Некоторые вопросы теории конечных деформаций

Л. Г. Афендик

Способностью металлов выдерживать большие пластические деформации пользуются во многих технологических процессах (прокатка, прессование, ковка и пр.). Такой материал, как резина, может развивать значительные упругие деформации. Вследствие этого исследования больших деформаций представляют не только теоретический, но и значительный практический интерес.

За последние годы в советской литературе появился ряд статей и несколько монографий, посвященных вопросам больших пластических деформаций [1, 2, 3]. Как в нашей технической, так и в иностранной литературе для характеристики той или иной значительной деформации обычно пользуются величинами так называемых „истинных" главных удлинений и „истинных" сдвигов.

Применение указанных величин не дает возможности разобраться в целом ряде вопросов, связанных с процессами развития местных деформаций.

Прежде всего остается в стороне вопрос о направлениях главных осей деформации в данной точке деформируемого тела и об изменении этих направлений в процессе роста деформации.

Истинные сдвиги не выражают действительной, геометрической картины изменения углов между линейными и плоскими элементами при деформировании и оторваны от направлений.

Кроме того, для вычисления указанных величин в случае неоднородной деформации предварительно требуется определять величины обычных главных относительных удлинений в рассматриваемой точке. Однако каких-либо теоретических результатов определения последних для больших местных деформаций почти не существует.

Дальнейшие физико-технические исследования больших местных деформаций материалов следует, как нам кажется, проводить, опираясь на так называемую теорию конечных деформаций. Эта теория пользуется обычными геометрическими представлениями и соответствующим математическим аппаратом.

В 1947 г. вышла в свет монография Д. И. Кутилина „Теория конечных деформаций" [4], в которой достаточно подробно рассмотрен значительный круг вопросов, связанных с конечными деформациями. Однако в монографии не разбираются способы определения направлений главных деформаций и изменений направлений отдельных элементов, происшедшие в результате деформации.

В книге не был также затронут вопрос о наибольших сдвигах и их направлениях, в то время как эти сдвиги играют решающую роль в образовании пластических деформаций.

В появившейся позднее весьма содержательной монографии В. В. Новожилова „Основы нелинейной теории упругости" [5] также не рассмотрены некоторые зависимости, представляющие интерес для больших местных деформаций.

Целью настоящей работы было дальнейшее развитие тех вопросов теории конечных деформаций, которые, являясь важными для исследований больших местных деформаций материалов, не получили до сих пор достаточного освещения в литературе.

В статье применяются две системы координат: первая — связана с начальным, недеформированным состоянием, вторая — отнесена к деформированному состоянию. В основном все выкладки приведены относительно первой системы, а для второй координатной системы помещены, главным образом, окончательные результаты. Все преобразования рассматриваются в эвклидовом пространстве.

1. Изменения линейных элементов в системе координат начального состояния

Положение точек начального состояния тела будем определять криволинейными координатами x^1, x^2, x^3 и радиусом-вектором $\vec{r}$. Векторы $\vec{r}_\alpha$ координатного базиса, отнесенного к начальному состоянию точки, равны

$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора определим, как обычно, скалярными произведениями

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{1.2}$$

Для векторов $\vec{r}^\alpha$, взаимных с $\vec{r}_\alpha$, соответственно имеем

$$g^{\alpha\beta} = \vec{r}^\alpha \cdot \vec{r}^\beta; \tag{1.3}$$

$g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ связаны между собой девятью уравнениями

$$g_{\alpha k} g^{k\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1; & \alpha = \beta, \\ 0; & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь, как и в большинстве случаев ниже, знак суммирования по повторяющемуся индексу (k) опущен.

Для ортогональных систем координат, которые в дальнейшем применяются из практических соображений, эти уравнения упрощаются

$$g_{\alpha\alpha} g^{\alpha\alpha} = 1; \quad g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{1.5}$$

Вследствие деформации тела начальный радиус-вектор $\vec{r}$ какой-либо точки переходит в радиус-вектор $\hat{r}$. Рассматривая его как функцию координат начального состояния, введем такие величины

$$\hat{r}_\alpha = \frac{\partial \hat{r}}{\partial x^\alpha}; \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{r}_\alpha \cdot \hat{r}_\beta. \tag{1.6}$$

Очевидно, координатные векторы $\vec{r}_\alpha$ при деформации переходят в векторы $\hat{r}_\alpha$, и векторы $d\vec{r}$, определяющие в начальном состоянии положения точек, бесконечно близких к рассматриваемой, переходят в $d\hat{r}$.

Преобразование начального состояния в деформированное выполняется при помощи тензора преобразования

$$\Phi = \vec{r}^\alpha \hat{r}_\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\, \vec{i}^\alpha \hat{r}_\alpha = \sqrt{g^{11}}\, \vec{i}^1 \hat{r}_1 + \sqrt{g^{22}}\, \vec{i}^2 \hat{r}_2 + \sqrt{g^{33}}\, \vec{i}^3 \hat{r}_3, \tag{1.7}$$

причем через $\vec{i}_\alpha$ и $\vec{i}^\alpha$ везде в дальнейшем обозначены единичные векторы координатного базиса и взаимного с ним.

