1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К теории вполне непрерывных векторных полей

М. А. Красносельский

При изучении различных нелинейных уравнений основной интерес представляют „устойчивые" свойства этого уравнения — такие свойства, которые сохраняются при малых изменениях уравнения. Эти „устойчивые" свойства естественным образом связаны с топологическими инвариантами геометрических объектов, построенных по изучаемому уравнению.

В качестве геометрических объектов, связанных с уравнением, мы рассматриваем векторные поля в функциональных пространствах. Для полей, заданных на границах областей, мы определяем понятие Лерея-Шаудера [1] топологической степени (нам кажется более удобным для приложений понятие степени поля, чем понятие степени отображения области [1]). Понятие это в работах Лерея, Роте и Дольфа нашло приложение при доказательстве различных теорем существования решений. В заметках [3] мы указали, что понятие топологической степени находит приложение и в ряде других задач нелинейного анализа. В частности, понятие топологической степени оказывается полезным в задаче о точках бифуркации нелинейных уравнений.

При разработке методов, основанных на использовании топологических характеристик векторных полей, желательно знать все эти характеристики. С этой точки зрения приобретает важность классификация векторных полей в банаховом пространстве, отыскание гомотопических классов векторных полей. Этому вопросу посвящен § 1 настоящей статьи.

В § 3 приводится доказательство принципа неподвижной точки (см. [3], первая заметка), являющегося обобщением на бесконечномерные пространства аналогичного утверждения Люстерника-Шнирельмана-Борсука для конечномерного случая. Новое доказательство теоремы Люстерника-Шнирельмана-Борсука приводится в § 2.

§ 1. Топологическая степень вполне непрерывного векторного поля

1. Для простоты мы приведем определение топологической степени вполне непрерывного векторного поля на сфере банахова пространства. Аналогично топологическая степень определяется для полей без нулевых векторов, заданных на границе любого ограниченного открытого множества.

Пусть Φ непрерывный (вообще говоря, нелинейный) оператор, действующий в банаховом пространстве E. Рассмотрим в E векторное поле, задав в каждой точке $x \in E$ вектор Φx. Поле это будем также обозначать буквой Φ. Если оператор Φ имеет вид $\Phi = F - I$, где F — вполне непрерывный оператор, а I — оператор тождественного преобразования, то поле Φ будем называть *вполне непрерывным*.

Обозначим через S некоторую сферу пространства E, а через T — ограничиваемый ею шар. Будем считать, что центром сферы является нуль θ пространства E. Пусть вполне непрерывное поле Φ не имеет нулевых векторов на S. В этом случае, как легко видеть, найдется такое положительное число α, что

$$\|\Phi x\| > \alpha \qquad (x \in S). \tag{1}$$

Следуя Лерею и Шаудеру, выберем в E конечномерное подпространство E_n, апроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{3}$ компактное множество FS значений оператора F на сфере S (множество концов векторов поля Φ на S). В качестве E_n можно выбрать, например, линейную оболочку какой-либо конечной $\frac{\alpha}{3}$-сети множества FS и элемента θ. Пусть P_n — такой непрерывный оператор, определенный на FS с множеством значений в E_n, что

$$\|P_n Fx - Fx\| \leqslant \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in S). \tag{2}$$

Построение оператора P_n можно осуществить, например, следующим образом [1]. Пусть ε-сеть множества FS состоит из элементов $y_i \in E_n$ $(i = 1, \ldots, k)$, причем $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$. Оператор P_n определим формулой

$$P_n z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i(z) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i(z)} \qquad (z \in FS), \tag{3}$$

где

$$\mu_i(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \|z - y_i\| & \text{при } \|z - y_i\| \leqslant \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \text{при } \|z - y_i\| \geqslant \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Непрерывность оператора P_n очевидна. Выполнение условия (2) следует из того, что $P_n z$ принадлежит выпуклой оболочке точек, находящихся на расстоянии $\leqslant \frac{\alpha}{2}$ от z.

