Явные формулы для решения систем обыкновенных диференциальных уравнений

В. А. Тартаковский

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [2, 3] я показал, как можно получить явные формулы для локальных разложений решений аналитической системы обыкновенных диференциальных уравнений исходя из известных теорем о существовании решения и его свойствах. В настоящей работе эти явные формулы будут получены непосредственно, и тем самым будет получено доказательство и самой теоремы существования посредством прямых оценок, без помощи метода мажорирующих уравнений, и доказательство теоремы об аналитической зависимости решения от начальных значений.

Рассмотрим автономную каноническую систему диференциальных уравнений

$$\frac{dx_\nu}{dt} = f_\nu(x_1, \ldots, x_n); \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{0.1}$$

Пусть все правые части системы (0.1) суть аналитические функции своих аргументов в некоторой области D, содержащей начало координат ($x_1 = 0;\ x_2 = 0; \ldots, x_n = 0$) внутри себя и пусть в D справедливы разложения

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a^{(\nu)}_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{0.2}$$

Мы будем всюду в дальнейшем пользоваться символом: $a^{(\nu)}_{k_1, \ldots, k_n}$, при любых целых значениях индексов $k_1, \ldots, k_n$, причем будем приписывать этому символу значение нуль, если хоть один из индексов будет иметь отрицательное значение.

Пусть t_0 — произвольное значение аргумента t. По теореме Коши существует одно и только одно решение системы (0.1), аналитическое по t в некоторой окрестности точки t_0 ($|t - t_0| < h$, где $h > 0$) и притом такое, что

$$x_1(t_0) = x_{1,0}; \ldots; x_n(t_0) = x_{n,0}:$$

$$x_\mu(t) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \beta^{(\mu)}_\sigma (t - t_0)^\sigma; \quad \beta^{(\mu)}_0 = x_{\mu,0}; \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{0.3}$$

Для вычисления коэфициентов $\beta_\sigma^{(\mu)}$ можно пользоваться формулой

$$\beta_\sigma^{(\mu)}=\frac{1}{\sigma!}\left[f_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{\sigma-1}f_\mu(x_1,\ldots,x_n)\Bigg|_{\substack{x_1=x_{1,0}\\ \cdots\cdots\\ x_n=x_{n,0}}}; \quad (0.4)$$

$$\begin{pmatrix}\mu=1,2,\ldots,n\\ \sigma=1,2,\ldots\end{pmatrix}$$

Таким образом, коэфициенты $\beta_\sigma^{(\mu)}$ оказываются аналитическими около начала координат функциями от $x_{1,0},\ldots,x_{n,0}$. Обычно и рассматривают вектор $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ как функцию скаляра t и вектора начальных значений $\tilde{x}_0=(x_{1,0},\ldots,x_{n,0})$. Однако зависимость вектора $\tilde{x}$ от вектора $\tilde{x}_0$ нелинейна и потому отыскать ее нелегко.

Здесь оказывается полезной одна общая алгебраическая идея, которая может иметь довольно широкое поле применений. Идея эта состоит в том, чтобы произвести взаимно однозначное отображение объектов $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_0$ на новые и притом многокомпонентные объекты, которые благодаря этой многокомпонентности отображают зависимость между $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_0$, локально, как зависимость линейную. Такую операцию можно назвать „линеаризацией посредством расширения объекта". Очевидно, что после такой линеаризации расширением можно вместо зависимости между $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_0$. изучать зависимость между новыми „расширенными" объектами.

В нашем случае в качестве таких расширенных объектов проще всего выбирать такую систему компонент, которая состояла бы из компонент самого $\tilde{x}$ и их функций, образующих вместе полную систему в пространстве аналитических функций. Например, за расширенные объекты можно принять однострочную матрицу

$$x=\|1,x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^2,x_1x_2,\ldots;x_n^2,\ldots,x_1^k,x_1^{k-1}x_2,\ldots,x_n^k,\ldots\| \qquad (0.5)$$

и однострочную матрицу x_0, составленную из чисел $x_{1,0},\ldots,x_{n,0}$ таким же образом, как матрица x составлена из чисел $x_1,\ldots,x_n$. Зависимость между $\tilde{x}$ и x и между $\tilde{x}_0$ и x_0, очевидно, взаимно однозначна, а между x и x_0 — локально линейна. Последнее обстоятельство имеет место вследствие того, что равенства

$$x_\nu=\sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty}b^{(\nu)}_{l_1,\ldots,l_n}(t)\,x_{1,0}^{l_1}\ldots x_{n,0}^{l_n} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \qquad (0.6)$$

локально справедливы, около начала, по теореме об аналитическом характере зависимости решений системы (0.1) от начальных значений, т. е. от компонент вектора $\tilde{x}_0$. А путем перемножения равенств (0.6) (с повторениями) мы получаем равенства

$$x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}=\sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty}b^{k_1,\ldots,k_n}_{l_1,\ldots,l_n}(t)\,x_{n,0}^{l_n}\ldots x_{n,0}^{l_n} \qquad (k_1,\ldots,k_n=0,1,2,\ldots), \quad (0.7)$$

которые справедливы в некоторой области, содержащей внутри себя начало и притом общей для всех рядов (0.7).

Пусть $B(t)$ есть бесконечная направо и вниз матрица коэфициентов системы равенств (0.7)

$$B(t) = \left\| \begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ldots b^{k_1, \ldots, k_n}_{l_1, \ldots, l_n}(t) \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\| \qquad \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ l_1, \ldots, l_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

Тогда систему равенств (0.7) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$x = x_0 \cdot B(t). \tag{0.9}$$

Очевидно, что целесообразность линеаризации (0.9) зависит от возможности отыскания зависимости матрицы $B(t)$ от аргумента t и от степени сложности этой зависимости. Отыскание этой зависимости представляет основную задачу настоящей работы.

При этом, попутно, окажется доказанной теорема о существовании у систем (0.1) решения, аналитически зависящего от аргумента t и начальных значений $\tilde{x}_0$

Вместе с тем здесь, в качестве вспомогательных сведений, будет приведен ряд свойств матриц и их функций, свойств, которые будут полезны и при других применениях в теории диференциальных уравнений явных формул для решений.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

§ 1. Обозначения

Систему чисел $(q_1, \ldots, q_n)$ мы будем обозначать $\tilde{q}$. Обозначение это мы будем употреблять и в том случае, когда эта система чисел есть вектор и тогда, когда она есть точка и тогда, наконец, когда все компоненты $q_1, \ldots, q_n$ суть целые числа, а сама система является составным индексом.

Матрицу, составленную из строк матрицы $\mathfrak{M}$, имеющих номера $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$, мы будем обозначать $\{\mathfrak{M}\}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma}$. Матрицу, составленную из столбцов матрицы $\mathfrak{M}$, имеющих номера $\beta_1, \ldots, \beta_\tau$, мы будем обозначать $\{\mathfrak{M}\}^{\beta_1, \ldots, \beta_\tau}$. Символ $\{\mathfrak{M}\}^{\beta_1, \ldots, \beta_\tau}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma}$ обозначает матрицу, которая получится из матрицы $\mathfrak{M}$, если удалить из нее все ее строки, кроме строк с номерами $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$, и все ее столбцы, кроме столбцов с номерами $\beta_1, \ldots, \beta_\tau$. В частности, элемент матрицы $\mathfrak{M}$, стоящий на пересечении ее α-овой строки и β-ового столбца будет обозначен символом $\{\mathfrak{M}\}^{\beta}_{\alpha}$. Эти обозначения являются развитием обозначений, введенных И. А. Лаппо-Данилевским (см. [1]) и оказавшихся чрезвычайно удобными.

Во многих случаях элементами матриц являются коэфициенты при членах вида: $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, так что окажется удобным брать за индекс строки или столбца матрицы систему чисел, заключенных в круглые скобки: $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Так, символ $\{\mathfrak{M}\}_{(k_1, \ldots, k_n)}$ будет обозначать ту строку матрицы $\mathfrak{M}$, которая имеет составной индекс $(k_1,\dots, k_n)$. Систему чисел $(k_1, \dots, k_n)$ мы будем, как указано выше, сокращенно обозначать $\tilde{k}$. Так, например:

$$\{\mathfrak{M}\}^{(l_1, \dots, l_n)}_{(k_1, \dots, k_n)} = \{\mathfrak{M}\}^{\tilde{l}}_{\tilde{k}}.$$

Условимся еще сумму компонент составного индекса $\tilde{k}$ обозначать $\bar{k}$, т. е., если $\tilde{k}=(k_1, \dots, k_n)$, то $\bar{k}=k_1+\dots+k_n$.

Мы будем рассматривать бесконечные матрицы, ряды которых перенумерованы составными индексами. При перемножении таких матриц элементы произведения будут представлять собой, вообще говоря, суммы бесконечного числа слагаемых. Мы будем, как правило, рассматривать лишь такие произведения, при которых бесконечные ряды, представляющие собой элементы произведения, сходятся безусловно (т. е. не зависят от порядка слагаемых). Если же при этом возникнет необходимость суммирования рядов, сходящихся не безусловно, то возникнет и необходимость в упорядочении множества составных индексов. В зависимости от рассматриваемой проблемы это придется делать по-разному. Один из таких способов — лексикографический, состоящий в том, что считают $\tilde{k}$ старше $\tilde{l}$, если $\bar{k}>\bar{l}$, а при $\bar{k}=\bar{l}$, если $k_1=l_1$; $k_2=l_2; \dots; k_\sigma=l_\sigma$; $k_{\sigma+1}>l_{\sigma+1}$ $(\sigma=0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Мы будем говорить, что у последовательности матриц $\mathfrak{M}$ существует предел, если существуют пределы всех последовательностей их одноименных компонент:

$$\{\mathfrak{M}_1\}^q_p; \quad \{\mathfrak{M}_2\}^q_p; \dots$$

и при этом

$$\{\lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{M}_\nu\}^q_p = \lim_{\nu\to\infty} \{\mathfrak{M}_\nu\}^q_p. \tag{1.1}$$

Говоря коротко, предел матрицы вычисляется покомпонентно. Отсюда следует, что диференцирование матрицы по скаляру и вычисление определенного интеграла от матрицы также производится покомпонентно.

Пространство точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i — произвольные комплексные числа, мы будем обозначать через E, а пространство точек $(x_1, \dots, x_n, t)$ — через E'. Иногда, при этом, мы будем обозначать комплексное переменное t ради симметрии через x_{n+1}.

Открытый равносторонний полицилиндр

$$|x_1|<r; \dots; |x_n|<r$$

в пространстве E мы будем обозначать $Z(r)$. Если мы хотим в обозначении полицилиндра отметить положительность r, то мы будем ставить у Z знак плюс справа вверху: $Z^+(r)$. Если нам важна только положительность r, а не его точное значение, то мы будем в символе полицилиндра опускать радиус: Z^+.

Открытый полицилиндр:

$$|x_1|<r; \dots; |x_n|<r; \quad |t|<\varrho$$

в пространстве E' мы будем обозначать $U(r; \varrho)$. Символы $U^+(r, \varrho)$ и U^+ означают, что в $U(r, \varrho)$, $r > 0$ и $\varrho > 0$.

Обозначение замкнутых полицилиндров будет отличаться от обозначения открытых полицилиндров чертой над Z или U ($\overline{Z}(r)$; $\overline{U}(r, \varrho)$; $\overline{Z}^+$ и т. д.).

