1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Гиперкомплексные системы с компактным базисом [1])

Ю. М. Березанский и *С. Г. Крейн*

Введение

Теория нормированных колец И. М. Гельфанда (см. [3]) и ее приложения показали плодотворность применения алгебраических методов в анализе.

В работах И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова, М. Г. Крейна, затем Д. А. Райкова (см. [3, 4]) было детально исследовано нормированное кольцо (групповое кольцо) функций на локально компактной коммутативной группе, что позволило им перенести ряд классических теорем теории рядов и интегралов Фурье на коммутативные группы.

Новый класс коммутативных нормированных колец ввели в рассмотрение Б. М. Левитан и А. Я. Повзнер [5, 6]. В этих кольцах роль групповой операции играет операция обобщенного сдвига в смысле Б. М. Левитана.

В качестве приложения этих рассмотрений были получены теоремы типа Бохнера и Планшереля для решений определенного класса уравнений Штурм-Лиувилля.

Кольца, изученные Б. М. Левитаном и А. Я. Повзнером, по своей алгебраической природе являлись бесконечномерным аналогом гиперкомплексных систем конечного ранга в том же смысле, в котором групповое кольцо непрерывной группы являлось обобщением группового кольца конечной группы.

В настоящей работе рассматриваются коммутативные нормированные кольца (гиперкомплексные системы с компактным базисом), являющиеся естественным обобщением гиперкомплексных систем с конечным базисом, структурные константы c_{jkl} которых положительны [2]).

[1]) Настоящая статья является подробным изложением результатов работ авторов, опубликованных в ДАН СССР [1, 2]. Авторы отказались от термина „континуальные алгебры", заменив его более соответствующим сути термином „гиперкомплексные системы с компактным базисом".

[2]) Как показал один из авторов [7], большинство построений этой работы может быть легко перенесено на случай, когда c_{jkl} произвольного знака. При этом, однако, несколько теряется алгебраическая стройность теории.

В § 1 приводится построение гиперкомплексных систем с компактным базисом, при этом роль базиса играет некоторый компакт Q, а элементами служат функции, определенные на этом компакте и суммируемые по некоторой мере, являющейся обобщением на наш случай инвариантной меры на группе. Вместо структурных констант c_{jkl}, определяющих закон перемножения элементов гиперкомплексной системы, рассматривается структурная мера $C(A, B, t)$, где A, B — борелевские множества из Q, а t — точка Q. Естественным обобщением структурных констант c_{jkl} являлась бы „структурная функция" $C(r, s, t)$, однако нами вводится структурная мера с целью включить в теорию некоторые „сингулярные" случаи. В этом же параграфе вводится понятие характеров гиперкомплексной системы и устанавливается их связь с максимальными идеалами.

В § 2 исследуется класс гиперкомплексных систем (нормальных), в базисе которых определена инволюция, порождающая инволюцию в кольце. Теорема 5 этого параграфа дает полное описание радикала таких систем. Характеры этих гиперкомплексных систем являются непрерывными ортогональными друг другу функциями, образующими полную систему в случае, когда гиперкомплексная система полупростая (т. е. когда у нее отсутствует радикал).

В § 3 рассматривается аналог гиперкомплексных систем конечного ранга, в базисе которых имеется единица. Эти гиперкомплексные системы, так же как и в конечномерном случае, являются полупростыми. На разложение в ряды по характерам таких систем переносится известная теорема о рядах Фурье с положительными коэфициентами.

В § 4 показывается, что всякая нормальная гиперкомплексная система содержит некоторое специальное подкольцо (эрмитову подсистему), в известной степени описывающее саму гиперкомплексную систему.

За недостатком места мы не включили в настоящую статью примеры конкретных гиперкомплексных систем. Такими примерами могут служить: групповое кольцо компактной коммутативной группы, центр группового кольца компактной некоммутативной группы [14], кольцо, построенное по зональным функциям однородного компакта, кольца, связанные с некоторыми системами ортогональных полиномов и функций. Подробное рассмотрение этих примеров мы приведем в другой статье.

* *
*

Условимся о некоторых обозначениях.

Q во всем дальнейшем обозначает некоторый компакт, а $[Q]$ — тело его борелевских множеств. Под измеримой функцией будем понимать измеримую по Бэру функцию. Характеристическую функцию множества A будем обозначать через $\varkappa_A(t)$. Под мерой мы понимаем абсолютно аддитивную функцию ограниченной вариации, определенную на теле борелевских множеств пространства. Неотрицательную меру ψ мы называем регулярной, если для каждого борелевского множества A $\psi(A) = \inf \psi(O)$, где infimum распространяется по открытым $O \supset A$. Произвольную меру ограниченной вариации называем регулярной, если она представима в виде линейной комбинации регулярных неотрицательных мер. При интегрировании по всему компакту мы будем опускать обозначение области интегрирования.