Определим теперь на $S^{(n-1)} = S \cap E_n$ оператор Φ_n, положив

$$\Phi_n x = P_n F x - x \qquad (x \in S^{(n-1)}). \tag{4}$$

Непрерывное векторное поле Φ_n не будет иметь на $S^{(n-1)}$ нулевых векторов, так как в силу (1) и (2)

$$\|\Phi_n x\| = \|P_n F x - x\| \geqslant \|Fx - x\| - \|P_n F x - F x\| > \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in S^{(n-1)}).$$

Если мы выберем другой непрерывный оператор P'_n, удовлетворяющий условию (2) и построим поле Φ'_n:

$$\Phi'_n x = P'_n F x - x \qquad (x \in S^{(n-1)}),$$

то поля Φ_n и Φ'_n будут гомотопны в E_n. Действительно, поля

$$\Phi_t = t\Phi'_n + (1-t)\,\Phi_n$$

не имеют нулевых векторов при $0 \leqslant t \leqslant 1$, так как

$$\|\Phi_t x\| \geqslant \|\Phi x\| - t\|\Phi'_n x - \Phi_x\| - (1-t)\|\Phi_n x - \Phi x\| =$$

$$= \|\Phi x\| - t\|P'_n F x - F x\| - (1-t)\|P_n F x - F x\| > \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in S^{(n-1)}).$$

Общую степень отображений $\overline{\Phi}_n$

$$\overline{\Phi}_n x = \varrho \frac{\Phi_n x}{\|\Phi_n x\|} \qquad (x \in S^{(n-1)})$$

сферы $S^{(n-1)}$ на себя, где ϱ — радиус сферы S, а Φ_n — операторы, определенные равенством (4), в котором оператор P_n удовлетворяет условию (2), будем обозначать через γ_n.

Рассмотрим теперь подпространство $E_{n+1} \supset E_n$ и построим описанным выше способом на $S^{(n)} = S \cap E_{n+1}$ апроксимирующее Φ поле Φ_{n+1}. Общую степень отображений

$$\overline{\Phi}_{n+1} x = \varrho \frac{\Phi_{n+1} x}{\|\Phi_{n+1} x\|} \qquad (x \in S^{(n)})$$

обозначим через γ_{n+1}. Мы показали выше, что степень γ_{n+1} не зависит от выбора оператора P_{n+1}. Можно, в частности, в качестве этого оператора выбрать оператор P_n. При таком выборе легко усмотреть равенство степеней отображений $-\overline{\Phi}_n$ и $-\overline{\Phi}_{n+1}$. Отсюда следует (так как степень отображения $-I$ четномерной сферы на себя равна -1, а нечетномерной сферы равна 1), что

$$\gamma_{n+1} = -\gamma_n.$$

Следовательно, при последовательном увеличении числа n измерений апроксимирующего FS подпространства E_n число $(-1)\gamma_n$ не будет меняться.

Пусть E_n и E_m — различные, не содержащиеся одно в другом подпространства, апроксимирующие FS, а γ_n и γ_m — определенные по ним степени отображений. Из того, что линейная оболочка подпространств E_n и E_m также апроксимирует FS, следует, что

$$(-1)^n \gamma_n = (-1)^m \gamma_m.$$

Таким образом, число $(-1)^n \gamma_n$ однозначно определяется полем Φ. Это число будем называть *топологической степенью* поля Φ и обозначать через γ_Φ.

2. Вполне непрерывные векторные поля Φ и Ψ без нулевых векторов на S будем называть *сильно гомотопными* на S, если существует вполне непрерывный оператор $F(x, t)$, заданный на топологическом произведении S на сегмент $[0,1]$: $x \in S$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с множеством значений в E, такой, что $F(x, t) - x$ ни в одной точке не обращается в нуль и

$$F(x, 0) - x = \Phi x, \quad F(x, 1) - x = \Psi x \qquad (x \in S).$$

Легко видеть, что *топологическая степень сильно гомотопных вполне непрерывных векторных полей одинакова.*

3. Пусть вполне непрерывное векторное поле Φ, заданное на шаре T, лишь в конечном числе точек $x_1, \ldots, x_r$, не лежащих на S-границе T, имеет нулевые векторы. Эти точки назовем неподвижными точками поля Φ. Будем описывать вокруг каждой неподвижной точки x_i поля Φ сферы S_i^ε достаточно малых радиусов ε (так, чтобы ограничиваемые ими шары T_i^ε были полностью внутри T и чтобы внутри каждого шара была только одна из неподвижных точек). Топологическая степень полей Φ_i^ε, индуцированных полем Φ на сферах S_i^ε, будет одинакова при различных ε. Эту степень γ_{x_i} назовем *индексом* неподвижной точки x_i.