§ 2. Некоторые свойства действий над матрицами

1°. Для того чтобы матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно было перемножить, число столбцов матрицы $\mathfrak{A}$ (левого множителя) должно быть равно числу строк матрицы $\mathfrak{B}$ (правого множителя). Должно быть также установлено одно-однозначное соответствие между множеством столбцов матрицы $\mathfrak{A}$ и множеством строк матрицы $\mathfrak{B}$, которое указывало бы, какие элементы строк $\mathfrak{A}$ и столбцов $\mathfrak{B}$ должны быть перемножаемы (с последующим суммированием) при образовании элементов произведения $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Это соответствие мы будем всегда в дальнейшем представлять себе осуществленным путем нумерации столбцов матрицы $\mathfrak{A}$ и строк матрицы $\mathfrak{B}$ одной и той же системой индексов. Однако система индексов есть множество, вообще говоря, не упорядоченное. Поэтому значение суммы

$$\sum_{\varrho} \{\mathfrak{A}\}_p^{\varrho} \{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}, \tag{2.1}$$

представляющей собою значение $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^q$, в случае бесконечного числа значений индекса ϱ, зависит, вообще говоря, от порядка суммирования, т. е. от способа упорядочения системы индексов ϱ. Если суммы (2.1) при всех возможных значениях p и q сходятся при некотором способе упорядочения системы индексов ϱ, то мы будем говорить, что при этом способе упорядочения системы индексов произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ „существует" или „сходится". Если все ряды (2.1) сходятся безусловно, то мы будем говорить, что произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ сходится или существует безусловно. (Известно, что сходимость $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ при всех способах нумерации индексов, обеспечивает безусловность сходимости).

2°. Для того чтобы умножение упорядоченного множества трех матриц $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ было сочетательным, должны сходиться произведения

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}; \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}; \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}; \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \tag{2.2}$$

и должно быть выполнено равенство

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}). \tag{2.3}$$

(Мы в дальнейшем под сочетательностью матриц $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ будем понимать все эти пять обстоятельств).

Существенно, что из сходимостей (2.2) равенство (2.3) не следует, что показывает такой пример:

$$\{\mathfrak{A}\}_p^{\varrho} = \delta_p^1; \quad \{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma} = \delta_{\sigma-\varrho}^1 - \delta_{\varrho-\sigma}^1; \quad \{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q} = \delta_1^q.$$

Тогда

$$\{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}\}^q_p = \sum_\sigma \left(\left[\sum_\varrho \delta^1_p (\delta^1_{\sigma-\varrho} - \delta^1_{\varrho-\sigma}) \right] \delta^q_1 \right) = \delta^1_p \delta^q_1 \cdot \sum_\sigma [(1-\delta^1_\sigma) - 1] =$$

$$= \delta^1_p \delta^q_1 \sum_\sigma (-\delta^1_\sigma) = \delta^1_\sigma \delta^q_1 \cdot (-1).$$

$$\{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})\}^q_p = \sum_\varrho \left(\left[\sum_\sigma \delta^1_p (\delta^1_{\sigma-\varrho} - \delta^1_{\varrho-\sigma}) \right] \delta^q_1 \right) = \delta^1_p \delta^q_1 \cdot \sum_\varrho [1 - (1-\delta^1_\varrho)] =$$

$$= \delta^1_p \delta^q_1 \sum_\varrho \delta^1_\varrho = \delta^1_p \delta^q_1 (+1).$$

3°. При сложении матриц вопрос о сходимости возникает лишь в случае бесконечного числа слагаемых. При этом безусловная сходимость суммы матриц равнозначна с безусловной сходимостью всех рядов компонент.

4°. Распределительность умножения суммы двух матриц $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на матрицу $\mathfrak{C}$ справа означает сходимость произведений

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}; \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}; \quad (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}. \tag{2.4}$$

и справедливость равенства

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}. \tag{2.5}$$

Очевидно, что равенство (2.5) есть следствие сходимостей (2.4), и что третья сходимость (2.4) следует из двух остальных.

5°. Распределительность умножения суммы бесконечного числа слагаемых $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ на матрицу $\mathfrak{B}$ (справа) означает сходимость всех произведений

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}, \ldots; \; \mathfrak{A}_k\mathfrak{B}; \ldots \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.6'}$$

сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k\mathfrak{B} \tag{2.6''}$$

произведения

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right) \mathfrak{B} \tag{2.6'''}$$

и справедливость равенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right) \mathfrak{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k\mathfrak{B}. \tag{2.7}$$

Здесь одни только сходимости (2.6) не влекут за собой справедливость равенства (2.7). Вот тому пример:

$$\{\mathfrak{A}_k\}^\tau_\sigma = \delta^1_{\tau-k} - \delta^1_{k-\tau} \quad \text{и} \quad \{\mathfrak{B}\}^\beta_\alpha = 1.$$

Тогда

$$\left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right) \mathfrak{B} \right\}^q_p = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \{\mathfrak{A}_k\}^\varrho_p \{\mathfrak{B}\}^q_\varrho \right] = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\delta^1_{\varrho-k} - \delta^1_{k-\varrho}) \cdot 1 \right] =$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{\infty} [(1-\delta^1_\varrho) - 1] = -\sum_{\varrho=1} \delta^1_\varrho = -1.$$

Между тем

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{A}_k\mathfrak{B})\right\}_p^q=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\varrho=1}^{\infty}(\delta^1_{\varrho-k}-\delta^1_{k-\varrho})\right]=\sum_{k=1}^{\infty}[1-(1-\delta^1_k)]=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^1_k=+1.$$

6°. Мы будем говорить, что умножение суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{B}$ слева и на $\mathfrak{C}$ справа — регулярно, если выполнены следующие условия: сходятся произведения

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k;\quad \mathfrak{A}_k\mathfrak{C};\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k)\,\mathfrak{C};\quad \mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}_k\mathfrak{C})\qquad (k=1,\ 2,\dots) \tag{2.8'}$$

и справедливы равенства

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k)\,\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}_k\mathfrak{C})\qquad (k=1,\ 2,\dots); \tag{2.9}$$

сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C};\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}, \tag{2.8''}$$

сходятся произведения

$$\mathfrak{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right);\quad \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{C};\quad \left[\mathfrak{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\right]\mathfrak{C};\quad \mathfrak{B}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{C}\right] \tag{2.8'''}$$

и справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k;\quad \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{C}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}\\ &\mathfrak{B}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{C}\right]=\left[\mathfrak{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\right]\mathfrak{C}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}\end{aligned}\right\}. \tag{2.10}$$

И здесь, как показывают простые примеры, одних сходимостей недостаточно: равенства (2.10) могут не выполняться и в том случае, когда все сходимости (2.8) имеют место.

§ 3. Неотрицательные матрицы

Мы будем называть матрицу $\mathfrak{M}$ „неотрицательной“, если все ее элементы вещественны и не отрицательны, т. е. если

$$\{\mathfrak{M}\}_p^q\geqslant 0.$$

Мы будем говорить, что неотрицательная матрица $\mathfrak{M}$ не меньше неотрицательной матрицы $\mathfrak{N}$, если все элементы матрицы $\mathfrak{M}$ не меньше соответственных элементов матрицы $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{M}\geqslant\mathfrak{N}\longleftrightarrow\{\mathfrak{M}\}_p^q\geqslant\{\mathfrak{N}\}_p^q.$$

Для неотрицательных матриц справедливы следующие предложения (ввиду их очевидности мы ограничимся доказательством лишь немногих из них).

I. Сумма конечного числа неотрицательных матриц неотрицательна. Если у бесконечного ряда неотрицательных матриц есть сумма, то она есть также неотрицательная матрица.

II. Если произведение двух неотрицательных матриц существует, то оно есть также матрица неотрицательная.

III. Если ряд неотрицательных матриц сходится, то он сходится безусловно, т. е. он сходится при любом порядке слагаемых в сумме и значение суммы не зависит от порядка суммирования.

IV. Если, при каком-либо способе упорядочения системы индексов, которой нумеруются столбцы неотрицательной матрицы $\mathfrak{A}$ и строки неотрицательной матрицы $\mathfrak{B}$, их произведение существует, то у них существует произведение и при любом другом способе упорядочения этой системы индексов и все эти произведения равны друг другу. Это свойство мы будем в дальнейшем называть свойством безусловности умножения неотрицательных матриц.

V. Если $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ неотрицательные матрицы, не большие, чем неотрицательные матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \leqslant \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

VI. Если существует произведение неотрицательных матриц $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и неотрицательные матрицы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ таковы, что $\mathfrak{A}' \leqslant \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \leqslant \mathfrak{B}$, то существует также произведение $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ и, притом: $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \leqslant \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. В частности, если $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, то из существования $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ и того обстоятельства, что $\mathfrak{A}' \leqslant \mathfrak{A}$ следует, что существует и $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ и что $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

VII. Если $\mathfrak{A}'_\nu \leqslant \mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные матрицы и ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}_\nu$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}'_\nu$ и, притом

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}'_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}_\nu.$$

VIII. Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ неотрицательные матрицы, то для того, чтобы умножение их было сочетательно, достаточно сходимости произведений: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$. Тройное произведение матриц, перемножающихся сочетательным образом, мы будем обозначать: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (без скобок).

Доказательство.

$$\{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}\}_p^q = \sum_\sigma \left[\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^\sigma \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right] = \sum_\sigma \left(\left[\sum_\varrho \{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \{\mathfrak{B}\}_\varrho^\sigma\right] \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right) =$$
$$= \sum_\sigma \left[\sum_\varrho \left(\{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \{\mathfrak{B}\}_\varrho^\sigma \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right)\right].$$

А этот двойной ряд ввиду безусловного характера сходимости рядов с неотрицательными членами равен ряду

$$\sum_\varrho \left[\sum_\sigma \left(\{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \{\mathfrak{B}\}_\varrho^\sigma \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right)\right].$$

Так как произведение $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ существует, то все ряды

$$\sum_{\sigma}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}=\{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}_{\varrho}^{q}$$

сходятся и потому

$$\sum_{\sigma}\left(\{\mathfrak{A}\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}\right)=\{\mathfrak{A}\}_{p}^{\varrho}\left(\sum_{\sigma}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}\right)=\{\mathfrak{A}\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}_{\varrho}^{q},$$

вследствие чего

$$\{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}\}_{q}^{p}=\sum_{\varrho}\{\mathfrak{A}\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}_{\varrho}^{q},$$

а это по определению есть $\{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})\}_{p}^{q}$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что в вышеприведенном критерии сочетательности умножения существование произведения $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$ может быть заменено существованием произведения $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

IX. Если матрицы $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$ неотрицательны, то для того чтобы умножение суммы матриц $\mathfrak{A}_k$ на матрицу $\mathfrak{B}$ (справа) было распределительно, достаточно сходимости всех произведений $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$ и рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$.

Доказательство.

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}\right\}_{p}^{q}=\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}\}_{p}^{q}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\varrho}\{\mathfrak{A}_k\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}\right],$$

а, вследствие безусловного характера сходимости рядов с положительными членами, это равно

$$\sum_{\varrho}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}\right].$$

Ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ и, следовательно, сходимости всех рядов $\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right\}_{p}^{\varrho}$, в последней двойной сумме можно вынести за квадратную скобку (т. е. за суммы по индексу k) множитель $\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}$, вследствие чего

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}\right\}_{p}^{q}=\sum_{\varrho}\left(\left[\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\}_{p}^{\varrho}\right]\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}\right)=\sum\left[\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right\}_{p}^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{q}\right]=$$

$$=\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{B}\right\}_{p}^{q},$$

что и требовалось доказать.

Дистрибутивность умножения (2.1) может быть обеспечена и другой системой условий; она имеет место, если матрицы $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$ неотрицательны, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ сходится и произведение $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{B}$ существует. В этом случае окажется, что существуют все произведения $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$ и что сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$ и сумма его равна произведению $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{B}$.

В самом деле, из существования $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{A}_\nu\right)\cdot\mathfrak{B}$ и того, что по VII $\mathfrak{A}_k\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{A}_\nu$ из VI следует существование произведения $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$ при всех $k=1, 2,\ldots$. Сходимость же ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}$ и равенство его произведению $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{B}$ доказывается следующим преобразованием

$$\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\mathfrak{B}\right\}_p^q=\sum_{\varrho}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^q=\sum_{\varrho}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\}_p^{\varrho}\right]\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^q=$$
$$=\sum_{\varrho}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\{\mathfrak{A}_k\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^q\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\varrho}\{\mathfrak{A}_k\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^q\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}\}_p^q=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\right\}_p^q,$$

что и требовалось доказать.

