1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об одной задаче, связанной с метризуемостью топологических пространств

Ю. М. Смирнов

Во всем последующем под топологическим пространством понимается T_2-пространство (Хаусдорфово пространство).

Как известно ([1], стр. 24), всякий неметризуемый бикомпакт R содержит замкнутое, а если выполнена первая аксиома счетности, то и совершенное множество Φ точек неметризуемости (т. е. точек, которые не имеют никакой окрестности, гомеоморфной метрическому пространству). Само множество Φ точек неметризуемости данного бикомпакта R может быть весьма различной природы: оно может совпадать со всем R, может быть нигде не плотным в R, может само быть метризуемым и т. д. П. С. Александров и П. С. Урысон поставили следующую задачу: доказать, что если R — неметризуемый бикомпакт, а множество Φ его точек неметризуемости само метризуемо, то открытое множество $\Gamma = R \setminus \Phi$ не может иметь счетной базы; другими словами, что *неметризуемый бикомпакт R не может быть разбит на два удовлетворяющие второй аксиоме счетности множества, из которых одно замкнуто, а другое открыто в R.* В настоящей работе доказывается эта гипотеза П. С. Александрова и П. С. Урысона не только для бикомпактных, но и для любых локально компактных неметризуемых пространств (следствие теоремы 1). Этот результат выводится из невозможности представить неметризуемое локально компактное пространство в виде суммы счетного числа множеств типа G_δ, удовлетворяющих второй аксиоме счетности; устанавливается также невозможность представить регулярное неметризуемое пространство в виде суммы счетного числа удовлетворяющих второй аксиоме счетности абсолютных [1]) G_δ-множеств.

*

Определение. *Пусть дано произвольное множество M пространства R; систему $\{U_\alpha\}$ открытых множеств U_α пространства R назовем внешней счетной базой множества M, если для любой точки*

[1] Топологическое пространство H называется абсолютным G_δ, если оно есть G_δ в любом объемлющем бикомпакте. Для того чтобы H было абсолютным G_δ, необходимо (и достаточно), чтобы оно было G_δ в своем максимальном бикомпактном расширении βH (теорема Э. Чеха, [3], стр. 837).

$x \in M$ и любой окрестности Ox точки x в R существует U_α такое, что $x \in U_\alpha \subseteq Ox$.

Очевидно, если пространство R может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств M_n, имеющих счетную внешнюю базу, то и все пространство R имеет счетную базу.

Лемма. *Пусть в бикомпакте R дано множество H типа G_δ. Для того чтобы H имело счетную базу, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы оно имело счетную внешнюю базу.*

Доказательство необходимости. Пусть $H = \bigcap\limits_j G_j$ и $\{o_i\}$ — счетная база в H. Пусть O_i — произвольные открытые в R множества, такие, что $H \cap O_i = o_i$. Докажем, что система множеств $O_i \cap G_j$ образует внешнюю базу множества H. Для этого в силу бикомпактности пространства R нужно только показать (см. [1], стр. 34, теор. 4), что для любого $x \in H$ все множества $O_i \cap G_j$, содержащие точку x, составляют псевдобазу (см. [1], стр. 9) пространства R в точке x, а это не составляет никакого труда.

Теорема. 1. *Никакое локально компактное неметризуемое пространство R не может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств типа G_δ, удовлетворяющих второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Допустим, что $R = \bigcup\limits_n H_n$ и каждое H_n удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тогда R, являясь суммой счетного числа финально компактных множеств (см. [1], стр. 23), само является финально компактным. Так как R локально компактно и финально компактно, то оно локально бикомпактно. Возьмем теперь для каждой точки $x \in R$ окрестность Ux, замыкание $[Ux]$ которой бикомпактно, и построим непрерывную функцию f_x, принимающую значение нуль в точке x и значение 1 во всех точках границы $[Ux] \setminus Ux$ окрестности Ux. Возьмем далее меньшую окрестность $Ox = E\left\{f_x < \frac{1}{2}\right\}$ и замкнутое множество $F_x = E\left\{f_x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ типа G_δ, содержащее Ox. В силу финальной компактности R существует счетное число этих окрестностей Ox_i, сумма которых равна всему R. Тогда и $\bigcup\limits_i F_{x_i} = R$. Рассмотрим, наконец, счетное число множеств $H_{ni} = H_n \cap F_{x_i}$ типа G_δ., Каждое из них имеет счетную внешнюю базу в бикомпакте $[Ux_i]$ а тем более и в самой окрестности Ux_i. Но ведь Ux_i — открыто в R, поэтому счетная внешняя база множества H_{ni} в Ux_i будет счетной внешней базой множества H_{ni} во всем пространстве R. А тогда и все R будет иметь счетную базу, чего не может быть, так как R не метризуемо. Теорема доказана.

Следствие. *Никакое локально компактное неметризуемое пространство R не может быть разбито на взаимно дополнительные множества, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, из которых одно открыто, а другое замкнуто.*

Доказательство. Допустим, что в R существует открытое множество Γ такое, что и Γ и $\Phi = R \setminus \Gamma$ удовлетворяют второй аксиоме счетности. Тогда R, являясь суммой двух финально компактных множеств, само финально компактно. Отсюда вытекает далее, что R локально бикомпактно, а потому и регулярно. Значит, и Γ — локально бикомпактно. Так как Γ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то Γ имеет тип F_σ, а Φ — тип G_δ, что противоречит утверждению теоремы 1. Следствие доказано.

Теорема 2. *Никакое регулярное неметризуемое пространство R не может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств H_n, являющихся абсолютными G_δ и удовлетворяющих второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Допустим, что все H_n, $\bigcup\limits_n H_n = R$, удовлетворяют второй аксиоме счетности. Тогда R — финально компактно, а, стало быть, нормально (теорема Веденисова, см., напр. [2], стр. 165). Тогда каждое H_n, имея тип G_δ в βR, в силу леммы будет иметь счетную внешнюю базу в βR, а потому и в R. Значит, и все пространство R имеет счетную базу, вопреки предположению о его неметризуемости. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров и П. С. Урысон, О компактных топологических пространствах, Труды Мат. института АН СССР, вып. 31.

2. Ю. М. Смирнов, О пространствах компактных в данном отрезке мощностей. Известия АН СССР, сер. матем., 14, 1950, стр. 155—178.

3. Э. Чех, On bicompact Spaces, Ann. of math., 38, 1937, стр. 823—844.

Поступила 14. XI 1950. Москва