Сумма индексов $\gamma x_1, \ldots, \gamma x_r$ неподвижных точек $x_1, \ldots, x_r$ поля Φ в шаре T равна топологической степени поля Φ на сфере S.

Для доказательства этого утверждения [1] достаточно провести через точки $x_1, \ldots, x_r$ подпространство E_n, апроксимирующее множество значений оператора $F = \Phi + I$ на $T - \bigcup_{i=1}^{r} T_i^\varepsilon$ и применить соответствующее утверждение для векторных полей в конечномерном пространстве.

Из последнего утверждения следует, что для того, чтобы поле Φ на шаре T не имело неподвижных точек, *необходимо*, чтобы топологическая степень поля Φ на сфере S была равна нулю.

Таким образом, каждый признак отличия от нуля топологической степени вполне непрерывного векторного поля на S является одновременно достаточным признаком существования неподвижной точки поля в шаре T. В § 3 мы установим один достаточный признак нечетности, а следовательно, и отличия от нуля топологической степени поля на сфере банахова пространства.

Теорема, доказываемая ниже, показывает, что поля нулевой топологической степени на S всегда имеют вполне непрерывные продолжения на T без нулевых векторов.

4. Теорема. *Вполне непрерывные векторные поля Φ и Ψ без нулевых векторов на S сильно гомотопны, если их топологическая степень одинакова.*

Теорема эта для конечномерных пространств была установлена Хопфом. Для гильбертова пространства ее доказал Э. Роте.

Доказательство[1]. Операторы $\Phi+I$ и $\Psi+I$ вполне непрерывны. Поэтому найдется такое $\alpha>0$, что

$$\|\Phi x\|>\alpha, \quad \|\Psi x\|>\alpha \qquad (x\in S).$$

Обозначим через E_n подпространство, апроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{4}$ компактные множества $(\Phi+I)S$ и $(\Psi+I)S$. Пусть P_n — оператор, удовлетворяющий условию (2).

Векторное поле Φ сильно гомотопно полю $\Phi_n=P_n(\Phi+I)-I$ (соответственно, поле Ψ сильно гомотопно полю $\Psi_n=P_n(\Psi+I)-I$). Действительно, оператор

$$F(x, t)=(1-t)(\Phi x+x)+tP_n(\Phi x+x) \qquad (x\in S,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

вполне непрерывен при каждом t и непрерывен по t равномерно относительно $x\in S$, т. е. вполне непрерывен на топологическом произведении сферы S на сегмент $[0, 1]$. Кроме этого, легко видеть, что $F(x, t)-x$ не обращается в нуль.

Таким образом, нам достаточно показать сильную гомотопность полей Φ_n и Ψ_n.

Обозначим через $E^n\subset E$ такое подпространство, что

$$E_n \dot{+} E^n=E, \quad E_n\cap E^n=0. \tag{5}$$

Знаком $\dot{+}$ здесь обозначена прямая сумма подпространств.

Построение подпространства E^n можно произвести, например, следующим образом. Рассмотрим в E_n линейно независимые функционалы $l_1, \ldots, l_n$, т. е. такие функционалы, что в каждой точке $x\in E_n$ по крайней мере один из них принимает значение, отличное от нуля. Эти функционалы продолжим с сохранением нормы на все E и обозначим через E^n множество элементов $x\in E$, на которых все расширенные функционалы принимают значение нуль. Выполнение условия (5) очевидно.