X. Для того чтобы умножение суммы $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{B}$ слева и $\mathfrak{C}$ справа, где $\mathfrak{B}$, все $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{C}$ суть неотрицательные матрицы, было регулярно, достаточно только сочетательности умножения $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{C}$ $(k=1, 2,\ldots)$ и сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C};\quad \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}. \tag{2.8''}$$

Доказательство. Существование первых двух произведений в (2.8‴) и справедливость первых двух равенств из (2.10) следует из IX. Существование обоих тройных произведений из (2.8‴) и равенство их сумме $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}$, а, значит, и друг другу, получается из (2.8″) и (2.9) путем двукратного применения IX.

Заметим еще, что сочетательность умножения $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{C}$ обеспечивается по VIII также только сходимостями, а именно сходимостями произведений $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_k\mathfrak{C}$ и или $(\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k)\mathfrak{C}$ или $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_k\mathfrak{C})$.

Замечание. Изложенное выше в VIII, IX, X можно суммировать так: для неотрицательных матриц сочетательность умножения, распределительность и регулярность умножения на бесконечную сумму обеспечивается одними только сходимостями, из которых следует существование обеих сторон соответственных равенств. Справедливость же самих этих равенств оказывается следствием свойства перестановочности слагаемых в рядах с неотрицательными членами.

Отсюда следует, что, в случае неотрицательных матриц, из сочетательности или распределительности или регулярности соответственных действий для майорирующих матриц следует наличие этих свойств и у матриц майорируемых.

§ 4. Модули матриц

Мы будем называть модулем матрицы $\mathfrak{A}$ матрицу, элементы которой суть модули соответственных элементов матрицы $\mathfrak{A}$, и обозначать ее $|\mathfrak{A}|$, так, что

$$\{|\mathfrak{A}|\}_p^q = |\{\mathfrak{A}\}_p^q|.$$

Значение этого понятия определяется тем, что безусловность суммы бесконечного числа слагаемых, безусловность произведения двух сомножителей, сочетательность умножения, распределительность умножения на сумму бесконечного числа слагаемых и регулярность умножения ряда на две матрицы (справа на одну и слева на другую), оказываются обеспеченными, если эти свойства имеют место в отношении модулей рассматриваемых матриц.

Мы перечислим ниже соответственные предложения, ограничиваясь снова доказательством лишь немногих из них.

XI. Если ряд модулей матриц $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k \ldots$ сходится, то сходится и ряд самих этих матриц и такую сходимость мы будем называть абсолютной.

Абсолютно сходящийся матричный ряд сходится безусловно.

XII. Если существует (сходится) произведение модулей двух матриц, то произведение самих матриц тоже существует (сходится), и оно безусловно, а такую сходимость произведения мы будем называть абсолютной его сходимостью.

XIII. Если существует произведение модулей двух матриц, то оно больше, чем модуль произведения этих матриц или равно ему.

XIV. Модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых.

XV. Если сочетательно умножение модулей матриц $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, то и умножение самих матриц $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ также сочетательно и безусловно.

Доказательство. По XII из существования $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|$ и $|\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$ следует существование и безусловность произведений $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Так как по XIII, $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \leqslant |\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|$, то из существования $(|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|) \cdot |\mathfrak{C}|$ по VI следует существование и произведения $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$, а отсюда, по XII, следует существование и безусловность произведения $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$. Аналогично доказывается существование и безусловность произведения $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Докажем теперь равенство (2.3)

$$\{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})\}_p^q = \sum_\varrho \{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}_\varrho^q = \sum \left[\{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \left(\sum_\sigma \{\mathfrak{B}\}_\varrho^\sigma \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right)\right] =$$

$$= \sum_\varrho \left[\sum_\sigma \left(\{\mathfrak{A}\}_p^\varrho \{\mathfrak{B}\}_\varrho^\sigma \{\mathfrak{C}\}_\sigma^q\right)\right].$$

Эта последняя двойная сумма сходится безусловно, ибо сходится абсолютно.

В самом деле, из существования произведений $|\mathfrak{B}|\cdot|\mathfrak{C}|$ и $|\mathfrak{A}|(|\mathfrak{B}||\mathfrak{C}|)$ следует, что

$$\{(|\mathfrak{A}|)(|\mathfrak{B}||\mathfrak{C}|)\}_p^q = \sum_{\varrho}\Big[\sum_{\sigma}\{|\mathfrak{A}|\}_p^{\varrho}\{|\mathfrak{B}|\}_{\varrho}^{\sigma}\{|\mathfrak{C}|\}_{\sigma}^{q}\Big] =$$

$$= \sum_{\varrho}\Big[\Big(\sum_{\sigma}|\{\mathfrak{A}\}_p^{\varrho}|\,|\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}|\,|\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}|\Big]$$

и, что последний двойной ряд сходится, а он и есть сумма модулей интересующей нас двойной суммы. Но тогда

$$\{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})\}_p^q = \sum_{\sigma}\Big[\sum_{\varrho}\{\mathfrak{A}\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}\Big] = \sum_{\sigma}\Big[\Big(\sum_{\varrho}\{\mathfrak{A}\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{B}\}_{\varrho}^{\sigma}\Big)\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}\Big] =$$

$$= \sum_{\sigma}\Big(\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^{\sigma}\{\mathfrak{C}\}_{\sigma}^{q}\Big) = \{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}\}_p^q,$$

что и требовалось доказать.

XVa. Из XV и VIII следует, что сходимость произведений $|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{B}||\mathfrak{C}|$ и или $|\mathfrak{A}|(|\mathfrak{B}||\mathfrak{C}|)$, или $(|\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|)|\mathfrak{C}|$ влечет за собой сочетательность и безусловность умножения матриц $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (взятых в указанном порядке)

XVI. Если умножение (слева) модуля матрицы $\mathfrak{B}$ на сумму модулей матриц $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ распределительно, то распределительно и умножение (слева) самой матрицы $\mathfrak{B}$ на сумму матриц $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$

При этом все произведения $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k$ и произведение $\mathfrak{B}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\Big)$ сходятся безусловно.

Доказательство. Существование и безусловность суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ следует по XI из существования $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$. Вследствие того, что существует $|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$, существуют и безусловны все $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k$ и, по XIII, $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k| \leqslant \leqslant |\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$. Но тогда, по VII, из существования $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$ следует существование $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k|$, а отсюда, по XI, следует, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k$ существует и безусловна. Из XIV следует, что $\Big|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$ и потому, по VI, произведение $|\mathfrak{B}|\Big|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\Big|$ существует и, следовательно, по XII, существует и безусловно произведение $\mathfrak{B}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\Big)$. Равенство же

$$\mathfrak{B}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k = \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k \tag{4.1}$$

доказывается так:

$$\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\Big\}_p^q = \sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\}_p^q = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{\varrho=1}^{\infty}\{\mathfrak{B}\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{A}_k\}_{\varrho}^{q}\Big].$$

Эта двойная сумма, из-за существования суммы $\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$, сходится абсолютно и потому безусловно и, следовательно:

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_k\right\}_p^q=\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{B}\}_p^{\varrho}\{\mathfrak{A}_k\}_{\varrho}^q\right]=\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left[\{\mathfrak{B}\}_p^{\varrho}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}_k\}_{\varrho}^q\right]=$$

$$=\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left[\{\mathfrak{B}\}_p^{\varrho}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right\}_{\varrho}^q\right]=\left\{\mathfrak{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k\right)\right\}_p^q,$$

что и доказывает (4.1).

Очевидно, аналогичный результат справедлив и для умножения ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{B}$ справа.

XVIa. По IX и XIII из XVI следует, что для распределительности умножения $\mathfrak{B}$ на $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ достаточно, чтобы сходились все произведения $|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$ $(k=1, 2, \ldots)$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|$ или ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$ и произведение $|\mathfrak{B}|\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$.

XVII. Если умножение суммы $\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|$ на $|\mathfrak{B}|$ слева и на $|\mathfrak{C}|$ справа регулярно, то регулярно и умножение суммы $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{B}$ слева и на $\mathfrak{C}$ справа. Доказательство проводится аналогично предыдущим.

XVIII. По X и XVII следует, что для регулярности умножения суммы $\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}_k$ на $\mathfrak{B}$ слева и на $\mathfrak{C}$ справа, достаточно сочетательности умножения $|\mathfrak{B}|$ на $|\mathfrak{A}_k|$ на $|\mathfrak{C}|$, при всех $k=1, 2, \ldots$ и сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k|;\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k|;\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{A}_k||\mathfrak{C}|;\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\mathfrak{B}||\mathfrak{A}_k||\mathfrak{C}|. \qquad (4.2)$$

§ 5. Полуконечные матрицы

Матрицы, бесконечные направо и вниз, с одинаковой системой индексов для нумерации строк и столбцов мы будем называть в дальнейшем бесконечными квадратными матрицами.

Бесконечные квадратные матрицы, у которых в каждой строке все элементы, начиная с некоторого места, суть нули, мы будем называть полуконечными.

Пусть у полуконечной матрицы $\mathfrak{A}$ в каждой k-той строке тот элемент, начиная с которого все элементы этой строки суть нули, имеет номер $\varphi_{\mathfrak{A}}(k)+1$ и, следовательно,

$$\{\mathfrak{A}\}_k^l=0, \quad \text{при } l>\varphi_{\mathfrak{A}}(k). \qquad (5.1)$$

Теорема. *Множество $\mathfrak{M}$ всех полуконечных матриц есть кольцо относительно действий сложения и умножения.*

Доказательство. Докажем выполнимость и замкнутость обоих действий в $\mathfrak{M}$.

$$\{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\}_p^q=\{\mathfrak{A}\}_p^q+\{\mathfrak{B}\}_p^q,$$

и, следовательно,

$$\varphi_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}(k)\leqslant\max(\varphi_{\mathfrak{A}}(k),\ \varphi_{\mathfrak{B}}(k)).$$

Так что $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}$

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^q=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\{\mathfrak{A}\}_p^\sigma\{\mathfrak{B}\}_\sigma^q=\sum_{\sigma=1}^{\varphi_{\mathfrak{A}}(p)}\{\mathfrak{A}\}_p^\sigma\{\mathfrak{B}\}_\sigma^q. \tag{5.2}$$

Вследствие конечности этой суммы $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ существует.

Пусть $\max(\varphi_{\mathfrak{C}}(1),\ \varphi_{\mathfrak{C}}(2),\dots,\varphi_{\mathfrak{C}}(k))=\bar{\varphi}_{\mathfrak{C}}(k)$. Тогда в последней сумме в (5.2) исчезнут все члены, у которых $q>\varphi_{\mathfrak{B}}(\sigma)$ и, если $q>\max(\varphi_{\mathfrak{B}}(1),\ \varphi_{\mathfrak{B}}(2),\dots,\varphi_{\mathfrak{B}}(\sigma),\dots,\varphi_{\mathfrak{B}}(\varphi_{\mathfrak{A}}(p)))$, то в этой сумме исчезнут все члены и элемент $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^q$ окажется равен нулю. Иначе говоря, при $q>\bar{\varphi}_{\mathfrak{B}}(\varphi_{\mathfrak{A}}(p))$, $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}_p^q=0$, т. е. $\varphi_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(k)\leqslant\bar{\varphi}_{\mathfrak{B}}(\varphi_{\mathfrak{A}}(k))$ и, следовательно, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}$.

Все остальные свойства кольца множеством $\mathfrak{M}$, очевидно, выполняются. В частности, ассоциативность умножения является следствием замкнутости умножения в $\mathfrak{M}$ и того, что по формуле (5.2) элемент произведения полуконечных матриц получается из элементов сомножителей путем конечного числа умножений и сложений.

Из этой теоремы видно, что полуконечные матрицы обладают тем важным свойством, что при выполнении над ними конечного числа действий сложения, вычитания и умножения не возникает вопроса о сходимости. Вопрос о сходимости, так же как и в отношении конечных матриц, возникает лишь в отношении результатов бесконечного числа действий над матрицами.