Приведем несколько утверждений относительно интегрирования по мерам, зависящим от параметра, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

Мажорантой (вообще говоря, комплексной) меры $\varrho(E)$ $(E \in [Q])$ будем называть неотрицательную меру $\bar{\varrho}(E)$ $(E \in [Q])$ такую, что $|\varrho(E)| \leqslant \bar{\varrho}(E)$ для каждого $E \in [Q]$.

Лемма А. *Для каждой измеримой функции $f(t)$ $(t \in Q)$ справедливо неравенство*

$$\left| \int f(t)\, d\varrho(t) \right| \leqslant \int |f(t)|\, d\bar{\varrho}(t).$$

Лемма В. *Пусть $\sigma(E, t)$ и $\varrho(E)$ $(t \in Q)$ относительно $E \in [Q]$ являются неотрицательными мерами, $\sigma(E, t)$ и $f(t)$ $(E \in [Q])$ относительно $t \in Q$ неотрицательные измеримые функции, причем $\int \sigma(Q, t)\, d\varrho(t) < \infty$. Тогда из существования по крайней мере одного из интегралов*

$$\int \left(\int f(t)\, d_t\, \sigma(E_t, r) \right) d\varrho(r), \quad \int f(t)\, d_t \left(\int \sigma(E_t, r)\, d\varrho(r) \right) \qquad (!)$$

следует существование второго и их равенство.

Лемма С. *Пусть $\sigma(E, t)$ и $\varrho(E)$ $(t \in Q)$ относительно $E \in [Q]$ являются мерами, причем $\sigma(E, r)$ относительно $r \in Q$ измерима. Предположим, что меры $\sigma(E, r)$, $\varrho(E)$ обладают мажорантами $\bar{\sigma}(E, r)$, $\bar{\varrho}(E)$, первая из которых измерима относительно r и для которых $\int \bar{\sigma}(Q, r)\, d\bar{\varrho}(r) < \infty$. Тогда из существования по крайней мере одного из интегралов*

$$\int \left(\int |f(t)|\, d_t \bar{\sigma}(E_t, r) \right) d\bar{\varrho}(r), \quad \int |f(t)|\, d_t \left(\int \bar{\sigma}(E_t, r)\, d\bar{\varrho}(r) \right),$$

где $f(t)$ некоторая измеримая функция, следует существование обоих интегралов (!) и их равенство.

Лемма D. *Если $\psi(A, B)$ $(A, B \in [Q])$ является неотрицательной мерой относительно $A(B)$ при фиксированном $B(A)$, а $f(t)$ $(t \in Q)$ некоторая измеримая функция, суммируемая по мере $\psi(E, Q)$, то функция $\varrho(A) = \int f(t)\, d\psi(E_t, A)$ является мерой на $[Q]$.*

Доказательства этих лемм могут быть получены при помощи обычных методов теории меры и интеграла (см., например, [9, 8]) и нами здесь не приводятся.

§ 1. Общие гиперкомплексные системы с компактным базисом

В этом параграфе будут введены основные для дальнейшего понятия структурной и мультипликативной мер, гиперкомплексной системы и характера.

1°. Следующее определение является обобщением на континуальный случай понятия структурных констант гиперкомплексной системы.

Функцию $C(A, B, t)$ $(A, B \in [Q], t \in Q)$ назовем структурной мерой (с. мерой), если она удовлетворяет следующим требованиям:

α) При фиксированных B, t функция $C(A, B, t)$ является неотрицательной конечной абсолютно аддитивной регулярной мерой относительно A, причем $C(O, Q, t) > 0$ для каждого открытого $O \subset Q$ и любого $t \in Q$.

β) $C(A, B, t)$ непрерывна по t при фиксированных A и B.