Каждый элемент $x\in E$ единственным образом представим в виде

$$x=x_1+x_2 \qquad (x_1\in E_n,\ x_2\in E^n). \tag{6}$$

Обозначим через Φ_n^0 и Ψ_n^0 векторные поля, определенные равенствами

$$\Phi_n^0 x=\frac{\|x_1\|}{\varrho}\Phi_n\left(\varrho\frac{x_1}{\|x_1\|}\right)-x_2, \quad \Psi_n^0 x=\frac{\|x_1\|}{\varrho}\Psi_n\left(\varrho\frac{x_1}{\|x_1\|}\right)-x_2. \qquad (x\in S).$$

[1]) Несколько другое доказательство теоремы предложил Ю. Л. Далецкий.

Непрерывность этих полей очевидна. Компактность образов операторов Φ_n^0+I и Ψ_n^0+I следует из того, что эти образы $\subset E_n$. Покажем, что поле Φ_n^0 сильно гомотопно полю Φ_n (соответственно, поле Ψ_n^0 сильно гомотопно полю Ψ_n). Действительно, оператор

$$F(t, x) = (1-t)(\Phi_n x + x) + t(\Phi_n^0 x + x) \qquad (x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

вполне непрерывен при каждом t и непрерывен по t равномерно относительно $x \in S$, т. е. вполне непрерывен на топологическом произведении сферы на сегмент $[0, 1]$. Кроме этого, $F(t, x)-x$ не обращается в нуль, так как при $x \in E_n$: $F(t, x)-x=\Phi_n x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, а при $x \bar{\in} E_n$ в разложении (6) элемента $F(t, x)-x$ второе слагаемое не зависит от значения t и равно $-x_2$.

Таким образом, утверждение теоремы будет доказано, если будет установлена сильная гомотопность полей Φ_n^0 и Ψ_n^0. Эти поля на $S^{(n-1)}=$ $=S \cap E_n$ совпадают с полями Φ_n и Ψ_n, степени которых одинаковы. В силу теоремы Хопфа о гомотопности полей одинаковой степени на конечномерной сфере найдется такая непрерывная по t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и по $x_1 \in S^{(n-1)}$ нигде не обращающаяся в нуль функция $F_n(t, x_1)-x_1$, что

$$F_n(0, x_1)=\Phi_n x_1+x_1, \quad F_n(1, x_1)=\Psi_n x_1+x_1 \qquad (x_1 \in S^{(n-1)}).$$

Построим оператор

$$F(t, x)=\frac{\|x_1\|}{\varrho} F_n\left(t, \varrho \frac{x_1}{\|x_1\|}\right) \qquad (x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Очевидно,

$$F(0, x)=\Phi_n^0 x+x, \quad F(1, x)=\Psi_n^0 x+x \qquad (x \in S),$$

причем оператор $F(t, x)$ непрерывен по t равномерно относительно $x \in S$ и $F(t, x)-x$ в нуль не обращается.

Теорема доказана.

Отметим, что мы доказали несколько более сильное утверждение — что от поля Φ к полю Ψ можно перейти непрерывно, *равномерно* относительно $x \in S$.

§ 2. Теорема Люстерника-Шнирельмана-Борсука

В этом параграфе рассматриваются векторные поля в n-мерном пространстве. *Степенью* непрерывного без нулевых векторов векторного поля Φ на $n-1$-мерном полиедре L будем называть степень отображения $\Phi x / \|\Phi x\|$ полиедра L на единичную сферу. Если x — изолированная неподвижная точка непрерывного векторного поля Φ, то ее *индексом* называется общая степень полей Φ на сферах малого радиуса, окружающих точку x.

Теорема Люстерника-Шнирельмана-Борсука. *Пусть на сфере $S \in E_n$ задано непрерывное векторное поле без нулевых векторов, обладающее свойством*

$$\frac{\Phi(-x)}{\|\Phi(-x)\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S)$$

в симметричных относительно центра сферы точках x и $-x$ векторы поля Φ не одинаково направлены.

Тогда степень поля Φ нечетна.

Утверждение этой теоремы было установлено Борсуком ([4], 1932) для нечетных полей при помощи теории ретрактов. Теорема Борсука эквивалентна и непосредственно следует из основной леммы Люстерника-Шнирельмана доказательства их теоремы о категории проективного пространства ([2], 1930).