§ 6. Матрицы второго рода

Мы будем называть матрицей второго рода матрицу, все элементы которой суть также матрицы, но конечных измерений, и, притом, все элементы из одной, например, p-той строки нашей матрицы второго рода суть матрицы с одинаковым числом строк (m_p), а все элементы из одного, например, q-того столбца нашей матрицы 2-го рода суть матрицы с одинаковым числом столбцов (n_q). Систему чисел

$$\begin{pmatrix} n_1,\ n_2,\dots,\ n_q,\dots \\ m_1,\ m_2,\dots,\ m_p,\dots \end{pmatrix}$$

мы будем называть структурой матрицы второго рода. Самую матрицу второго рода мы будем обозначать буквой в круглых скобках, например $(\mathfrak{C})$, так что

$$\begin{pmatrix} n_1,\ n_2,\dots,\ n_q,\dots \\ m_1,\ m_2,\dots,\ m_p,\dots \end{pmatrix}=\text{структура }(\mathfrak{C}).$$

Если $n_1 = m_1$; $n_2 = m_2$;..., то мы будем называть структуру матрицы второго рода симметричной и записывать ее одной строкой

$$(m_1,\ m_2, \ldots,\ m_p \ldots).$$

Обычная матрица, которая получается из матрицы второго рода $(\mathfrak{C})$ снятием перегородок, отделяющих матричные элементы матрицы $(\mathfrak{C})$ друг от друга, мы будем обозначать через $\mathfrak{C}$, без скобок и говорить, что матрица $\mathfrak{C}$ и матрица второго рода $(\mathfrak{C})$ соответствуют друг другу. При этом элементы матрицы $(\mathfrak{C})$ мы будем называть „полями" соответственной матрицы $\mathfrak{C}$, а переход от $\mathfrak{C}$ к $(\mathfrak{C})$ — „разбиением" $\mathfrak{C}$ на поля со структурой $\begin{pmatrix} n_1,\ n_2, \ldots \\ m_1,\ m_2, \ldots \end{pmatrix}$. Впрочем, иногда мы будем называть элементы $(\mathfrak{C})$ „полями" без упоминания о матрице $\mathfrak{C}$, подчеркивая этим природу этих элементов. Числа m_i мы будем называть высотой, а числа n_j — шириной соответственного поля[1]).

Теорема. *Если матрицы второго рода* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *и* $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ *имеют одинаковую структуру:* $\begin{pmatrix} n_1,\ n_2, \ldots \\ m_1,\ m_2, \ldots \end{pmatrix}$; *то* $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B})$.

Доказательство

$$\{\{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\}_p^q\}_\sigma^\tau = \{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\}_{m_1+\ldots+m_{p-1}+\sigma}^{n_1+\ldots+n_{q-1}+\tau} = \{\mathfrak{A}\}_{m_1+\ldots+m_{p-1}+\sigma}^{n_1+\ldots+n_{q-1}+\tau} +$$
$$+ \{\mathfrak{B}\}_{m_1+\ldots+m_{p-1}+\sigma}^{n_1+\ldots+n_{q-1}+\tau} = \{\{(\mathfrak{A})\}_p^q\}_\sigma^\tau + \{\{(\mathfrak{B})\}_p^q\}_\sigma^\tau$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, m_p;\quad \tau = 1, 2, \ldots, n_q).$$

Из этого следует, что у обыкновенных матриц $\{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\}_p^q$ и $\{(\mathfrak{A})\}_p^q + \{(\mathfrak{B})\}_p^q$ все соответственные элементы одинаковы и потому

$$\{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\}_p^q = \{(\mathfrak{A})\}_p^q + \{(\mathfrak{B})\}_p^q = \{(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B})\}_p^q \qquad (p,\ q = 1, 2, \ldots),$$

а это означает, что у матриц второго рода $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A})+(\mathfrak{B})$ все их соответственные элементы равны, вследствие чего равны и сами эти матрицы.

Теорема. *Если существует произведение* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *матриц* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, *и путем разбиения этих матриц образованы матрицы второго рода* $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ *и* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ *со структурами, равными, соответственно*

$$\begin{pmatrix} n_1,\ n_2, \ldots \\ m_1,\ m_2, \ldots \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} r_1,\ r_2, \ldots \\ n_1,\ n_2, \ldots \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} r_1,\ r_2 \ldots \\ m_1,\ m_2 \ldots \end{pmatrix}$$

то существует и произведение $(\mathfrak{A})$ *на* $(\mathfrak{B})$, *причем*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A})(\mathfrak{B}).$$

[1]) Заметим, что в дальнейших работах, посвященных применению к теории диференциальных уравнений метода явных формул для решения, нам надо будет разбивать матрицы на поля, которые сами тоже будут бесконечными матрицами.

Доказательство. Существование $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ есть следствие существования $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, ибо получается из $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ разбиением. Покажем, что существование $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ влечет за собой и существование $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})$.

$$\{\{(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})\}_p^q\}_\sigma^\tau = \Big\{\sum_\varrho \{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho \cdot \{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q\Big\}_\sigma^\tau = \sum_\varrho \{\{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho \cdot \{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q\}_\sigma^\tau =$$

$$= \sum_\varrho \left[\sum_{\nu=1}^{n_\varrho} \{\{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho\}_\sigma^\nu \{\{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q\}_\nu^\tau\right] = \sum_\varrho \left[\sum_{\nu=1}^{n_\varrho} \{\mathfrak{A}\}_{m_1+\ldots+m_{p-1}+\sigma}^{n_1+\ldots+n_{\varrho-1}+\nu} \{\mathfrak{B}\}_{n_1+\ldots+n_{\varrho-1}+\nu}^{r_1+\ldots+r_{q-1}+\tau}\right] =$$

$$= \sum_\varrho \left[\sum_{\mu=n_1+\ldots+n_{\varrho-1}+1}^{n_1+\ldots+n_\varrho+n_\varrho} \{\mathfrak{A}\}_{m_1+\ldots+m_{p-1}+\sigma}^{\mu} \{\mathfrak{B}\}_{\mu}^{r_1+\ldots+r_{q-1}+\tau}\right].$$

Иначе говоря, элементы полей в $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})$ получаются в виде тех же рядов, какие дают и соответственные элементы в $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ (т. е. и элементы полей в $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, с тем различием, что в них, не изменяя порядка членов, выполнены группировки последовательно расположенных членов по $n_1, n_2, \ldots$. Таким образом, частные суммы для рядов, выражающих элементы из полей в $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})$ образуют подпоследовательности последовательностей частных сумм для соответственных элементов из $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ или, что то же, элементов полей $\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ и, так как последние последовательности, по условию теоремы, сходятся, то, как их подпоследовательности, сходятся и первые последовательности и, притом, к тем же пределам. Вследствие этого мы получаем, одновременно, и существование $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})$ и равенство его $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, что и требовалось доказать.

§ 7. Ступенчатые матрицы

Мы называем матрицу $\mathfrak{B}$ ступенчатой матрицей структуры $(m_1, m_2, \ldots)$, если при разбиении ее с симметричной структурой $(m_1, m_2, \ldots)$, преобразующем ее в матрицу $(\mathfrak{B})$, все элементы $(\mathfrak{B})$ направо от диагонали, равны нулю, т. е. $\{(\mathfrak{B})\}_p^q = 0$ при $q > p$.

Теорема. *Множество $\mathfrak{R}(m_1, m_2, \ldots) = \mathfrak{R}$ всех ступенчатых матриц с фиксированной структурой $(m_1, m_2, \ldots)$ образует кольцо относительно действий сложения и умножения.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{R}$ есть часть кольца полуконечных матриц, то достаточно доказать, что $\mathfrak{R}$ замкнуто относительно вычитания (что очевидно) и умножения. Пусть $\mathfrak{R} \ni \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R} \ni \mathfrak{B}$ и пусть $(\mathfrak{A})$ и $(\mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ получаются из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ разбиением с симметричной структурой $(m_1, m_2, \ldots)$. Тогда, так как $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A})(\mathfrak{B})$, то

$$\{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\}_p^q = \{(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})\}_p^q = \sum_\sigma \{(\mathfrak{A})\}_p^\sigma \{(\mathfrak{B})\}_\sigma^q = \sum_{\sigma=1}^{p} \{(\mathfrak{A})\}_p^\sigma \{(\mathfrak{B})\}_\sigma^q =$$

$$= \sum_{q \leq \sigma \leq p} \{(\mathfrak{A})\}_p^\sigma \{(\mathfrak{B})\}_\sigma^q.$$

При $q > p$ область суммирования пуста и сама сумма, следовательно, равна нулю. Таким образом, $\{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\}_p^q = 0$ при $q > p$, т. е. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}$, что и требовалось доказать.

В кольце $\mathfrak{N}$ может быть детально исследован вопрос об обратимости матриц кольца. Прежде всего докажем теорему.

Теорема. *Для того чтобы у ступенчатой матрицы $\mathfrak{A}$ структуры $(m_1, m_2, \dots)$ существовала правая обратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные поля матрицы $\mathfrak{A}$ были неособенными матрицами, т. е. чтобы*

$$\{(\mathfrak{A})\}_\sigma^\sigma \neq 0; \qquad \sigma = 1, 2, 3, \dots \tag{7.1}$$

В этом случае, у матрицы $\mathfrak{A}$ имеется правая обратная матрица $\mathfrak{B}$, которая единственна, как правая обратная для $\mathfrak{A}$, и которая оказывается также ступенчатой той же структуры, что и $\mathfrak{A}$ и с неособенными диагональными квадратами.

Доказательство. В процессе доказательства мы будем все разбиения матриц на матрицы второго рода производить с симметричной структурой $(m_1, m_2, \dots)$.

Докажем прежде всего, что для того чтобы у матрицы $\mathfrak{A}$ существовала правая обратная матрица $\mathfrak{B}$, матрица $\mathfrak{A}$ должна удовлетворять условиям (7.1), а матрица $\mathfrak{B}$ должна лежать в $\mathfrak{N}(m_1, m_2, \dots)$.

Из равенства

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = I,$$

где I — единичная матрица (т. е. $\{I\}_p^q = \delta_p^q$; $p, q = 1, 2, \dots$), по § 6 следует, что

$$(\mathfrak{A})(\mathfrak{B}) = (I).$$

Перепишем это равенство по-элементно:

$$\{(I)\}_p^q = \sum_\varrho \{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho \{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q = \{(\mathfrak{A})\}_p^p \{(\mathfrak{B})\}_p^q + \sum_{1 \leqslant \varrho \leqslant p-1} \{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho \{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q. \tag{7.2}$$

Доказательство того, что

$$D[\{(\mathfrak{A})\}_\sigma^\sigma] \neq 0; \qquad \sigma = 1, 2, \dots \tag{7.3}$$

$$\{(\mathfrak{B})\}_\sigma^\sigma = [\{(\mathfrak{A})\}_\sigma^\sigma]^{-1}; \qquad \sigma = 1, 2, \dots \tag{7.4}$$

$$\{(\mathfrak{B})\}_\sigma^\tau = 0, \text{ при } \tau = \sigma+1, \sigma+2, \dots . \tag{7.5}$$

проведем методом индукции по номеру строки.

При $\sigma = 1$, по (7.2) $\{(I)\}_1^q = \{(\mathfrak{A})\}_1^1 \{(\mathfrak{B})\}_1^q$. При $q = 1$, мы получаем (7.3) и (7.4) для $\sigma = 1$, а при $q \geqslant 2$ — (7.5). Положим $q = p$. Тогда, по индуктивной гипотезе, все $\{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q$, при $\varrho = 1, 2, \dots, p-1$, равны нулю и потому (7.2) принимает вид

$$\{(I)\}_p^p = \{(\mathfrak{A})\}_p^p \{(\mathfrak{B})\}_p^p.$$

Откуда следует (7.3) и (7.4) для $\sigma=p$. Но тогда $[\{(\mathfrak{A})\}_p^p]^{-1}$ существует и (7.2) можно разрешить относительно $\{(\mathfrak{B})\}_p^q$:

$$\{(\mathfrak{B})\}_p^q=[\{(\mathfrak{A})\}_p^p]^{-1}\{(I)\}_p^q-\sum_{1\leqslant\varrho\leqslant p-1}[\{(\mathfrak{A})\}_p^p]^{-1}\{(\mathfrak{A})\}_p^\varrho\{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q. \tag{7.6}$$

При $q>p$, в последней сумме $\varrho\leqslant p-1<q$ и потому, по индуктивной гипотезе все $\{(\mathfrak{B})\}_\varrho^q=0$, а так как матрица $\{(I)\}_p^q$ при $q>p$ тоже равна нулю, то (7.5) оказывается также справедливым, при $\sigma=p$.