Так как $d\vec{r}$ и $d\hat{r}$ могут быть представлены в таком виде

$$d\vec{r} = \vec{r}_\alpha\, dx^\alpha; \quad d\hat{r} = \hat{r}_\alpha\, dx^\alpha,$$

то квадрат длины каждого из этих векторов равен соответственно

$$ds^2 = \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta; \quad d\hat{s}^2 = \sum_\alpha \sum_\beta \hat{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

поэтому

$$d\hat{s}^2 - ds^2 = \sum_\alpha \sum_\beta (\hat{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{1.8}$$

Компоненты $\bar{e}_{\alpha\beta}$ тензора конечной деформации обычно принимаются равными полуразностям выражений, стоящих в скобках правой части (1.8).

$$\hat{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}).$$

Для упрощения записи в приведенных ниже выкладках введены безразмерные компоненты конечной деформации $e_{\alpha\beta}$, которые связаны с тензорными компонентами соотношениями

$$e_{\alpha\beta} = \sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}}\, \bar{e}_{\alpha\beta}. \tag{1.9}$$

Для ортогональных криволинейных координат компоненты деформации равны

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\alpha}\hat{g}_{\alpha\alpha} - 1\right); \tag{1.10}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}\,\hat{g}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Допустим, что вектор перемещения $\vec{u}$ любой точки из начального состояния в деформированное задан, как функция координат начального состояния. Проекции этого вектора на координатные векторы $\vec{i}_\alpha$ в рассматриваемой точке в начальном состоянии обозначим u_α. Тогда ковариантный диференциал вектора перемещения равен

$$d\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha = \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g_{\beta\beta}}\,u_\beta\right)}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma\right]\sqrt{g^{\beta\beta}}\,\vec{i}^\beta dx^\alpha. \tag{1.11}$$

Символ $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ здесь имеет такое значение

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\gamma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right).$$

Так как

$$d\hat{r} = d\vec{r} + d\vec{u},$$

то в результате скалярного умножения получим

$$d\hat{s}^2 = (d\vec{r} + d\vec{u})^2.$$

Если воспользоваться (1.11), то разность квадратов длин элементарных векторов принимает такой вид

$$d\hat{s}^2 - ds^2 = \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha\right)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\left(\sqrt{g_{\beta\beta}}\,u_\beta\right)}{\partial x^\alpha} - 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\beta}\right]dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.12}$$

Вследствие этого компоненты тензора деформации выражаются через вектор перемещения по таким формулам

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}}{2}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha\right)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\left(\sqrt{g_{\beta\beta}}\,u_\beta\right)}{\partial x^\alpha} - 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\beta}\right] \tag{1.13}$$

(в правой части суммирование выполняется по индексу γ).

Для ортогональных систем координат, которые в дальнейшем применяются из практических соображений, эти уравнения упрощаются

Для цилиндрической системы координат ϱ, φ, z $g_{\varrho\varrho}=g_{zz}=1$, $g_{\varphi\varphi}=\varrho^2$. В этом случае компоненты тензора деформации на основании (1.13) равны

$$e_{\varrho\varrho}=\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varrho}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial\varrho}\right)^2\right];$$

$$e_{\varrho\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varrho}-\frac{u_\varphi}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varphi}-u_\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\varrho\right)+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_z}{\partial\varrho}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right];$$

$$e_{\varrho z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varrho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\varrho}+\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial z}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\varrho}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right];$$

$$e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\varrho}{\varrho}+\frac{1}{2\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varphi}-u_\varphi\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\varrho\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right)^2\right]; \tag{1.14}$$

$$e_{\varphi z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial\varphi}-u_\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\varrho\right)+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right];$$

$$e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right].$$

Рассмотрим изменение длины элементарного вектора $d\vec{r}$, образующего в начальном состоянии с координатными векторами углы, косинусы которых равны k, l и m. Если обозначим через ε относительное удлинение этого вектора, то, очевидно, $d\hat{s}=(1+\varepsilon)\,ds$.

С другой стороны, пользуясь тензором преобразования (1.7), получим

$$d\hat{r}=d\vec{r}\cdot\Phi=\left(\sqrt{g^{11}}\,k\hat{r}_1+\sqrt{g^{22}}\,l\hat{r}_2+\sqrt{g^{33}}\,m\hat{r}_3\right)ds\,. \tag{1.15}$$

После скалярного умножения $d\hat{r}$ на самого себя и введения в правую часть компонент деформации (1.10) получаем

$$(1+\varepsilon)^2=1+2\,(e_{11}k^2+e_{22}l^2+e_{33}m^2+2e_{12}kl+2e_{23}lm+2e_{13}km). \tag{1.16}$$

Таким образом, если известны компоненты конечной деформации, для каждого выбранного направления линейного элемента в начальном состоянии может быть вычислено его относительное удлинение.

В частности, относительные удлинения $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ в координатных направлениях определяются из (1.16) при условии, что один из косинусов равен единице, а два остальные — нули. Для этих направлений получаем

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \sqrt{1 + 2e_{\alpha\alpha}} - 1,$$
$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_{\alpha\alpha})^2 - 1\right] \tag{1.17}$$

Симметричному тензору конечной деформации соответствует тензорная поверхность второго порядка, центр которой поместим в рассматриваемой точке тела. Уравнение этой поверхности может быть получено из (1.16) после замены косинусов координатами точек рассматриваемой окрестности. Главные оси тензорной поверхности совпадают с направлениями главных относительных удлинений. Поэтому те линейные элементы, которые в результате деформирования тела получают экстремальные удлинения, в начальном состоянии должны быть взаимно перпендикулярны.