γ) Условие ассоциативности:

$$\int C(A, B, r)\, d_r C(E_r, D, t) = \int C(B, D, r)\, d_r C(A, E_r, t).$$

$$(A, B, D \in [Q], \quad t \in Q).$$

δ) Условие коммутативности:

$$C(A, B, t) = C(B, A, t) \qquad (A, B \in [Q], \ t \in Q).$$

Нам понадобится

Лемма 1. *Для каждых $A, B \in [Q]$ существует последовательность открытых множеств $O_n \supset A$ таких, что $C(O_n, B, t) \to C(A, B, t)$ равномерно по t.*

Действительно, в силу регулярности с. меры при фиксированном t можно найти такое открытое $O_{n, t} \supset A$, что $C(O_{n, t}, B, t) - C(A, B, t) < \frac{1}{n}$. В силу непрерывности по t существует окрестность $U(t)$ такая, что для всех $r \in U(t)$ $C(O_{n, t}, B, r) - C(A, B, r) < \frac{1}{n}$. Покроем Q окрестностями $U(t)$ и выберем конечное покрытое $U(t_1), \ldots, U(t_k)$. Тогда для открытого множества $O_n = O_{n, t_1} \cap \ldots \cap O_{n, t_k}$ и всех $t \in Q$ имеем $C(O_n, B, t) - C(A, B, t) < \frac{1}{n}$, откуда и следует утверждение.

Пусть задана с. мера $C(A, B, t)$. Неотрицательную конечную абсолютно аддитивную меру $m(E)$ $(E \in [Q])$, отличную от тождественного нуля, назовем мультипликативной мерой (м. мерой), если

$$m(A)\, m(B) = \int C(A, B, t)\, dm(t) \qquad (A, B \in [Q]). \tag{1.1}$$

В дальнейшем будет часто использована

Лемма 2. *Всякая м. мера регулярна и положительна на каждом открытом множестве. Каждая из мер $C(E, B, t)$ ($B \in [Q]$ и $t \in Q$ фиксированы) абсолютно непрерывна относительно м. меры. Любые две м. меры абсолютно непрерывны одна относительно другой.*

В самом деле, из (1.1) и неравенства $C(O, Q, t) > 0$, если O открытое множество, следует, что $m(O) > 0$. Регулярность м. меры, очевидно, следует из (1.1) и леммы 1. Мера $C(A, B, t)$ (B и t фиксированы) абсолютно непрерывна относительно м. меры, так как из (1.1) следует, что если $m(A)=0$, то $C(A, B, t)=0$ почти всюду. В силу непрерывности $C(A, B, t)$ по t и положительности м. меры на открытых множествах это равенство имеет место всюду. Из доказанного и (1.1) очевидно вытекает и последняя часть леммы.

Имеет место следующая теорема существования

Теорема 1. *Для каждой структурной меры существует по крайней мере одна мультипликативная мера.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $C(Q)$ непрерывных вещественных функций на Q с равномерной нормой. Определим оператор T_B ($B \in [Q]$) равенством

$$(T_B f)(t) = \int f(r)\, d_r C(E_r, B, t) \qquad (f \in C(Q)).$$

Из свойства β) с. меры легко следует, что T_B переводит непрерывную функцию в непрерывную. Оператор T_B, очевидно, линеен и непрерывен и, кроме того, если $f \in C(Q)$ такова, что $f(r) > 0$ ($r \in Q$), то из свойства α) с. меры заключаем, что и $(T_O f)(t) > 0$ ($t \in Q$) для каждого открытого множества $O \subset Q$. Покажем, что операторы T_B ($B \in [Q]$) коммутируют. В самом деле,

$$\begin{aligned}(T_A(T_B f))(t) &= \int \left(\int f(r)\, d_r C(E_r, B, s) \right) d_s C(E_s, A, t) = \\ &= \int f(r)\, d_r \left(\int C(E_r, B, s)\, d_s C(E_s, A, t) \right) = \\ &= \int f(r)\, d_r \left(\int C(B, E_r, s)\, d_s C(E_s, A, t) \right) = \\ &= \int f(r)\, d_r \left(\int C(E_r, A, s)\, d_s C(B, E_s, t) \right) = \\ &= \int f(r)\, d_r \left(\int C(E_r, A, s)\, d_s C(E_s, B, t) \right) = (T_B(T_A f))(t).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями коммутативности и ассоциативности, а также применили лемму С.

Таким образом, мы имеем совокупность $\{T_O\}$ (O любое открытое множество) линейных непрерывных коммутирующих операторов, переводящих внутренность конуса всех неотрицательных непрерывных функций на Q в себя. По теореме М. Г. Крейна [10], сопряженные операторы T_O^* имеют общий собственный вектор l, т. е. $T_O^* l = \lambda_O l$ ($\lambda_O > 0$, $l \in C^*(Q)$), причем функционал l позитивен. Принимая во внимание теорему Маркова [11] о представлении позитивных функционалов в $C(Q)$, получим

$$\int (T_O f)(t)\, d\psi(t) = \lambda_O \int f(t)\, d\psi(t) \qquad (f \in C(Q)), \tag{1.2}$$

где $\psi(E)$ $(E\in[Q])$ — неотрицательная конечная абсолютно аддитивная регулярная мера, одна и та же для всех открытых $O\subset Q$. Эта мера, пронормированная соответствующим образом, и окажется м. мерой.