Из формулы (7.6), далее, очевидным образом следует как достаточность условий (7.1) для существования $\mathfrak{B}$, так и единственность $\mathfrak{B}$.

Ступенчатые матрицы, у которых все диагональные матрицы не особенны, мы будем называть неособенными ступенчатыми матрицами; остальные ступенчатые матрицы мы будем называть особенными ступенчатыми.

Теорема. *У неособенной ступенчатой матрицы ее правая обратная является и левой обратной, т. е. просто обратной.*

Доказательство. Так как, по предыдущей теореме $\mathfrak{B}\in\mathfrak{N}$ $(m_1, m_2,\ldots)$ и по (7.4) неособенна, то она имеет правую обратную, которую мы обозначим $\mathfrak{C}$ и которая лежит также в $\mathfrak{N}$ $(m_1, m_2,\ldots)$,

$$I=\mathfrak{B}\mathfrak{C}. \tag{7.7}$$

Из ассоциативности умножения матриц из $\mathfrak{N}$ следует, что

$$\mathfrak{C}=I\cdot\mathfrak{C}=[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}]\cdot\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cdot[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]=\mathfrak{A}\cdot I=\mathfrak{A}.$$

Подставляя матрицу $\mathfrak{A}$ в (7.7) вместо $\mathfrak{C}$

$$I=\mathfrak{B}\mathfrak{A},$$

убеждаемся в справедливости теоремы

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^{-1}.$$

Таким образом, неособенность ступенчатой матрицы является необходимым и достаточным условием ее обратимости.

Заметим еще, что у ступенчатой матрицы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{N}$ имеется левая обратная $\mathfrak{B}$ только тогда, когда сама матрица $\mathfrak{A}$ неособенна, и тогда эта левая обратная есть просто обратная.

Действительно, из равенства

$$I=\mathfrak{B}\mathfrak{A};\quad \mathfrak{B}\in\mathfrak{N} \tag{7.8}$$

следует, что $\mathfrak{A}$ есть для $\mathfrak{B}$ правая обратная, а тогда, по доказанному выше, матрица $\mathfrak{B}$ должна быть неособенной (ибо лежит в $\mathfrak{N}$ и имеет правую обратную). А матрица $\mathfrak{A}$, как правая обратная для неособенной $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{N}$, тоже неособенна и просто обратна матрице $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}^{-1}$. Умножим (7.8) справа на $\mathfrak{A}^{-1}$:

$$I\cdot\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}^{-1}=(\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1})=\mathfrak{B}I=\mathfrak{B}.$$

Множество всех неособенных матриц из $\mathfrak{N}$ $(m_1, m_2,\ldots)$, очевидно, образует группу, которую мы обозначим Γ $(m_1, m_2,\ldots)$. Чаще всего в качестве чисел $m_1, m_2, \ldots$ мы будем брать числа $N_1(n)$, $N_2(n), \ldots, N_k(n), \ldots$, где $N_k(n)$ есть число членов формы общего вида k-той степени от n переменных. При этом мы будем обозначать

$$\mathfrak{N}(N_1(n),\ N_2(n), \ldots) = \mathfrak{N}_n \quad \text{и} \quad \Gamma(N_1(n),\ N_2(n), \ldots) = \Gamma_n.$$

Заметим, что в отношении левых обратных дело обстоит не так просто, если искать их не только в $\mathfrak{N}(m_1, m_2, \ldots)$. Например,

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

Правый множитель в этом равенстве можно рассматривать как ступенчатую матрицу структуры (1, 1, 1, ...) с нулевыми и, следовательно, особыми квадратами на диагонали. Тем не менее, она имеет левую обратную матрицу, конечно, вне $\mathfrak{N}(1, 1, 1, \ldots)$.

В заключение отметим, что исходя из рекурентной формулы (7.6) можно дать прямое выражение для элементов матрицы $(\mathfrak{B})$ через элементы матрицы $(\mathfrak{A})$

$$\{(\mathfrak{B})\}_q^p = [\{(\mathfrak{A})\}_p^p]^{-1},$$

$$\{(\mathfrak{B})\}_p^q = \sum_{n=1}^{p-q} (-1)^n \sum_{0=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=p-q} \times$$

$$\times [\{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_0}^{p-\alpha_0}]^{-1} \{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_0}^{p-\alpha_1} [\{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_1}^{p-\alpha_1}]^{-1} \ldots [\{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_{n-1}}^{p-\alpha_{n-1}}]^{-1} \{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_{n-1}}^{p-\alpha_n} [\{(\mathfrak{A})\}_{p-\alpha_n}^{p-\alpha_n}]^{-1}$$

$$q = p+1, \quad p+2, \ldots$$

Эта формула легко доказывается по индукции на основании (7.6).

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (0.1)

§ 8. Матрица диференцирования системы

Придадим системе (0.1) матричный вид. Введем для этой цели следующее обозначение. Пусть функция $P(x_1, \ldots, x_n)$ аналитична около начала, т. е.

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} P_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

в некотором $Z^+(\varrho)$. Будем той же буквой P обозначать одностолбовую матрицу с элементами:

$$\{P\}_k^1 = \{P\}_{(k_1, \ldots, k_n)}^1 = P_{k_1, \ldots, k_n} \quad (k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда, в $Z^+(\varrho)$, справедливо равенство

$$P(x_1, \ldots, x_n) = xP. \tag{8.1}$$

В этих обозначениях каждое из уравнений (0,1) имеет вид

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x \cdot f_\nu.$$

Если составить из n столбцов: $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n-столбцовую матрицу F, то систему (0.1) можно локально записать так:

$$(\tilde{x})'_t = x \cdot F. \tag{0.1'}$$

В этом матричном уравнении имеется два неизвестных объекта x и $\tilde{x}$. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, дополним это уравнение равенствами, которые выражают производные по t от не входящих в $\tilde{x}$ компонент x через само x. Если ряды (0.2) сходятся в $Z^+(R')$, то по известным теоремам о степенных рядах в $Z^+(R')$ будут справедливы и следующие равенства:

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_1^{\tilde{k}} = \frac{d}{dt}[\{x\}_1^{\tilde{k}}] = \frac{d}{dt}(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu x_1^{k_1-\delta_{1,\nu}} \ldots x_n^{k_n-\delta_{n,\nu}} \cdot \frac{dx_\nu}{dt} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu x_1^{k_1-\delta_{1,\nu}} \ldots x_n^{k_n-\delta_{n,\nu}} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{n} k_n x_1^{k_1-\delta_{1,\nu}} \ldots x_n^{k_n-\delta_{n,\nu}} \cdot \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} a^{(\nu)}_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}\right] =$$

$$= \sum_{-\infty < m_1,\ldots,m_n < +\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{k_1+m_1-\delta_{1,\nu}} \ldots x_n^{k_n+m_n-\delta_{n,\nu}}\right].$$

Обозначим

$$k_\sigma + m_\sigma - \delta_{\sigma,\nu} = l_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_1^{\tilde{k}} = \sum_{-\infty \le l_1,\ldots,l_n < +\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{l_1-k_1+\delta_{1,\nu},\ldots,l_n-k_n+\delta_{n,\nu}}\right) x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n} =$$

$$= \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{l_1-k_1+\delta_{1,\nu},\ldots,l_n-k_n+\delta_{n,\nu}}\right) x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}.$$

Пусть $\mathfrak{B}$ есть бесконечная квадратная матрица с элементами

$$\{\mathfrak{B}\}_{\tilde{l}}^{\tilde{k}} = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a^{(\nu)}_{l_1-k_1+\delta_{1,\nu},\ldots,l_n-k_n+\delta_{n,\nu}} \qquad \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ l_1, \ldots, l_n \end{pmatrix} = 0, 1, 2, \ldots \Big); \tag{8.2}$$

тогда

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_1^{\tilde{k}} = \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty} \{\mathfrak{B}\}_{(l_1,\ldots,l_n)}^{(k_1,\ldots,k_n)} x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n} = \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty} \{x\}_1^{\tilde{l}} \{\mathfrak{B}\}_{\tilde{l}}^{\tilde{k}} = \{x\mathfrak{B}\}_1^{\tilde{k}},$$

откуда в $Z^+(R')$ имеет место матричное равенство

$$\frac{dx}{dt} = x\mathfrak{B}. \tag{8.3}$$

Это и есть уравнение для x, соответствующее уравнению (0.1) для $\tilde{x}$.

Выпишем матрицу $\mathfrak{B}$ для случаев $n=1$ и $n=2$.

При $n=1$

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & a_1 & 2a_0 & 0 & 0 & . \\ 0 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & 0 & . \\ 0 & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{Vmatrix}.$$

При $n=2$

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} 0 & a^{(1)}_{00} & a^{(2)}_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & a^{(1)}_{10} & a^{(2)}_{1,0} & 2a^{(1)}_{00} & a^{(2)}_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & a^{(1)}_{01} & a^{(2)}_{01} & 0 & a^{(1)}_{00} & 2a^{(2)}_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & a^{(1)}_{20} & a^{(2)}_{20} & 2a^{(1)}_{10} & a^{(2)}_{10} & 0 & 3a^{(1)}_{00} & a^{(2)}_{10} & 0 & 0 & . & . \\ 0 & a^{(1)}_{11} & a^{(2)}_{11} & 2a^{(1)}_{01} & a^{(1)}_{10}+a^{(2)}_{01} & 2a^{(2)}_{10} & 0 & 2a^{(1)}_{00} & 2a^{(2)}_{00} & 0 & . & . \\ 0 & a^{(1)}_{02} & a^{(2)}_{02} & 0 & a^{(1)}_{01} & 2a^{(2)}_{01} & 0 & 0 & a^{(1)}_{00} & 3a^{(2)}_{00} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{Vmatrix}.$$

Эти матрицы $\mathfrak{B}$ суть функции матрицы F, т. е. $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(F)$ и притом линейные:

$$\mathfrak{B}(C_1F_1+C_2F_2)=C_1\mathfrak{B}(F_1)+C_2\mathfrak{B}(F_2). \tag{8.4}$$

Итак, операция диференцирования x по t локально может быть заменена умножением x справа на матрицу диференцирования. Матрица $\mathfrak{B}$ может быть введена и другим способом. Вектор $\vec{f}(x_1,\ldots,x_n)$ с компонентами $f_1(x_1\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)$ определяет векторнсе поле. Каждое частное решение системы (0.1) есть траектория в этом поле. Если считать, что в функции точки $P(x_1,\ldots,x_n)$ все x_ν суть компоненты решения системы (0.1) (именно того решения, которое проходит через точку $(x_1,\ldots,x_n)$), то $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть сложная функция от времени. Тогда

$$\frac{dP(x_1,\ldots,x_n)}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_\nu} \cdot f_\nu(x_1,\ldots,x_n) = P'(x_1,\ldots,x_n),$$

где в некотором $Z^+(r)$

$$P'_t(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} P'_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n};$$

Тогда в $Z^+(r)$

$$P'_t(x_1, \ldots, x_n) = xP'.$$

Повторяя расчеты, выполненные выше, легко доказать, что

$$P' = \mathfrak{B}P\,[1]. \tag{8.5}$$

§ 9. Оценка одной суммы

Пусть $P_k(m)$ обозначает факториальную функцию от целого аргумента m, т. е.:

$$P_k(m) = \frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{k!} = \frac{(m+k-1)!}{k!\,(m-1)!} \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

при $m \geqslant 1$, $P_k(m)$ есть значение следующей суммы:

$$\sum_{1 \leqslant x_k \leqslant m} \; \sum_{1 \leqslant x_{k-1} \leqslant x_k} \ldots \sum_{1 \leqslant x_1 \leqslant x_2} 1 = P_k(m) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{9.1}$$

Это равенство остается справедливым и при $m=0$, если сумме пустого множества слагаемых приписать значение нуль.