Величины и направления главных относительных удлинений определим, отыскивая экстремальные значения (1.16), как функции косинусов при дополнительном условии

$$k^2 + l^2 + m^2 - 1 = 0. \tag{1.18}$$

После того, как введем множитель Лагранжа $-2e_i$ и приравняем первые производные по косинусам нулю, получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} (e_{11} - e_i)\,k + e_{12}l + e_{13}m &= 0, \\ e_{12}k + (e_{22} - e_i)\,l + e_{23}m &= 0, \\ e_{13}k + e_{23}l + (e_{33} - e_i)\,m &= 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Если умножим эти уравнения соответственно на k, l и m и сложим, то убедимся, что на основании (1.16) e_i является главной деформацией. Главные относительные удлинения ε_i выражаются через главные деформации e_i следующим образом:

$$\varepsilon_i = \sqrt{1 + 2e_i} - 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.20}$$

Приравняв нулю определитель из коэфициентов уравнений (1.19), получим уравнение для определения главных деформаций e_i

$$\begin{vmatrix} e_{11} - e_i & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} - e_i & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} - e_i \end{vmatrix} = 0. \tag{1.21}$$

Направления главных деформаций для каждого значения e_i устанавливаются из уравнений (1.18) и (1.19). В случае плоской деформации можем принять $e_3 = e_{33}$; $e_{23} = e_{13} = 0$.

Обозначим через α угол между координатным вектором $\vec{i}_1$ и одним из главных направлений e_1 или e_2. Тогда величины и направления главных деформаций e_1 и e_2 находятся из соотношений

$$\left.\begin{aligned} e_{1,2} &= \frac{1}{2}\left[e_{11}+e_{22}\pm\sqrt{(e_{11}-e_{22})^2+4e_{12}^2}\right] \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2e_{12}}{e_{11}-e_{22}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

2. Условия неизменяемости главных направлений. Относительное изменение объема

В процессе деформирования тела компоненты деформации изменяются. Компоненты деформации в каждой точке можно рассматривать как функции не только координат, но и некоторого параметра λ, монотонно возрастающего и характеризующего степень деформации. Например, при кручении цилиндрических стержней за такой параметр может быть принят относительный угол закручивания. Во многих случаях параметром, определяющим состояние деформации, является время.

Установим условия, при которых направления главных деформаций не зависят от параметра λ. Косинусы углов главных направлений с координатными осями обозначим через k_i, l_i, m_i $(i=1, 2, 3)$. Так как они связаны между собой шестью известными соотношениями, то для определения направлений главных деформаций достаточно знать три из них.

Направления главных деформаций будем определять тремя какими-нибудь отношениями этих косинусов, выбирая для каждого отношения косинусы с одинаковыми индексами. Например, если $k_i \neq 0$, то направления главных деформаций могут быть заданы отношениями

$$\frac{l_1}{k_1}; \quad \frac{m_1}{k_1}; \quad \frac{l_2}{k_2}. \qquad (2.1)$$

Обозначим минор какого-либо элемента определителя (1.21), расположенного в строке α и в столбце β через $a_{\alpha\beta}$. На основании (1.19) очевидно, что упомянутые отношения косинусов с точностью до знаков равны отношениям миноров определителя (1.21). Например, $\frac{l_1}{k_1} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}$; поэтому косинусы, определяющие направления главных деформаций, не зависят от параметра λ тогда, когда три независимых отношения миноров определителя (1.21), не относящиеся к одной и той же главной деформации e_i, не зависят от этого параметра.

В этом случае направления главных деформаций проходят через одни и те же точки тела, и углы между главными линейными элементами, как это можно показать на основании § 5, остаются прямыми в процессе деформирования тела.

Для плоской деформации $e_{13}=e_{23}=0$. Отношение $\frac{l_1}{k_1}=\text{const}$ принимает такой вид

$$\frac{l_1}{k_1}=-\frac{e_{11}-e_{22}-\sqrt{(e_{11}-e_{22})^2+4e_{12}^2}}{2e_{12}}=\text{const}. \tag{2.2}$$

Деля числитель и знаменатель (2.2) на $e_{11}-e_{22}$, получаем такое условие независимости направлений главных деформаций e_1 и e_2 от параметра λ

$$\frac{2e_{12}}{e_{11}-e_{22}}=\text{const}. \tag{2.3}$$

Если в процессе деформирования выполняется условие неизменяемости отношения двух каких-либо разностей главных деформаций, например $\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\text{const}$, то и остальные отношения разностей главных деформаций остаются постоянными.

Указанное условие вместе с условием постоянства отношений миноров определителя (1.21) обеспечивает неизменяемость направляющего тензора деформации, введенного А. А. Ильюшиным [6] для малых деформаций.

Рассмотрим теперь относительное изменение объема при больших местных деформациях. Инварианты тензора конечной деформации записываются следующим образом:

$$J_1=e_{11}+e_{22}+e_{33}=e_1+e_2+e_3;$$

$$J_2=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix}=e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1;$$

$$J_3=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}=e_1e_2e_3. \tag{2.4}$$

Относительное изменение объема θ равно

$$\theta=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)-1.$$

Пользуясь формулами (1.20) и выражениями для инвариантов, представим относительное изменение объема в таком виде

$$\theta=\sqrt{1+2J_1+4J_2+8J_3}-1. \tag{2.5}$$

При больших пластических деформациях изменением объема можно пренебречь в сравнении с отдельными компонентами деформации. Условие неизменяемости объема для этого случая запишем в такой форме

$$J_1+2J_2+4J_3=0. \tag{2.6}$$

3. Поворот линейных элементов при больших деформациях

Линейный элемент начального состояния $d\vec{r}$ при деформации переходит в элемент $d\hat{r}$, причем изменяется не только его длина, но и направление относительно координатных векторов $\vec{i}_\alpha$ начального состояния.