Пусть $B\in[Q]$; покажем, что

$$\int (T_B f)(t)\,d\psi(t)=\lambda_B\int f(t)\,d\psi(t)\qquad (\lambda_B\geqslant 0). \tag{1.3}$$

Действительно, в силу леммы 1 построим последовательность открытых множеств $O_n\supset B$ таких, что $C(Q,O_n,t)\to C(Q,B,t)$ равномерно по t, переходя в (1.2) к пределу, получим (1.3).

Записывая (1.3) в виде

$$\int\left(\int f(r)\,d_r C(E_r,B,t)\right)d\psi(t)=\lambda_B\int f(t)\,d\psi(t)$$

и полагая $f(r)\equiv 1$, получим $\lambda_B=\dfrac{1}{\psi(Q)}\displaystyle\int C(Q,B,t)\,d\psi(t)$, поэтому

$$\int\left(\int f(r)\,d_r C(E_r,B,t)\right)d\psi(t)=\frac{1}{\psi(Q)}\int f(t)\,d\psi(t)\int C(Q,B,t)\,d\psi(t). \tag{1.4}$$

Распространим эту формулу на характеристические функции $f(r)=\varkappa_O(r)$ (O открыто). Для этого построим ограниченную в совокупности последовательность непрерывных функций $f_n(r)$, сходящихся к $\varkappa_O(r)$ для каждого $r\in Q$; тогда для каждого $t\in Q$

$$\int f_n(r)\,d_r C(E_r,B,t)\to\int\varkappa_0(r)\,d_r C(E_r,B,t)=C(O,B,t).$$

Все функции этой последовательности равномерно по n ограничены и, следовательно, в (1.4) можно перейти к пределу, после чего получим

$$\int C(O,B,t)\,d\psi(t)=\frac{\psi(O)}{\psi(Q)}\int C(Q,B,t)\,d\psi(t). \tag{1.5}$$

Пусть теперь $A\in[Q]$ произвольно. Воспользовавшись леммой 1, построим последовательность открытых множеств $O_n\supset A$ таких, что $C(O_n,B,t)\to C(A,B,t)$ равномерно по t. Так как $\psi(E)$ регулярна, то существует последовательность открытых множеств $U_n\supset A$ таких, что $\psi(U_n)\to\psi(A)$. Положим $V_n=U_n\cap O_n$ $(n=1,2,..)$, очевидно $\psi(V_n)\to\psi(A)$ и $C(V_n,B,t)\to C(A,B,t)$ равномерно по t. Полагая в (1.5) $O=V_n$ и переходя к пределу, получим

$$\int C(A,B,t)\,d\psi(t)=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\int C(Q,B,t)\,d\psi(t).$$

Благодаря условию коммутативности $C(A,B,t)$ второй интеграл можно заменить через $\displaystyle\int C(Q,Q,t)\,d\psi(t)$ следующим образом:

$$\int C(A,B,t)\,d\psi(t)=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\int C(Q,B,t)\,d\psi(t)=$$

$$=\frac{\psi(A)}{\psi(Q)}\int C(B,Q,t)\,d\psi(t)=\frac{\psi(A)\,\psi(B)}{\psi(Q)^2}\int C(Q,Q,t)\,d\psi(t).$$

Из этой формулы явствует, что мера $m(E)=\frac{\psi(E)}{\psi(Q)^2}\int C(Q, Q, t)\,d\psi(t)$ будет мультипликативной. Теорема доказана.

2°. Зафиксируем некоторую меру m, интеграл по этой мере будем обозначать через $\int \ldots dt$, через $f(A)$ $(A\in[Q])$ обозначим $\int\limits_A f(t)\,dt$. Выражения „почти всюду" и аналогичные, если противное не будет оговорено, мы будем понимать относительно м. меры. Пусть $L(Q)$ пространство комплекснозначных суммируемых по мере m функций.