Известно, что

$$\sum_{0 \leqslant m \leqslant \mu} P_k(m) = P_{k+1}(\mu) \qquad (k=1, 2, \ldots;\ \mu=0, 1, 2, \ldots). \tag{9.2}$$

Нам нужна будет сумма $P'_k(m)$, отличающаяся от суммы (9.1) тем, что суммирование по всем x_i будет начинаться с нуля, а не с единицы:

$$P'_k(m) = \sum_{0 \leqslant x_k \leqslant m} \; \sum_{0 \leqslant x_{k-1} \leqslant x_k} \ldots \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant x_2} 1.$$

Выполним в этой сумме замену индексов суммирования по формулам:

$$x_1 = \xi_1 - 1; \quad x_2 = \xi_2 - 1; \ldots; x_k = \xi_k - 1.$$

Тогда

$$P'_k(m) = \sum_{1 \leqslant \xi_k \leqslant m+1} \; \sum_{1 \leqslant \xi_{k-1} \leqslant \xi_k} \ldots \sum_{1 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2} 1 = P_k(m+1).$$

Лемма 1. *Пусть τ натуральных чисел $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ ($\tau \geqslant 0$) образуют возрастающую последовательность и, при этом, не превосходят числа k, т. е.*

$$1 \leqslant \alpha < \beta < \ldots < \lambda < \mu \leqslant k. \tag{9.3}$$

---

[1] Чисто алгебраическое происхождение равенства (8.5) таково:

$$P'_t(x_1, \ldots, x_n) = xP' = \frac{d}{dt}[P(x_1, \ldots, x_n)] = \frac{d}{dt}(xP) = \frac{dx}{dt} \cdot P = (x \cdot \mathfrak{B}) \cdot P = x(\mathfrak{B}P);$$

откуда: $x(P' - \mathfrak{B}P) = 0$ и, следовательно, $P' = \mathfrak{B}P$.

Локальная законность всех выполненных выше операций легко доказуема.

тогда для суммы

$$U = \sum_{\substack{0 \leqslant p_1 \leqslant p_2+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1}+1}} p_\alpha p_\beta \ldots p_\mu$$

справедливы следующие две оценки:

$$U \leqslant \alpha(\beta+1)\ldots(\mu+\tau-1) P_{k+\tau}(p_{k+1}+k+1-\tau), \tag{9.4}$$

$$U \leqslant 2^{p_{k+1}+2k+\tau} \alpha, \beta \ldots \mu. \tag{9.5}$$

(Мы считаем здесь произведение пустого множества сомножителей равным единице).

Доказательство. Сперва докажем методом индукции по числу k формулу (9.4). При $k=1$ и $\tau=0$, $p_\alpha p_\beta \ldots p_\mu$ по условию как произведение пустого множества сомножителей равно 1. Поэтому левая часть (9.4) равна

$$\sum_{0 \leqslant p_1 \leqslant p_2+1} 1 = P_1'(p_2+1) = P_1(p_2+2),$$

что совпадает с правой частью (9.4), ибо стоящее там произведение $\alpha(\beta+1)\ldots(\mu+\tau-1)$, в рассматриваемом случае равно 1.

При $k=1$ и $\tau=1$ ряд (9.3) состоит из одного числа α, равного 1. Левая часть (9.4) равна

$$\sum_{0 \leqslant p_1 \leqslant p_2+1} p_1 = \frac{(p_2+1)(p_2+2)}{1 \cdot 2} = P_2(p_2+1),$$

а правая часть (9.4) равна 1. $P_{1+1}(p_{1+1}+1+1-1) = P_2(p_2+1)$.

Пусть теперь $k \geqslant 2$ и пусть неравенство (9.4) справедливо для всех сумм U, кратность которых меньше, чем k.

Будем различать два случая: 1°. $\mu \neq k$ и 2°. $\mu = k$.

1°. $\mu \neq k$. Тогда $\tau \leqslant k-1$. По индуктивной гипотезе и по (9.2) имеем:

$$U = \sum_{0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1}+1} \Bigg[\sum_{\substack{0 \leqslant p_1 \leqslant p_2+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \leqslant p_{k-1} \leqslant p_k+1}} p_\alpha p_\beta \ldots p_\lambda p_\mu \Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1}+1} \alpha(\beta+1)\ldots(\mu+\tau-1) P_{k-1+\tau}(p_k+k-\tau) =$$

$$= \alpha(\beta+1)\ldots(\mu+\tau-1) \sum_{k-\tau \leqslant z \leqslant p_{k+1}+k+1-\tau} P_{k-1+\tau}(z) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(\beta+1)\ldots(\mu+\tau-1) P_{k+\tau}(p_{k+1}+k+1-\tau).$$

2°. $\mu=k$. В этом случае $\tau\geqslant 1$, и: $p_\alpha p_\beta \dots p_\lambda p_\mu = p_\alpha p_\beta \dots p_\lambda p_k$.

$$U = \sum_{0\le p_k\le p_{k+1}+1} p_k \Big[\sum_{\substack{0\le p_1\le p_2+1\\ \dots\dots\\ 0\le p_{k-1}\le p_k+1}} p_\alpha \dots p_\lambda \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0\le p_k\le p_{k+1}+1} p_k\cdot \alpha(\beta+1)\dots(\lambda+\tau-2)\,P_{k-1+\tau-1}(p_k+k-(\tau-1)) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(\beta+1)\dots(\lambda+\tau-2)\times$$

$$\times \sum_{0\le p_k\le p_{k+1}+1} \frac{[p_k+(k-1)-(\tau-1)]\,[p_k+k-(\tau-1)]\dots[p_k+k-(\tau-1)+(k-1+\tau-1)-1]\,(\mu+\tau-1)}{(k+\tau-2)!\,(k+\tau-1)} =$$

$$= \alpha(\beta+1)\dots(\lambda+\tau-2)(\mu+\tau-1)\cdot \sum_{0\le p_k\le p_{k+1}+1} P_{k+\tau-1}(p_k+k-\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(\beta+1)\dots(\mu+\tau-1)\,P_{k+\tau}(p_{k+1}+k+1-\tau),$$

что и доказывает оценку (9.4).

Оценка (9.5) получается непосредственно из более сильной оценки (9.4) следующим образом. По (9.3)

$$\alpha\geqslant 1;\quad \beta\geqslant\alpha+1\geqslant 2;\quad \gamma\geqslant\beta+1\geqslant 3;\dots\quad \mu\geqslant\tau.$$

Поэтому

$$\alpha\leqslant 2\alpha;\quad \beta+1\leqslant 2\beta;\dots\mu+(\tau-1)\leqslant\mu+\tau\leqslant 2\mu.$$

Откуда

$$\alpha(\beta+1)\dots(\mu+\tau-1)\leqslant 2\alpha\cdot 2\beta\dots 2\mu = 2^\tau\cdot\alpha\beta\dots\mu$$

и потому, так как $P_k(m)=\dfrac{(m+k-1)!}{k!\;m-1)!}\leqslant 2^{m+k-1}$, то по (9.4)

$$U\leqslant \alpha(\beta+1)\dots(\mu+\tau-1)\,P_{k+\tau}(p_{k+1}+k+1-\tau)\leqslant$$

$$\leqslant 2^\tau\alpha\beta\dots\mu\cdot 2^{k+\tau+p_{k+1}+k+1-\tau-1} = \alpha\beta\dots\mu\cdot 2^{p_{k+1}+2k+\tau}.$$

§ 10. Оценка элементов матрицы $|\mathfrak{B}(F)|^\nu$

Пусть все ряды (0.2) сходятся в $Z^+(R')$. Пусть далее R — положительная константа меньшая, чем R' (но могущая быть сколь угодно близкой к R'). Тогда все ряды (0.2) в $\bar{Z}(R)$ сходятся абсолютно, почленно диференцируемы, а функции $f_\nu(x_1,\dots,x_n)$ $(\nu=1,2,\dots,n)$ аналитичны в $\bar{Z}(R)$. Пусть M есть наибольший из максимумов модулей всех $f_\nu(\nu=1,2,\dots,n)$ в $\bar{Z}(R)$.

Введем еще одну константу

$$N=2^{2n+1}\cdot n\cdot\frac{M}{R}. \tag{10.1}$$

Имеет место

Лемма 2. *Для элементов степеней матрицы $\mathfrak{B}(F)$ (см. § 8) имеет место оценка:*

$$|\{\mathfrak{B}^\nu\}_{\bar{p}}^{\bar{q}}| \leqslant \{|\mathfrak{B}|^\nu\}_{\bar{p}}^{\bar{q}} \leqslant \bar{q}R^{\bar{q}} \cdot \left(\frac{2}{R}\right)^{\bar{p}} \cdot N^\nu \cdot (\nu-1)!; \begin{pmatrix} \nu=1, 2,\ldots \\ p_1,\ldots, p_n=0, 1, 2,\ldots \\ q_1,\ldots, q_n=0, 1, 2,\ldots \end{pmatrix}. \quad (10.2)^{1)}$$

Доказательство. Как известно,

$$|a^{(i)}_{k_1,\ldots,k_n}| \leqslant \frac{M}{R^{k_1+\ldots+k_n}} = \frac{M}{R^{\bar{k}}}$$

и потому

$$|\{\mathfrak{B}\}_{\bar{p}}^{\bar{q}}| = \{|\mathfrak{B}|\}_{\bar{p}}^{\bar{q}} \leqslant \sum_{i=1}^n q_i |a'^{(i)}_{p_1-q_1+\delta_{1,i},\ldots, p_n-q_n+\delta_{n,i}}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n q_i \frac{M}{R^{p_1-q_1+\delta_{1,i}+\ldots+p_n-q_n+\delta_{n,i}}} = M \cdot \frac{\bar{q}}{R^{\bar{p}-\bar{q}+1}}. \quad (10.3)$$

Отсюда видно, что при $\nu=1$ оценка (10.2) справедлива.

Переходим к доказательству оценки (10.2) для любого $\nu \geqslant 2$.

$$\{|\mathfrak{B}|^\nu\}_{\bar{p}}^{\bar{q}} = \sum_{\left.\begin{matrix} \varrho_1^{(1)}, \varrho_2^{(1)},\ldots, \varrho_n^{(1)} \\ \varrho_1^{(2)}, \varrho_2^{(2)},\ldots, \varrho_n^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varrho_1^{(\nu-1)}, \varrho_2^{(\nu-1)},\ldots, \varrho_n^{(\nu-1)} \end{matrix}\right\}=0}^{\infty} \{|\mathfrak{B}|\}_{\bar{p}}^{\bar{\varrho}^{(1)}} \{|\mathfrak{B}|\}_{\bar{\varrho}^{(1)}}^{\bar{\varrho}^{(2)}} \cdots \{|\mathfrak{B}|\}_{\bar{\varrho}^{(\nu-2)}}^{\bar{\varrho}^{(\nu-1)}} \{|\mathfrak{B}|\}_{\bar{\varrho}^{(\nu-1)}}^{\bar{q}}. \quad (10.4)$$

Для того чтобы элемент

$$\{\mathfrak{B}\}_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}} = \sum_{i=1}^n \mu_i a^{(i)}_{\lambda_1-\mu_1+\delta_{1,i},\ldots,\lambda_n-\mu_n+\delta_{n,i}}$$

был равен нулю, достаточно, чтобы у каждого $a^{(i)}$ под знаком суммы хоть один из индексов был отрицателен, а для этого достаточно, чтобы или $\mu_1 \geqslant \lambda_1+2$, или $\mu_2 \geqslant \lambda_2+2\ldots$, или $\mu_n \geqslant \lambda_n+2$. Поэтому область суммирования в (10.4) можно заменить ее частью, определяемой неравенствами:

$$0 \leqslant \varrho_\varkappa^{(1)} \leqslant p_\varkappa+1; \quad 0 \leqslant \varrho_\varkappa^{(2)} \leqslant \varrho_\varkappa^{(1)}+1;\ldots; 0 \leqslant \varrho_\varkappa^{(\nu-2)} \leqslant \varrho_\varkappa^{(\nu-3)}+1; \quad (10.5)$$

$$0 \leqslant \varrho_\varkappa^{(\nu-1)} \leqslant \varrho_\varkappa^{(\nu-2)}+1 \qquad (\varkappa=1, 2,\ldots, n).$$

Переобозначим в (10.4) индексы суммирования:

$$\bar{p}=\bar{p}^{(\nu)}; \quad \bar{\varrho}^{(1)}=\bar{p}^{(\nu-1)}; \quad \bar{\varrho}^{(2)}=\bar{p}^{(\nu-2)};\ldots; \bar{\varrho}^{(\nu-2)}=\bar{p}^{(2)}; \quad \bar{\varrho}^{(\nu-1)}=\bar{p}^{(1)}; \quad \bar{q}=\bar{p}^{(0)}.$$

---

[1]) Обозначения $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(F)$, R, N леммы 2 будут использованы с тем же их значением до конца статьи.