Так как $d\hat{r}=d\vec{r}+d\vec{u}$, то проекция $d\hat{r}$ на какую-либо из координатных осей равна

$$\cos(d\hat{r}, \vec{i}_\alpha)\cdot d\hat{s}=\cos(d\vec{r}, \vec{i}_\alpha)\, ds+d\vec{u}\cdot\vec{i}_\alpha. \tag{3.1}$$

Последнее слагаемое в правой части предыдущего выражения является ковариантным диференциалом проекции u_α вектора перемещения. Имеем

$$d\vec{u}\cdot\vec{i}_\alpha=\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sum_\beta\sum_\gamma\left[\frac{\partial(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha)}{\partial x^\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma\right]dx^\beta. \tag{3.2}$$

Кроме того, $dx^\beta=\sqrt{g^{\beta\beta}}\cos(d\vec{r}, \vec{i}_\beta)\, ds$ и $d\hat{s}=(1+\varepsilon)\, ds$.

Вследствие этого после соответствующих замен из (3.1) получаем

$$\cos(d\hat{r}, \vec{i}_\alpha)=\frac{1}{1+\varepsilon}\Bigg\{\cos(d\vec{r}, \vec{i}_\alpha)+$$

$$+\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sum_\beta\sum_\gamma\left[\frac{\partial\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha)}{\partial x^\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma\right]\sqrt{g^{\beta\beta}}\cdot\cos(d\vec{r}, \vec{i}_\beta)\Bigg\}. \tag{3.3}$$

Относительное удлинение ε, входящее в правую часть, вычисляется согласно (1.16). В частности, рассмотрим тот случай, когда начальный элемент совпадал с координатным вектором $\vec{i}_k$. Последний после деформации имеет направление $\hat{i}_k$.

Допустим, что $k=\alpha$. Тогда, вводя компоненты конечной деформации, получаем

$$\cos(\hat{i}_\alpha, \vec{i}_\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+2e_{\alpha\alpha}}}\left[1+e_{\alpha\alpha}-\frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right)^2\right]. \tag{3.4}$$

Если $k=\beta\neq\alpha$, то

$$\cos(\hat{i}_\beta, \vec{i}_\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+2e_{\beta\beta}}}\left\{\frac{\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}}{2}\left[\frac{\partial(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha)}{\partial x^\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial(\sqrt{g_{\beta\beta}}u_\beta)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\beta}\right]+e_{\alpha\beta}\right\}. \tag{3.4'}$$

При отсутствии деформации линейные элементы могут изменить свое направление только в результате жесткого поворота окрестности рассматриваемой точки.

Условия такого поворота и углы поворота для координатных направлений выражаются следующим образом:

$$e_{\alpha\alpha}=e_{\alpha\beta}=0 \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3);$$

$$\cos(\hat{i}_\alpha,\ \vec{i}_\alpha)=1-\frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\right)^2;$$

$$\cos(\hat{i}_\beta,\vec{i}_\alpha)=\frac{\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}}{2}\left[\frac{\partial(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial(\sqrt{g_{\beta\beta}}\,u_\beta)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\beta}\right]. \qquad (3.5)$$

4. Изменения линейных элементов в системе координат деформированного состояния

Во многих, практически важных случаях ориентироваться в направлениях деформаций требуется не по начальной, а по измененной форме тела.

Криволинейные координаты точек деформированного состояния будем обозначать $y^1,\ y^2,\ y^3$, а соответствующий радиус-вектор $\vec{r}$ каждой точки рассматривать как функцию координат этого соотношения.

Координатные векторы $\vec{r}_\alpha$, отнесенные к какой-либо точке деформированного состояния, равны

$$\vec{r}_\alpha=\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3). \qquad (4.1)$$

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора, обозначенные так же, как и выше, определяются обычным путем

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^\beta} \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3). \qquad (4.2)$$

Каждому радиусу-вектору $\vec{r}$ деформированного состояния соответствует радиус-вектор $\hat{r}$ начального состояния, а бесконечно малому вектору $d\vec{r}$ соответствует вектор $d\hat{r}$.

Для дальнейшего потребуются, кроме того, такие соотношения

$$\hat{r}_\alpha=\frac{\partial\hat{r}}{\partial y^\alpha};\quad \hat{g}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\hat{r}}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial\hat{r}}{\partial y^\beta}. \qquad (4.3)$$

Тензор преобразования деформированного состояния в начальное представим в таком виде

$$\Phi=\vec{r}^{\,\alpha}\hat{r}_\alpha=\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,\vec{i}^{\,\alpha}\hat{r}_\alpha. \qquad (4.4)$$

Разность квадратов длин векторов $\vec{dr}$ и $\hat{dr}$ равна

$$ds^2-d\hat{s}^2=\sum_\alpha\sum_\beta(g_{\alpha\beta}-\hat{g}_{\alpha\beta})\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{4.5}$$

Компоненты конечной деформации для ортогональных координат в этом случае выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}&=\frac{1}{2}(1-g^{\alpha\alpha}\hat{g}_{\alpha\alpha});\\ e_{\alpha\beta}&=-\frac{1}{2}\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}\,\hat{g}_{\alpha\beta}\qquad(\alpha\neq\beta). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Допустим, что $\vec{u}$ обозначает вектор перемещения точки из начального состояния в деформированное, а $u_\alpha(y^1, y^2, y^3)$ проекции этого вектора на координатные оси деформированного состояния.