Доказательство[1]). Во-первых, заметим, что векторное поле Φ, рассматриваемое в доказываемой теореме, гомотопно нечетному полю Ψ без нулевых векторов, т. е. такому векторному полю Ψ, что

$$\Psi(-x)=-\Psi x \qquad (x\in S),$$

где векторы Ψx определяются равенством

$$\Psi x=\Phi x-\Phi(-x) \qquad (x\in S).$$

Для этого рассмотрим поля $\Phi(x, t)$

$$\Phi(x, t)=\Phi x-t\Phi(-x) \qquad (x\in S,\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

Непрерывность полей $\Phi(x, t)$ очевидна. Поля $\Phi(x, t)$ не имеют нулевых векторов в силу условия теоремы. При этом $\Phi(x, 0)=\Phi x$, а $\Phi(x, 1)=\Psi x$.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что поле Φ нечетно

$$\Phi(-x)=-\Phi x \qquad (x\in S). \tag{1}$$

Пусть S_1 — сфера, концентричная сфере S и лежащая внутри ее. Произведем достаточно мелкое симплициальное разбиение шарового слоя, заключенного между S и S_1, симметричное относительно центра сфер S и S_1, так, чтобы симметричные относительно центра симплексы не пересекались. Обозначим через L границу всех n-мерных симплексов разбиения.

Построим продолжение без нулевых векторов поля Φ на L. На S_1 пусть векторы направлены по радиусам. Затем продолжение строится последовательно на границе каждой пары симметричных симплексов — на границе одного из этих симплексов определяем поле произвольно, а затем на границе второго определяем так, чтобы продолженное поле было нечетным. Возможность такого продолжения в условиях нашей теоремы очевидна (без ограничения общности можно считать, что отображение Φ не повышает размерность множеств сферы S), так как оно эквивалентно продолжению n непрерывных функций на $n-1$-мерный полиедр без общего нуля. Наиболее просто показывается возможность продолжения, если предварительно отображение Φ заменить симплициальным.

---

[1]) Другое элементарное доказательство леммы Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана см. в [5].

Теперь так продолжим поле Φ на весь шар T, ограничиваемый сферой S, сохраняя нечетность поля, что в каждом из построенных симплексов есть только одна неподвижная точка, и в шаре, ограниченном сферой S_1, есть только одна неподвижная точка. Индексы симметричных относительно центра сферы неподвижных точек в силу нечетности поля будут одинаковы, так что сумма индексов неподвижных точек, лежащих в шаровом слое, будет четным числом. Индекс неподвижной точки, лежащей в центре сфер, будет равен единице. Так как степень поля Φ на S равна сумме индексов всех неподвижных точек, то она будет числом нечетным.

Теорема доказана.

§ 3. Принцип неподвижной точки

1. Пусть S — сфера в банаховом пространстве E.

Теорема. *Пусть на сфере S задано вполне непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов, обладающее свойством: в симметричных относительно центра сферы точках x и $-x$ векторы поля направлены не одинаково:*

$$\frac{\Phi(-x)}{\|\Phi(-x)\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S).$$

Тогда топологическая степень поля Φ нечетна.

Доказательство. Пусть $\Phi = F - I$, где F — вполне непрерывный оператор. Рассмотрим оператор

$$F(t, x) = \frac{1}{1+t} Fx - \frac{1}{1+t} F(-x) \qquad (x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Он вполне непрерывен при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ как разность двух вполне непрерывных операторов и равномерно относительно $x \in S$ непрерывен по t, так как

$$\|F(t_1, x) - F(t_2, x)\| \leqslant 2|t_1 - t_2| \sup_{y \in S} \|Fy\| \qquad (0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1).$$

Кроме этого, $F(t, x) - x$ не обращается в нуль, ибо из $F(t_0, x_0) = x_0$ следует

$$Fx_0 - x_0 = t_0 [F(-x_0) - x_0],$$

что противоречит условию теоремы.