Тогда область суммирования (10.5) обратится в область

$$0 \leqslant p_{\varkappa}^{(1)} \leqslant p_{\varkappa}^{(2)}+1; \quad 0 \leqslant p_{\varkappa}^{(2)} \leqslant p_{\varkappa}^{(3)}+1; \ldots; 0 \leqslant p_{\varkappa}^{(\nu-2)} \leqslant p_{\varkappa}^{(\nu-1)}+1;$$

$$0 \leqslant p_{\varkappa}^{(\nu-1)} \leqslant p_{\varkappa}^{(\nu)}+1=p_{\varkappa}+1 \qquad (\varkappa=1, 2, \ldots, n), \tag{10.6}$$

которую мы обозначим $\Omega_{\nu}(\tilde{p})$.

Переставив множители в членах суммы (10.4), получим:

$$\{|\mathfrak{B}|^{\nu}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \sum_{(\tilde{p}^{(1)}, \tilde{p}^{(2)}, \ldots, \tilde{p}^{(\nu-1)}) \in \Omega_{\nu}(\tilde{p})} \{|\mathfrak{B}|\}_{\tilde{p}^{(1)}}^{\tilde{p}^{(0)}} \{|\mathfrak{B}|\}_{\tilde{p}^{(2)}}^{\tilde{p}^{(1)}} \cdots \{|\mathfrak{B}|\}_{\tilde{p}^{(\nu-1)}}^{\tilde{p}^{(\nu-2)}} \{|\mathfrak{B}|\}_{\tilde{p}^{(\nu)}}^{\tilde{p}^{(\nu-1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\tilde{p}^{(1)}, \ldots, \tilde{p}^{(\nu-1)}) \in \Omega_{\nu}(\tilde{p})} \frac{M\overline{q}}{R^{\overline{p^{(1)}}-\overline{q}+1}} \cdot \frac{M\overline{p^{(1)}}}{R^{\overline{p^{(2)}}-\overline{p^{(1)}}+1}} \cdots \frac{M\overline{p^{(\nu-2)}}}{R^{\overline{p^{(\nu-1)}}-\overline{p^{(\nu-2)}}+1}} \cdot \frac{M\overline{p^{(\nu-1)}}}{R^{\overline{p}-\overline{p^{(\nu-1)}}+1}} =$$

$$= \frac{M\overline{q}^{\nu}}{R^{\overline{p}-\overline{q}+\nu}} \cdot S_{\nu}(\tilde{p}) = \overline{q} R^{\overline{q}} \cdot \frac{1}{R^{\overline{p}}} \cdot \left(\frac{M}{R}\right)^{\nu} \cdot S_{\nu}(\tilde{p}), \tag{10.7}$$

где

$$S_{\nu}(\tilde{p}) = \sum_{(\tilde{p}^{(1)}, \ldots, \tilde{p}^{(\nu-1)}) \in \Omega_{\nu}(\tilde{p})} \overline{p^{(1)}}\,\overline{p^{(2)}} \ldots \overline{p^{(\nu-1)}} =$$

$$= \sum_{(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(\nu-1)}) \in \Omega_{\nu}(\tilde{p})} [p_1^{(1)}+\ldots+p_n^{(1)}]\,[p_1^{(2)}+\ldots+p_n^{(2)}] \ldots [p_1^{(\nu-1)}+\ldots+p_n^{(\nu-1)}],$$

перемножим прямые скобки в каждом члене. Тогда под знаком суммы окажется многочлен, составленный из $n^{\nu-1}$ слагаемых следующего вида:

$$p_1^{(\alpha_1)} p_1^{(\alpha_2)} \ldots p_1^{(\alpha_a)} p_2^{(\beta_1)} p_2^{(\beta_2)} \ldots p_2^{(\beta_b)} \ldots p_n^{(\sigma_1)} p_n^{(\sigma_2)} \ldots p_n^{(\sigma_s)}, \tag{10.8}$$

где

$$a+b+\ldots+s=\nu-1,$$

а номера $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ образуют некоторую перестановку номеров $1, 2, \ldots, \nu-1$, выбранную произвольно, с тем единственным ограничением, что:

$$1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_a \leqslant \nu-1$$
$$1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_b \leqslant \nu-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_s \leqslant \nu-1.$$

Каждый из полученных таким образом членов вида (10.8) просуммируем по всей области $\Omega_{\nu}(\tilde{p})$. Таким образом, $S_{\nu}(\tilde{p})$ разобьется на $n^{\nu-1}$ подсумм, каждую из которых мы обозначим $S_{\nu, j}(\tilde{p})$ $(j=1,2,\ldots, n^{(\nu-1)})$, так что

$$S_{\nu}(\tilde{p}) = \sum_{j=1}^{n^{(\nu-1)}} S_{\nu, j}(\tilde{p}). \tag{10.9}$$

Каждое $S_{\nu,j}(\tilde{p})$ можно оценить по лемме § 9:

$$0 \leqslant S_{\nu,j}(\tilde{p}) = \sum_{(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(\nu-1)}) \in \Omega_\nu(\tilde{p})} p_1^{(\alpha_1)} \ldots p_1^{(\alpha_a)} p_2^{(\beta_1)} \ldots p_2^{(\beta_b)} \ldots p^{(\sigma_1)} \ldots p_n^{(\sigma_s)} =$$

$$= \prod_{\varkappa=1}^{n} \Bigg(\sum_{\substack{0 \leqslant p_\varkappa^{(1)} \leqslant p_\varkappa^{(2)}+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \leqslant p_\varkappa^{(\nu-1)} \leqslant p_\varkappa^{(\nu)}+1 = p_\varkappa+1}} p_\varkappa^{(\mu_1)} \ldots p_\varkappa^{(\mu_m)} \Bigg) \leqslant \prod_{\varkappa=1}^{n} (2^{p_\varkappa+2(\nu-1)+m} \mu_1, \ldots, \mu_m) =$$

$$= 2^{p_1+p_2+\ldots+p_n+2n(\nu-1)+a+b+\ldots+s} \alpha_1 \ldots \alpha_a \beta_1 \ldots \beta_b \ldots \sigma_1 \ldots \sigma_s = 2^{\overline{p}} \cdot (2^{2n+1})^{\nu-1} \cdot (\nu-1)!$$

Тогда по (10.9)

$$0 \leqslant S_\nu(\tilde{p}) \leqslant 2^{\overline{p}} \cdot (2^{2n+1} \cdot n)^{\nu-1} \quad (\nu-1)!$$

и по (10.7)

$$\{|\mathfrak{B}|^\nu\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} \leqslant \overline{q} R^{\overline{q}} \frac{1}{R^{\overline{p}}} \left(\frac{M}{R}\right)^\nu \cdot 2^{\overline{p}} \, (2^{2n+1}_{n})^{\nu-1} \quad (\nu-1)! \leqslant \overline{q} R^{\overline{q}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\overline{p}} N^\nu \cdot (\nu-1)!$$

§ 11. Леммы к основной теореме

Лемма 3. *Элементы матричного ряда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|t|^\nu}{\nu!} |\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}; \qquad (\sigma=0, 1, 2, \ldots), \tag{11.1}$$

т. е. ряды

$$\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|t|^\nu}{\nu!} |\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma} \right\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \{|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} |t|^\nu, \tag{11.2}$$

расположенные по степеням $|t|$, *сходятся, при*

$$|t| < \frac{1}{N}. \tag{11.3}$$

Доказательство. По лемме 2 член ряда (11.2)

$$\frac{1}{\nu!} \{|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} |t|^\nu \leqslant \overline{q} R^{\overline{q}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\overline{p}} N^\nu (\nu-1)! \frac{1}{\nu!} |t|^\nu = \overline{q} R^{\overline{q}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\overline{p}} \frac{|Nt|^\nu}{\nu}.$$

Поэтому при условии (11 3) ряд (11.2) сходится.

Следствие 1. *Элементы матричного ряда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \mathfrak{B}^{\nu+\sigma} \qquad (\sigma=0, 1, 2, \ldots), \tag{11.1'}$$

т. е. ряды

$$\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \mathfrak{B}^{\nu+\sigma} \right\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \{\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} t^\nu, \tag{11,2'}$$

расположенные по степеням t, *при условии (11.3) сходятся абсолютно.*

Это следует по VII и XI на основании того, что по XIII

$$|\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}| \leqslant |\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}. \tag{11.4}$$

Тем самым сходится абсолютно в (11.3) и сам матричный ряд (11.1').

С л е д с т в и е 2. *Элементы (11.2') матричного ряда (11.1') в области (11.3) суть аналитические функции аргумента* t.

С л е д с т в и е 3. *Производные от элементов (11.2') матрицы (11.1') по аргументу* t *в области (11.3) можно вычислять путем почленного диференцирования степенных рядов (11.2').*

Отсюда следует, что в (11.3)

$$\left\{\frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\right)\right\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \frac{d^k}{dt^k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\{\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{\nu!}t^{\nu-k}\{\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{t^\mu}{\mu!}\{\mathfrak{B}^{\mu+k+\sigma}\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\cdot\mathfrak{B}^{\nu+\sigma+k}\right\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}.$$

Переходя от элементов матриц к самым матрицам, получим

$$\frac{d^k}{dt^k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\mathfrak{B}^{\nu+\sigma} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\mathfrak{B}^{\nu+\sigma+k}. \tag{11.5}$$

С л е д с т в и е 4. *Если обозначить*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\mathfrak{B}^\nu = e^{\mathfrak{B}t}, \tag{11.6}$$

то это равенство определяет показательную функцию $e^{\mathfrak{B}t}$ *во всей области (11.3).*

Л е м м а 4. *Произведение двух матриц* $|x_0|$ *и* $|\mathfrak{B}|^\sigma$ *сходится при:*

$$\tilde{x}_0 \in Z\left(\frac{R}{2}\right). \tag{11.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\{|x_0|\cdot(|\mathfrak{B}|^\sigma)\}_{1}^{\tilde{q}} = \sum_{p_1,\ldots,p_n=0}\{|x_0|\}_{1}^{\tilde{p}}\{|\mathfrak{B}|^\sigma\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} =$$

$$= \sum_{p_1,\ldots,p_n=0}|x_{1,0}|^{p_1}\ldots|x_{n,0}|^{p_n}\{|\mathfrak{B}|^\sigma\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}. \tag{11.8}$$

А по лемме 2 члены этого ряда не больше чем:

$$|x_{1,0}|^{p_1}\ldots|x_{n,0}|^{p_n}\{|\mathfrak{B}|^\sigma\}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} \leqslant \bar{q}R^{\bar{q}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\bar{p}}N^\sigma_{(\sigma-1)!}|x_{1,0}|^{p_1}\ldots|x_{n,0}|^{p_n} =$$

$$= \bar{q}\cdot R^{\bar{q}}\cdot N^\sigma\cdot(\sigma-1)!\left(\frac{2|x_{1,0}|}{R}\right)^{p_1}\ldots\left(\frac{2|x_{n,0}|}{R}\right)^{p_n},$$

вследствие чего ряды (11.8), в области (11.7), сходятся.