Компоненты конечной деформации могут быть представлены в таком виде

$$e_{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}}{2}\left[\frac{\partial(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha)}{\partial y^\beta}+\frac{\partial(\sqrt{g_{\beta\beta}}\,u_\beta)}{\partial y^\alpha}-2\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma-\frac{\partial\vec{u}}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial y^\beta}\right], \tag{4.7}$$

где суммирование выполняется по индексу γ.

Если $\vec{dr}$ образует с координатными векторами углы, косинусы которых k, l, m, то относительное удлинение ε этого элемента определяется из следующего соотношения:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}=1-2(e_{11}k^2+e_{22}l^2+e_{33}m^2+2e_{12}kl+2e_{23}lm+2e_{13}km). \tag{4.8}$$

Для координатных направлений относительные удлинения $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ равны

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-2e_{\alpha\alpha}}}-1. \tag{4.9}$$

Главные деформации e_i определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} e_{11}-e_i & e_{12} & e_{13}\\ e_{12} & e_{22}-e_i & e_{23}\\ e_{13} & e_{23} & e_{33}-e_i \end{vmatrix}=0. \tag{4.10}$$

Главные относительные удлинения ε_i выражаются через главные деформации

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\sqrt{1-2e_i}}-1\qquad(i=1,\ 2,\ 3). \tag{4.11}$$

Направления главных деформаций в деформированном теле устанавливаются на основании уравнений (1.18) и (1.19).

Условия неизменяемости объема записываются при помощи инвариантов в таком виде

$$J_1-2J_2-4J_3=0. \tag{4.12}$$

Наконец, углы между начальным элементом $d\hat{r}$ и координатными осями для заданного элемента $d\vec{r}$ деформированного состояния определяются уравнениями

$$\cos(d\hat{r},\vec{i}_\alpha)=(1+\varepsilon)\Big\{\cos(d\vec{r},\hat{i}_\alpha)-$$

$$-\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sum_\beta\sum_\gamma\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,u_\alpha\right)}{\partial y^\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\,u_\gamma\right]\sqrt{g^{\beta\beta}}\cos(d\vec{r},\vec{i}_\beta)\Big\}. \tag{4.13}$$

Здесь $\vec{i}_\alpha$ — единичные координатные векторы деформированного состояния и ε — относительное удлинение в направлении $d\vec{r}$.

5. Изменения углов и относительные сдвиги при больших деформациях

Рассмотрим изменение угла между двумя линейными элементами $d\vec{r}_i$ и $d\vec{r}_j$, которые в начальном состоянии тела образовывали с координатными направлениями углы с косинусами, равными соответственно k_i, l_i, m_i и k_j, l_j, m_j. Будем полагать, что в начальном состоянии указанные элементы были взаимно перпендикулярны. В результате деформации эти элементы перешли в векторы $d\hat{r}_i$ и $d\hat{r}_j$, а угол между ними стал равным $\frac{\pi}{2}+\psi_{ij}$.

В соответствии с (1.15) имеем

$$\begin{aligned}d\hat{r}_i&=(\sqrt{g^{11}}k_i\hat{r}_1+\sqrt{g^{22}}l_i\hat{r}_2+\sqrt{g^{33}}m_i\hat{r}_3)\,ds_i;\\ d\hat{r}_j&=(\sqrt{g^{11}}k_j\hat{r}_1+\sqrt{g^{22}}l_j\hat{r}_2+\sqrt{g^{33}}m_j\hat{r}_3)\,ds_j.\end{aligned} \tag{5.1}$$

После скалярного умножения $d\vec{r}_i$ на $d\vec{r}_j$ и введения в правую часть компонент конечной деформации получаем уравнение для определения изменения угла ψ_{ij} между элементами.

$$\sin\psi_{ij}=-\frac{1}{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_j)}[(1+2e_{11})\,k_ik_j+(1+2e_{22})\,l_il_j+(1+2e_{33})\,m_im_j+$$

$$+2e_{12}(k_il_j+k_jl_i)+2e_{23}(l_im_j+l_jm_i)+2e_{13}(k_im_j+k_jm_i)]. \tag{5.2}$$

При этом должны выполняться условия

$$\begin{aligned}k_ik_j+l_il_j+m_im_j&=0;\\ k_i^2+l_i^2+m_i^2-1&=0;\\ k_j^2+l_j^2+m_j^2-1&=0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Относительные удлинения ε_i и ε_j вычисляются согласно (1.16).

Понятие сдвига при больших деформациях определим таким же образом, как и в теории упругости.

Под относительным сдвигом между двумя линейными элементами или плоскостями, для которых эти элементы составляют линейный угол, будем понимать тангенс изменения угла между ними при условии, что в начальном состоянии элементы были взаимно перпендикулярны.

Следовательно, если γ_{ij} относительный сдвиг между указанными направлениями, то $\gamma_{ij}=\operatorname{tg}\psi_{ij}$.

Относительный сдвиг $\gamma_{\alpha\beta}$ для координатных направлений определяется на основании (5.2) после подстановки соответствующих косинусов. В этом случае относительный сдвиг равен

$$\gamma_{\alpha\beta}=-\frac{2e_{\alpha\beta}}{\sqrt{(1+2e_{\alpha\alpha})(1+2e_{\beta\beta})-4e_{\alpha\beta}^2}}. \tag{5.4}$$

Чтобы упростить вычисления наибольших сдвигов, а также октаэдрических сдвигов (то есть сдвигов между элементами, один из которых лежит в плоскости, одинаково наклоненной относительно главных направлений, а другой направлен по нормали к этой плоскости), примем за координатные направления взаимно перпендикулярные главные направления деформации в данной точке.

В этом случае $e_{11}=e_1$, $e_{22}=e_2$; $e_{33}=e_3$, а остальные компоненты деформации равны нулю.