Таким образом, поле $\Phi : \Phi x = F(0, x) - x$ $(x \in S)$ сильно гомотопно полю Ψ:

$$\Psi x = F(1, x) - x = \frac{1}{2} \Phi x - \frac{1}{2} \Phi(-x). \qquad (x \in S).$$

Следовательно, топологические степени полей Φ и Ψ одинаковы, и нам достаточно показать, что нечетна топологическая степень нечетного поля Ψ

$$\Psi(-x) = -\Psi(x) \qquad (x \in S).$$

Для определения топологической степени поля Ψ апроксимируем множество $(\Psi+I)\,S$ подпространством E_n и выберем для построения оператора P_n (см. § 1, формулу (3)) систему точек $y_1,\dots, y_n, -y_1,\dots, -y_n$. При этом оператор P_n будет, очевидно, нечетным:

$$P_n(-z) = -P_n z \qquad (z \in (\Psi+I)\,S).$$

В силу этого поле $\Psi_n = P_n(\Psi+I)-I$ будет удовлетворять условиям теоремы Люстерника-Шнирельмана-Борсука, откуда следует, что его степень нечетна.

Значит нечетна и топологическая степень поля Ψ.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть на шаре $T \subset E$ задано вполне непрерывное векторное поле $\Phi = F - I$ без нулевых векторов на сфере S — границе шара T, удовлетворяющее на S условиям доказанной теоремы.*

Тогда уравнение

$$x = Fx$$

имеет по крайней мере одно решение в шаре T.

Это утверждение является непосредственным обобщением принципа Шаудера существования неподвижной точки при отображении шара в свою компактную часть. При этом доказанный принцип охватывает поля любой нечетной топологической степени на S, а принцип Шаудера — поля топологической степени равной единице.

2. Мы приведем в этом пункте еще одно следствие из доказанной теоремы, удобное в приложениях. Это утверждение может быть доказано и другими способами (оно следует, например, непосредственно из работы Лерея-Шаудера [1], оно может быть получено и при помощи принципа Шаудера).

Теорема о нулевом векторе поля, близкого на сфере к линейному. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве E. Пусть B — такой линейный вполне непрерывный оператор, действующий в E, что на некоторой сфере $S \subset E$ радиуса ϱ*

$$\|Ax - \lambda Bx\| < \|x - \lambda Bx\| \qquad (x \in S),$$

причем λ не есть собственное число оператора B.

Тогда уравнение

$$\varphi = A\varphi$$

имеет по крайней мере одно решение $\varphi_0 \in E$, причем $\|\varphi_0\| < \varrho$.

Доказательство. Покажем, что поле Φ, определенное равенством

$$\Phi x = Ax - x,$$

удовлетворяет на S условию теоремы, доказанной в первом пункте настоящего параграфа.

Действительно, если в некоторой паре точек x_0, $-x_0$ $(x_0 \in S)$ векторы поля Φ направлены одинаково, то найдется такое α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что

$$\Phi x_0 = \alpha \Phi(-x_0).$$

Но это противоречит тому, что

$$\|\Phi x_0 - \alpha\Phi(-x_0)\| \geqslant \|\lambda B x_0 - x_0\| - \|Ax_0 - \lambda Bx_0\| + \\ + \alpha[\|\lambda B(-x_0) + x_0\| - \|A(-x_0) + \lambda Bx_0\|] > 0.$$

Теорема доказана.

3. Установленные в настоящем параграфе теоремы находят применение при доказательстве теорем существования решений у различных нелинейных интегральных уравнений. Некоторые из них приведены в [3] (первая заметка).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лерей и Шаудер, Топология и функциональные уравнения, Усп. матем. наук, вып. 14 (1946).
2. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М. (1930).
3. М. А. Красносельский, ДАН, 71, № 6; 73, № 1; 74, № 1; 74, № 2 (1950).
4. K. Borsuk, Fundamenta Mathematicae, 20 (1932).
5. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, Об одном доказательстве теоремы о категории проективного пространства, Укр. математ. журн., т. I, № 3 (1949).

Поступила 27.XI 1950. Киев.
