиом.

§ 3

Определение структуры с помощью частичной упорядоченности, данное во введении, подробнее можно сформулировать следующим образом.

Определение. Множество S называется структурой, если для некоторых (упорядоченных) пар элементов a, b установлено соотношение порядка $a\leqslant b$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

U_1 $a\leqslant a$ при любом $a\in S$,

U_2, если $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$, то $a=b$,

U_3, если $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$, то $a\leqslant c$.

Кроме того, для любой пары элементов из S определены произведение ab и сумма $a+b$, удовлетворяющие следующим аксиомам (a, b, c и d — произвольные элементы структуры):

P_1 $ab\leqslant a$,

P_2 $ab\leqslant b$,

P_3, если $c\leqslant a$ и $c\leqslant b$, то $c\leqslant ab$.

S_1 $a+b\geqslant a$,

S_2 $a+b\geqslant b$,

S_3, если $d\geqslant a$ и $d\geqslant b$, то $d\geqslant a+b$.

Теорема 6. *Система аксиом*

$$\begin{pmatrix} U_1U_2U_3 \\ P_1P_2P_3 \\ S_1S_2S_3 \end{pmatrix} \tag{III}$$

полна и минимальна.

Полнота системы ясна, а для доказательства минимальности покажем независимость каждой аксиомы.

Независимость аксиомы U_1 показывает следующий пример. На множестве элементов $G=\{a, b, c\}$ определим частичное упорядочение и операции

$$a \leqslant a,\ a \leqslant b,\ b \leqslant c,\ a \leqslant c,\ c \leqslant c,$$

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	c

$+$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

Аксиома U_1 не выполнена, так как $b \not\leqslant b$, остальные же аксиомы (III) выполнены.

Независимость аксиомы U_2 показывает следующий пример. На множестве элементов $G=\{a, b\}$ определим частичное упорядочение и операции

$$a \leqslant a,\ b \leqslant b,\ a \leqslant b,\ b \leqslant a$$

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

$+$	a	b
a	a	b
b	a	b

Аксиома U_2 не выполнена, ибо $a \neq b$, хотя $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, остальные же аксиомы (III) выполнены.

Независимость аксиомы U_3 показывает следующий пример. На множестве $G=\{a, b, c\}$ определим частичное упорядочение и операции

$$a \leqslant a,\ a \leqslant b,\ b \leqslant b,\ b \leqslant c,\ c \leqslant c,\ c \leqslant a$$

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	b
c	c	b	c

$+$	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

Аксиома U_3 не выполнена, так как $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, но $a \not\leqslant c$, остальные же аксиомы (III) выполнены.

Независимость аксиомы P_1 показывает следующий пример. На множестве $G=\{a, b\}$ определим частичное упорядочение и операции

$$a \leqslant a,\ b \leqslant b,\ a \leqslant b$$

·	a	b
a	a	b
b	a	b

+	a	b
a	a	b
b	b	b

Аксиома P_1 не выполнена, так как $b=ab \not\leqslant a$, остальные же аксиомы (III) выполнены.

Из симметрии посылок из этого примера можно сделать заключение о независимости аксиомы P_2, а также аксиом S_1 и S_2.

Независимость аксиомы P_3 показывает следующий пример. На множестве $G=\{a, b, c\}$ определим частичное упорядочение и операции

$$a \leqslant a,\ b \leqslant b,\ c \leqslant c,\ a \leqslant b,\ b \leqslant c,\ a \leqslant c$$

·	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

Аксиома P_3 не выполнена, так как $b \leqslant c$ и $b \leqslant b$, но $b \not\leqslant bc=a$, остальные же аксиомы выполнены.

Из симметрии посылок отсюда следует также независимость аксиомы S_3. Теорема доказана.

Задание в структуре частичной упорядоченности для пар $a \leqslant b$ можно, исходя из леммы 1, идентифицировать с выполнением любого из равенств

$$ab=a,\ ba=b,\ a+b=b,\ b+a=b. \tag{$*$}$$

Отсюда мы получаем возможность определять структуру как множество S с двумя операциями, которые подчинены девяти *независимым* аксиомам, которые являются аксиомами

$$\begin{pmatrix} U_1 U_2 U_3 \\ P_1 P_2 P_3 \\ S_1 S_2 S_3 \end{pmatrix},$$

сформулированными в соответствии с любым из равенств $(*)$.

Например, взяв за основу первое из равенств $(*)$, имеем

Определение. Множество S называется структурой, если в нем определены две операции — сложение и умножение, удовлетворяющие аксиомам (a, b, c и d — любые элементы структуры):

1) $aa=a$,

2) если $ab=a$ и $ba=b$, то $ab=ba$,

3) если $ab=a$ и $bc=b$, то $ac=a$,

4) $(ab)a=ab$,

5) $(ab)b=ab$,

6) если $ca=c$ и $cb=c$, то $c(ab)=c$,

7) $a(a+b)=a$,

8) $b(a+b)=b$,

9) если $ad=a$ и $bd=b$, то $(a+b)d=a+b$.

Некоторые из этих аксиом уже встречались ранее (1, 7, 8), остальные же аксиомы являются ослаблениями аксиом коммутативности (2), ассоциативности (3, 4, 5, 6) и дистрибутивности (9). Аналогично можно получить и другие системы аксиом, определяющие структуру, беря за основу другие равенства (*).

Поступила 14.X 1950 г.