Обозначим косинусы углов линейных элементов с главными направлениями попрежнему через k, l и m. Тогда относительный сдвиг запишется в таком виде

$$\operatorname{tg}\psi_{ij}=-\frac{(1+2e_1)k_ik_j+(1+2e_2)l_il_j+(1+2e_3)m_im_j}{\sqrt{[1+2(e_1k_i^2+e_2l_i^2+e_3m_i^2)][1+2(e_1k_j^2+e_2l_j^2+e_3m_j^2)]-[(1+2e_1)k_ik_j+(1+2e_2)l_il_j+(1+2e_3)m_im_j]^2}}. \tag{5.5}$$

Экстремальные значения γ_i $(i=1, 2, 3)$ относительных сдвигов находятся как экстремальные значения функции косинусов (5.5) при дополнительных условиях (5.3).

Опуская промежуточные вычисления, приводим значения γ_i наибольших относительных сдвигов и косинусов углов с главными направлениями деформации, определяющих направления этих сдвигов.

$$\begin{aligned}
\gamma_1&=\pm\frac{e_2-e_3}{\sqrt{(1+2e_2)(1+2e_3)}}; \quad k_{ij}=0; \quad l_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\\
\gamma_2&=\pm\frac{e_3-e_1}{\sqrt{(1+2e_1)(1+2e_3)}}; \quad k_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad l_{ij}=0, \quad m_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\\
\gamma_3&=\pm\frac{e_1-e_2}{\sqrt{(1+2e_1)(1+2e_2)}}; \quad k_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad l_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m_{ij}=0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Знак γ_i устанавливается на основании формулы (5.5).

Знаки косинусов выбираются таким образом, чтобы одинаковым знакам одной одноименной пары косинусов, например l_i и l, соответствовали разные знаки другой пары.

Таким образом, при больших деформациях, так же как и при малых деформациях, направления наибольших относительных сдвигов составляют углы по 45° с двумя главными направлениями и перпендикулярны к третьему.

На основании формул (5.6) и (1.20) наибольшие относительные сдвиги могут быть выражены через наибольшие относительные удлинения ε_i следующим образом:

$$\gamma_i = \pm \frac{(1+\varepsilon_j)^2-(1+\varepsilon_k)^2}{2(1+\varepsilon_j)(1+\varepsilon_k)} \qquad \begin{pmatrix} i \neq j \neq k; \\ i, j, k=1, 2, 3 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Знак правой части (5.7) выбирается в соответствии с (5.5).

Определим теперь октаэдрический сдвиг γ_8 для октаэдрических площадок. Октаэдрическим сдвигом назовем наибольший сдвиг между двумя линейными элементами, из которых один в начальном состоянии направлен по нормали к октаэдрической площадке, а другой лежит в плоскости этой площадки. Косинусы углов первого элемента с главными направлениями равны $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, а второго — k, l, m.

На основании (5.5) тангенс изменения угла между названными элементами равен

$$\operatorname{tg}\psi_8 = \frac{(1+2e_1)k+(1+2e_2)l+(1+2e_3)m}{\sqrt{[3+2(e_1+e_2+e_3)][1+2(e_1k^2+e_2l^2+e_3m^2)] - [(1+2e_1)k+(1+2e_2)l+(1+2e_3)m]^2}}, \tag{5.8}$$

причем

$$\begin{gathered} k+l+m=0; \\ k^2+l^2+m^2-1=0. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Наибольшее значение $\operatorname{tg}\psi_8$, как функции k, l и m, при дополнительных условиях (5.9) определяет октаэдрический сдвиг γ_8.

Опуская промежуточные вычисления, приведем выражения для γ_8 через наибольшие относительные сдвиги γ_i и через наибольшие относительные удлинения ε_i, а также значения косинусов для линейного элемента в октаэдрической площадке

$$\gamma_8 = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2},$$

$$\gamma_8 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{[(1+\varepsilon_1)^2-(1+\varepsilon_2)^2]^2}{(1+\varepsilon_1)^2(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{[(1+\varepsilon_2)^2-(1+\varepsilon_3)^2]^2}{(1+\varepsilon_2)^2(1+\varepsilon_3)^2} + \frac{[(1+\varepsilon_3)^2-(1+\varepsilon_1)^2]^2}{(1+\varepsilon_3)^2(1+\varepsilon_1)^2}}; \tag{5.10}$$

$$k^2=\frac{[(1+2e_2)(e_3-e_1)-(1+2e_3)(e_1-e_2)]^2}{3[(1+2e_1)^2(e_2-e_3)^2+(1+2e_2)^2(e_3-e_1)^2+(1+2e_3)^2(e_1-e_2)^2]},$$

$$l^2=\frac{[(1+2e_3)(e_1-e_2)-(1+2e_1)(e_2-e_3)]^2}{3[(1+2e_1)^2(e_2-e_3)^2+(1+2e_2)^2(e_3-e_1)^2+(1+2e_3)^2(e_1-e_2)^2]}, \quad (5.11)$$

$$m^2=\frac{[(1+2e_1)(e_2-e_3)-(1+2e_2)(e_3-e_1)]^2}{3[(1+2e_1)^2(e_2-e_3)^2+(1+2e_2)^2(e_3-e_1)^2+(1+2e_3)^2(e_1-e_2)^2]}.$$

Все приведенные выводы сделаны относительно системы ортогональных криволинейных координат, связанных с начальным состоянием тела.

Для координатной системы y^1, y^2, y^3, отнесенной к деформированному состоянию, дадим следующее определение относительных сдвигов.