С л е д с т в и е 1. *Произведение двух матриц* x_0 *и* $\mathfrak{B}^\sigma$ *при условии (11.7) сходится абсолютно.*

Это следует из (11.4) по VII и XI.

Следствие 2. *Умножение матрицы* $|x_0|$ *на* $|\mathfrak{B}|^\sigma$ *на* $|\mathfrak{B}|^\tau$ — *сочетательно.*

Доказательство. Произведение $|\mathfrak{B}|^\sigma$ на $|\mathfrak{B}|^\tau$ сходится из-за полуконечности этих матриц. Произведения же $|x_0|\cdot(|\mathfrak{B}|^\sigma)$ и $|x_0|\cdot(|\mathfrak{B}|^\sigma\cdot|\mathfrak{B}|^\tau) = |x_0|\cdot(|\mathfrak{B}|^{\sigma+\tau})$ сходятся по лемме 4. Отсюда по VIII получается следствие 2.

Следствие 3. *Умножение матриц* x_0 *на* $\mathfrak{B}^\sigma$ *на* $\mathfrak{B}^\tau$ — *сочетательно* (по XV).

Лемма 5. *Элементы матричного ряда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|x_0||\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}|t|^\nu; \qquad (\sigma=0,1,2,\ldots) \tag{11.9}$$

т. е. ряды

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|x_0||\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}|t|^\nu\right\}_1^{\bar{q}} = \sum_{\nu,p_1,\ldots,p_n=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\{|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}\}_{\bar{p}}^{\bar{q}}|x_{1,0}|^{p_1}\ldots|x_{n,0}|^{p_n}\cdot|t|^\nu, \tag{11.10}$$

расположенные по степеням переменных $|x_{1,0}|,\ldots,|x_{n,0}|,|t|$, при:

$$(\bar{x}_0, t)\in U\left(\frac{R}{2},\ \frac{1}{N}\right) \tag{11.11}$$

сходятся.

Доказательство. Члены степенного ряда (11.10) не больше, чем

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\bar{q}R^{\bar{q}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\bar{p}}N^{\nu+\sigma}(\nu+\sigma-1)!\,|x_{1,0}|^{p_1}\ldots|x_{n,0}|^{p_n}|t|^\nu =$$

$$= \bar{q}R^{\bar{q}}N^\sigma(\nu+\sigma-1)(\nu+\sigma-2)\ldots(\nu+1)\left(\frac{2|x_{1,0}|}{R}\right)^{p_1}\ldots\left(\frac{2|x_{n,0}|}{R}\right)^{p_n}(N|t|)^\nu,$$

что, при (11.11), обеспечивает сходимость ряда (11.10).

Следствие 1. *Элементы матричного ряда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^\nu; \qquad (\sigma=0,1,2,\ldots) \tag{11.9'}$$

т. е. $(n+1)$*-кратные ряды:*

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^\nu\right\}_1^{\bar{q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{p_1,\ldots,p_n=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\{\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_{\bar{p}}^{\bar{q}}x_{1,0}^{p_1}\ldots x_{n,0}^{p_n}t^\nu\right],$$

расположенные по степеням переменных $x_{1,0},\ldots,x_{n,0},t$, *при условии* (11.11) *сходятся абсолютно, а, значит, и безусловно и поэтому могут быть представлены в виде*

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^\nu\right\}_1^{\bar{q}} = \sum_{\nu,p_1,\ldots,p_n=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\{\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_{\bar{p}}^{\bar{q}}x_{1,0}^{p_1}\ldots x_{n,0}^{p_n}t^\nu. \tag{11.10'}$$

(По VII, XI и (11.4)).

С л е д с т в и е 2. *Элементы* (11.10′) *матрицы* (11.9′) *суть аналитические функции переменных* $x_{1,0} \dots x_{n,0}$, t *в области* (11.11).

С л е д с т в и е 3. *Элементы (11.10′) матричного ряда (11.9′), представленные в виде рядов*

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^{\nu}\right\}_1^{\bar q}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\{x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_1^{\bar q}\,t^{\nu}, \tag{11.12}$$

расположенных по степеням t, *в области (11.3), сходятся абсолютно.*

Это следует из того, что при любой группировке членов ряда, абсолютно сходящегося (здесь это ряд (11.10′)), получается ряд (здесь это (11.12)), также абсолютно сходящийся.

С л е д с т в и е 4. *Производные по* t *от элементов (11.10′) матричного ряда (11.9′) можно вычислять путем почленного диференцирования ряда (11.12).*

Отсюда следует, что

$$\left\{\frac{d^k}{dt^k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^{\nu}\right\}_1^{\bar q}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{\nu!}t^{\nu-k}\{x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}\}_1^{\bar q}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{t^{\mu}}{\mu!}\{x_0\mathfrak{B}^{\mu+k+\sigma}\}_1^{\bar q}=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma+k}t^{\nu}\right\}_1^{\bar q},$$

а переходя от элементов матриц к самим матрицам, получим

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}t^{\nu}\right]=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+\sigma+k}t^{\nu}. \tag{11.13}$$

Л е м м а 6. *Умножение суммы:* $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|t|^{\nu}}{\nu!}|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}$ *на матрицу* x_0 *слева и на* $|\mathfrak{B}|^{\tau}$ *справа, в области* (11.11), *регулярно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сочетательность умножения $|x_0|$ на $|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}$ на $|\mathfrak{B}|^{\tau}$ имеет место по следствию 2 из леммы 4. Сходимость рядов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}|t|^{\nu} \text{ и } \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}|\mathfrak{B}|^{\tau}\cdot|t|^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma+\tau}|t|^{\nu}$$

следует из леммы 3, а сходимость ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|x_0||\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma}|t|^{\nu}$ и ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(|x_0||\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma})|\mathfrak{B}|^{\tau}|t|^{\nu}$, равного по только что отмеченной сочетательности ряду $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|x_0||\mathfrak{B}|^{\nu+\sigma+\tau}|t|^{\nu}$, следует из леммы 5. А отсюда, по X, вытекает утверждаемая в нашей лемме регулярность.

С л е д с т в и е 1. *Умножение суммы* $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}\mathfrak{B}^{\nu+\sigma}$ *на матрицу* x_0 *слева и на* $\mathfrak{B}^{\tau}$ *справа, в области (11.11), регулярно.*

Это следует снова из (11.4) по XVII и заключительному замечанию § 3.

Следствие 2. *При условии (11.11)*

$$\frac{d^k}{dt^k}(x_0 e^{\mathfrak{B}t}) = x_0 \cdot e^{\mathfrak{B}t} \cdot \mathfrak{B}^k; \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{11.14}$$

причем отсутствие скобок в произведении трех множителей в правой части этого равенства означает, что умножение это сочетательно.

По (11.6) и по лемме 6 и по (11.13)

$$\frac{d^k}{dt^k}(x_0 e^{\mathfrak{B}t}) = \frac{d^k}{dt^k}\left[x_0 \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\mathfrak{B}^\nu t^\nu\right) \cdot \mathfrak{B}^0\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^\nu t^\nu\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^{\nu+k}t^\nu = x_0 \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\mathfrak{B}^\nu t^\nu\right) \cdot \mathfrak{B}^k = x_0 \cdot e^{\mathfrak{B}t} \cdot \mathfrak{B}^k.$$

В частности, при $k=1$, формула (11.14) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(x_0 e^{\mathfrak{B}t}) = x_0 \cdot e^{\mathfrak{B}t} \cdot \quad . \tag{11.15}$$

§ 12. Основная теорема

Основная теорема: *При условии (11.11) функция*

$$x = x_0 e^{\mathfrak{B}t}; \quad (\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(F)) \tag{12.1}$$

есть решение уравнения (8.3), а все элементы матрицы (12.1) суть в области (11.11) аналитические функции переменных: $(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}, t)$.

Доказательство. По следствию 1 из леммы 5 ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}x_0\mathfrak{B}^\nu t^\nu$$

в (11.11) сходится абсолютно, а по следствию 1 из леммы 6 и следствию 4 из леммы 3 эта сумма в (11.11) равна произведению

$$x_0\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\mathfrak{B}^\nu t^\nu\right) = x_0 e^{\mathfrak{B}t}.$$

Таким образом, функция (12.1) в области (11.11) существует. По (11.15)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 e^{\mathfrak{B}t}) = x_0 e^{\mathfrak{B}t} \cdot \mathfrak{B} = (x_0 e^{\mathfrak{B}t})\mathfrak{B} = x\mathfrak{B},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(x_0 e^{\mathfrak{B}t}) = (x_0 e^{\mathfrak{B}t})\mathfrak{B} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = x\mathfrak{B},$$

т. е. x есть решение уравнения (8.3). Аналитичность же элементов матричного ряда (12.1), как функция от $(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}, t)$, в (11.11), получается из следствия 2 леммы 5, при $\sigma=0$. Обозначим, далее, через $\mathcal{E}_n$ бесконечную вниз n-столбцовую матрицу:

$$\left\| \begin{matrix} 0, 0, \ldots, 0, 0 \\ 1, 0, \ldots, 0, 0 \\ 0, 1, \ldots, 0, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, 1, 0 \\ 0, 0, \ldots, 0, 1 \\ 0, 0, \ldots, 0, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, 0, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\| = \mathcal{E}_n. \tag{12.2}$$

Умножение какой-либо матрицы на $\mathcal{E}_n$ справа означает просто вычеркивание из этой матрицы первого столбца и всех столбцов, начиная с $n+2$-го и далее. Поэтому $x\mathcal{E}_n=\tilde{x}$ и $\mathfrak{B}(F)\cdot\mathcal{E}_n=F$. Умножим равенство (11.15), справедливое в (11.11) на $\mathcal{E}_n$ справа.

$$\left(\frac{d}{dt}x\right)\mathcal{E}_n=\frac{d}{dt}(x\mathcal{E}_n)=\frac{d\tilde{x}}{dt}$$

$$[x\cdot\mathfrak{B}(F)]\,\mathcal{E}_n=x[\mathfrak{B}\ F)\,\mathcal{E}_n]=xF.$$

Поэтому в (11.11) справедливо равенство

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=xF,$$

т. е. равенство (0.1′), выражающее в матричной форме тот факт, что $\tilde{x}$ удовлетворяет системе уравнений (0.1). Отсюда следует, что

$$\tilde{x}=x\mathcal{E}_n=x_0\,e^{\mathfrak{B}t}\cdot\mathcal{E}_n \tag{12.3}$$

есть решение системы (0.1).

Аналитический характер зависимости этого решения от $(x_{1,0},\ldots,x_{n,0},t)$ в (11.11) следует из того, что элементами матрицы (12.3) являются некоторые из элементов матрицы (12.1), а для этой последней аналитичность ее элементов доказана выше.

Заметим в заключение, что действие самого мажорантного метода Коши оказывается особенно прозрачным при матричном построении решения в виде (12.1) или (12.3). В одной из последующих работ, я предполагаю показать, что матрица, мажорирующая (по Коши) матрицу решения, играет существенную роль в самой матричной теории систем диференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Лаппо-Данилевский, Теория функций от матриц, Л.—М., 1934.

2. В. А. Тартаковский, Явные формулы для локальных разложений решений системы обыкновенных диференциальных уравнений, ДАН СССР, 1950, том LXXII, № 4.

3. В. А. Тартаковский, Явные формулы для локальных разложений около точек покоя, ДАН СССР, 1950, т. LXXII, № 5.

Поступила 7.XII 1950. Ленинград