Относительным сдвигом между двумя линейными элементами, взаимно перпендикулярными в деформированном теле, назовем тангенс изменения угла между ними в процессе деформирования. Относительный сдвиг для этих координатных направлений равен

$$\gamma_{\alpha\beta}=-\frac{2e_{\alpha\beta}}{\sqrt{(1-2e_{\alpha\alpha})(1-2e_{\beta\beta})-4e_{\alpha\beta}^2}}. \quad (5.12)$$

Наибольшие относительные сдвиги в этом случае определяются по формулам

$$\gamma_i=\pm\frac{e_j-e_k}{\sqrt{(1-2e_j)(1-2e_k)}} \qquad \begin{pmatrix} i\neq j\neq k; \\ i, j, k=1, 2, 3\end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Направления наибольших сдвигов составляют углы по 45° с двумя главными направлениями в деформированном теле и перпендикулярны к третьему главному направлению. Выражение (5.7) для наибольших сдвигов через главные относительные удлинения сохраняется и для координат деформированного состояния.

Выражения (5.10) для октаэдрического сдвига γ_8 также сохраняются для указанной системы координат. Несколько изменяются формулы для косинусов углов октаэдрического линейного элемента.

6. Кручение цилиндрических стержней

Рассмотренную теорию применим к определению деформаций при кручении цилиндрических стержней.

Опытные исследования кручения цилиндрических стержней из малоуглеродистых отпущенных сталей показали, что углы закручивания θ на единицу длины могут достигать значительных величин (превышающих, например, 200° на 1 *см* длины). Если в процессе закручивания точки стержня могут свободно смещаться вдоль оси, то при больших углах закручивания диаметр стержня немного уменьшается, а длина его увеличивается.

В соответствии с опытами будем полагать, что при кручении цилиндрических стержней поперечные сечения остаются плоскими. Величину относительного уменьшения диаметра обозначим через a, а величину относительного увеличения длины стержня — через b. Эти величины будем считать зависящими только от угла закручивания θ.

Воспользуемся цилиндрическими координатами ϱ, φ, z, отнесенными сперва к начальному, недеформированному состоянию.

Проекции вектора перемещения на координатные оси начального состояния в этом случае равны

$$\begin{aligned} u_\varrho &= -\varrho+\varrho(1-a)\cos\theta z, \\ u_\varphi &= \varrho(1-a)\sin\theta z, \\ u_z &= bz. \end{aligned} \tag{6.1}$$

На основании (1.14) компоненты тензора конечной деформации имеют такие значения

$$\begin{array}{lll} e_{\varrho\varrho}=-a; & e_{\varrho\varphi}=0; & e_{\varrho z}=0; \\ e_{\varphi\varrho}=0; & e_{\varphi\varphi}=-a; & e_{\varphi z}=\dfrac{1}{2}\gamma(1-a)^2; \\ e_{z\varrho}=0; & e_{z\varphi}=\dfrac{1}{2}\gamma(1-a)^2; & e_{zz}=b+\dfrac{1}{2}\gamma^2(1-a)^2, \end{array} \tag{6.2}$$

где $\gamma=\varrho\theta$.

В точках боковой поверхности величины a и b малы по сравнению с γ, причем $\gamma>1$ (при больших θ), а a и b значительно меньше единицы. Поэтому квадратами a и b можем пренебречь.

Главные деформации в плоскости, перпендикулярной к ϱ, при указанном условии на основании (1.22) равны

$$e_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{b+\frac{1}{2}\gamma^2(1-2a)\pm\sqrt{\left[b+\frac{1}{2}\gamma^2(1-2a)\right]^2+\gamma^2(1-2a)}\right\}. \tag{6.3}$$

Если пренебрежем еще величиной b, то главные относительные удлинения, перпендикулярные ϱ, выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_{1,2}=\sqrt{1+\frac{\gamma^2(1-2a)}{4}}\pm\frac{\gamma(1-a)}{2}-1. \tag{6.4}$$

Относительное удлинение в радиальном направлении равно

$$\varepsilon_3=\sqrt{1-2a}-1.$$

Отнесем теперь цилиндрическую систему координат к деформированному состоянию.

Тогда

$$u_\varrho = \varrho - \varrho(1+a)\cos\theta z;$$
$$u_\varphi = \varrho(1+a)\sin\theta z; \tag{6.5}$$
$$u_z = bz.$$

Компоненты конечной деформации для этой системы координат равны

$$\begin{aligned} &e_{\varrho\varrho} = -a; && e_{\varrho\varphi} = 0; && e_{\varrho z} = 0; \\ &e_{\varphi\varrho} = 0; && e_{\varphi\varphi} = -a; && e_{\varphi z} = \frac{1}{2}\gamma(1+a)^2; \\ &e_{z\varrho} = 0; && e_{z\varphi} = \frac{1}{2}\gamma(1+a)^2; && e_{zz} = b - \frac{1}{2}\gamma^2(1+a)^2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

При кручении направления главных деформаций изменяются, так как условия, указанные в § 2, не выполняются. Кроме того, в зависимости от угла закручивания θ главными становятся все новые и новые элементы стержня. Легко также показать, что те линейные элементы, которые для определенного θ являются главными и, следовательно, взаимно перпендикулярными между собой как в начальном состоянии, так и после закручивания на угол θ, в процессе кручения не остаются взаимно перпендикулярными.

Для стержня с радиусом $r = 0{,}5$ *см* примем $\gamma = 2\left(\theta \approx 230^\circ \dfrac{1}{см}\right)$. Обозначим через α угол между главным направлением, перпендикулярным к ϱ, и осью z в начальном состоянии. Пренебрегая величинами a и b, как малыми относительно γ, получаем на основании (1.22)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{6.7}$$

Направления главных деформаций в начальном состоянии определяются такими углами

$$\alpha_1 = 22^\circ 30'; \quad \alpha_2 = -67^\circ 30'.$$

После закручивания на угол θ линейные элементы, являющиеся главными, повернутся и образуют с осью z углы, соответственно равные α_1^* и α_2^*. Вычисленные при помощи соотношения (3.3), эти углы оказались такими

$$\alpha_1^* = 67^\circ 30'; \quad \alpha_2^* = -22^\circ 30',$$

то есть в данном случае главные линейные элементы повернулись на 45° относительно оси стержня.

Наибольший относительный сдвиг γ_{max} равен на основании (5.7)

$$\gamma_{max} = -\gamma \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} = -2{,}82.$$

Это означает, что угол между первоначально перпендикулярными элементами уменьшился на 70°30′.

7. Переход к малым деформациям и к так называемым „истинным" деформациям

Если компоненты деформации $e_{\alpha\alpha}$ малы по сравнению с единицей, то на основании формул (1.17) и (4.11) получаем $e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha}$. В этих случаях производные от компонент $\boldsymbol{u}_\alpha$ вектора перемещения по координатам также малые величины, и углы поворота координатных элементов становятся малыми, что видно из формул (3.4) [1].

При малых деформациях выражения (5.4) и (5.12) для относительных сдвигов $\gamma_{\alpha\beta}$ между координатными направлениями переходят в такие

$$\gamma_{\alpha\beta} = -2e_{\alpha\beta}. \tag{7.1}$$

Формулы (5.6) и (5.13), которые определяют величины наибольших относительных сдвигов γ_i, переходят для малых деформаций в такие известные выражения

$$\gamma_i = \pm(e_j - e_k) \qquad \begin{pmatrix} i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3; \\ i \neq j \neq k \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где $e_j = \varepsilon_j$ — главные относительные удлинения.

Наконец, для октаэдрического сдвига γ_8 в случае малых деформаций из (5.10) также получается известная формула

$$\gamma_8 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \tag{7.3}$$

Как уже указывалось в начале статьи, в технике при описании больших деформаций пользуются величинами так называемых „истинных" удлинений и „истинных" сдвигов.

Название „истинные" не соответствует содержанию этих понятий, поэтому нам кажутся правильными предложения, появившиеся в советской литературе, называть эти величины аддитивными удлинениями и аддитивными сдвигами [2].

Здесь мы кратко остановимся на возможности выразить величины истинных или аддитивных деформаций через компоненты конечной деформации.

---

[1]) Подробнее об этом см. В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости.

[2]) Н. А. Одинг, Основы прочности металлов паровых котлов, турбин и турбогенераторов, 1949.

Главные аддитивные удлинения e_i^* и главные аддитивные сдвиги g_i выражаются через главные относительные удлинения следующим образом:

$$e_i^* = \ln(1+\varepsilon_i);$$
$$g_i = e_j^* - e_k^* = \ln\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_k} \qquad \begin{pmatrix} i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3; \\ i \neq j \neq k \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Если воспользуемся формулами (1.20) и (4.11) для главных относительных удлинений, то получим такие зависимости аддитивных деформаций от главных компонент конечной деформации

$$\begin{aligned} e_i^* &= \pm\frac{1}{2}\ln(1 \pm 2e_i); \\ g_i &= \pm\frac{1}{2}\ln\frac{1 \pm 2e_j}{1 \pm 2e_k}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь знак $+$ относится к системе координат, связанной с начальным состоянием, а знак $-$ к координатной системе деформированного состояния.

Так как $1+\varepsilon_i = \exp e_i^*$, то из (5.7) и (7.4) вытекает такая связь между наибольшими относительными сдвигами γ_i и аддитивными сдвигами g_i

$$\gamma_i = \operatorname{sh} g_i. \tag{7.6}$$

Аддитивный октаэдрический сдвиг g_8, введенный А. Надаи для больших деформаций, при условии неизменяемости объема и при пропорциональности между двумя какими-нибудь главными аддитивными удлинениями (e_1^* и e_2^*) имеет следующее значение

$$g_8 = 2\sqrt{\frac{2}{3}\left(e_1^{*2} + e_1^* e_2^* + e_2^{*2}\right)}. \tag{7.7}$$

После замены аддитивных удлинений в правой части этого выражения в соответствии с (7.4) получаем

$$g_8 = 2\sqrt{\frac{2}{3}\left[\ln^2(1+\varepsilon_1) + \ln(1+\varepsilon_1)\ln(1+\varepsilon_2) + \ln^2(1+\varepsilon_2)\right]}. \tag{7.8}$$

Сравнение (7.8) с приведенной выше величиной (5.10) октаэдрического относительного сдвига γ_8 показывает, что аддитивный октаэдрический сдвиг g_8 совершенно не выражает изменений углов при больших деформациях в площадках, имеющих одинаковые углы с тремя главными направлениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Фридман, Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1946.
2. С. И. Губкин, Теория обработки металлов давлением, Металлургиздат, 1947.
3. Г. А. Смирнов-Аляев, Сопротивление материалов пластическим деформациям, Машгиз, 1949.
4. Д. И. Кутилин, Теория конечных деформаций, ОГИЗ, 1947.
5. В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, ОГИЗ, 1948.
6. А. А. Ильюшин, Пластичность, ОГИЗ, 1948.

Поступила 20.X 1950 г.