Теорема 2. *Пространство $L=L(Q)$ с нормой $\|x\|=\int|x(t)|\,dt$ и операцией умножения*

$$(x*y)(t)=\int x(r)\,d_r\left(\int y(s)\,d_s C(E_r, E_s, t)\right) \tag{1.6}$$

является коммутативным нормированным кольцом, причем $\|x*y\|\leqslant\|x\|\|y\|$. Это кольцо мы и называем гиперкомплексной системой (г. с.) с компактным базисом Q.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для каждых $x, y\in L$ интеграл (1.6) существует почти для всех t и принадлежит к L, причем

$$\int\left|\int x(r)\,d_r\left(\int y(s)\,d_s C(E_r, E_s, t)\right)\right|dt\leqslant\int|x(t)|\,dt\int|y(t)|\,dt. \tag{1.7}$$

Для этого заметим, что из Q можно выделить множество Q_0 $(m(Q_0)=m(Q))$, для каждой точки t которого существует интеграл $\int|y(s)|\,d_s C(A, E_s, t)$ $(A\in[Q])$. В самом деле, применяя лемму В, получим

$$\int\left(\int|y(s)|\,d_s C(Q, E_s, t)\right)dt=\int|y(s)|\,d_s\left(\int C(Q, E_s, t)\,dt\right)=$$

$$=\int|y(s)|\,d_s(m(Q)\,m(E_s))=m(Q)\int|y(s)|\,ds<\infty,$$

откуда и следует утверждаемое. Из доказанного и леммы D заключаем, что интеграл (1.6) имеет смысл для всех $t\in Q_0$. В силу абсолютной непрерывности каждой из мер $C(E, B, t)/(B\in[Q]$, $t\in Q$ фиксированы) относительно м. меры (лемма 2) интегралы в (1.6) и (1.7) можно считать распространенными по Q_0. Поэтому, применяя леммы А и В, получим

$$\int\left|\int x(r)\,d_r\left(\int y(s)\,d_s C(E_r, E_s, t)\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\left(\int|x(r)|\,d_r\left(\int|y(s)|\,d_s C(E_r, E_s, t)\right)\right)dt=$$

$$=\int|x(r)|\,d_r\left(\int\left(\int|y(s)|\,d_s C(E_r, E_s, t)\right)dt\right)=$$

$$= \int |x(r)|\, d_r \left(\int |y(s)|\, d_s \left(\int C(E_r, E_s, t)\, dt \right) \right) =$$

$$= \int |x(r)|\, d_r \left(\int |y(s)|\, ds\, m(E_r) \right) = \int |x(r)|\, dr \int |y(s)|\, ds.$$

Неравенство (1.7) доказано. Из (1.7) следует, что $\|x*y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, поэтому умножение (1.6) непрерывно по совокупности переменных x, y. Вследствие этого и дистрибутивности умножения, соотношения ассоциативности и коммутативности достаточно доказать для множества функций, линейная оболочка которого плотна в L, например, для характеристических функций борелевских множеств из Q. Выполнение же этих соотношений для характеристических функций фактически требуется нами в условиях γ) и δ) с. меры, так как

$$(\varkappa_A * \varkappa_B)(t) = C(A, B, t).$$

Теорема доказана.

Полученное кольцо может содержать или не содержать единицу, причем более интересным и сложным является последний случай. В статье мы ограничимся этим случаем, формально присоединяя единицу e к г. с., т. е. рассматривая коммутативное нормированное кольцо $\mathcal{L}$, состоящее из элементов $\lambda e + x$ (λ — комплексное число, $x \in L$)[1].

3°. Введем понятие характера г. с.

В существенном ограниченную измеримую комплекснозначную функцию $\chi(t)$ ($t \in Q$), не аннулирующуюся почти всюду, назовем характером г. с., если для каждых $A, B \in [Q]$ имеет место равенство

$$\chi(A)\chi(B) = \int C(A, B, t)\,\chi(t)\, dt. \qquad (1.8)$$

Каждая г. с. обладает по крайней мере одним характером — тождественной единицей. Отметим, что если $\chi(t)$ характер, то и $\overline{\chi(t)}$ характер.

Теорема 3. *Каждый характер г. с. порождает максимальный идеал кольца $\mathcal{L}$, отличный от L. Каждый максимальный идеал кольца $\mathcal{L}$, отличный от L, порождает характер г. с. Соответствующие друг другу максимальный идеал M и характер χ связаны соотношением*

$$(\lambda e + x)(M) = \lambda + \int x(t)\,\chi(t)\, dt \qquad (x \in L). \qquad (1.9)$$

Доказательство. Пусть характер $\chi(t)$ задан. Каждому $\lambda e + x \in \mathcal{L}$ поставим в соответствие число $\lambda + \int x(t)\,\chi(t)\, dt$. В силу ограниченности почти всюду функции $\chi(t)$ это соответствие является линейным функ-

---

[1]) В случае наличия единицы в самой L легко провести соответствующие изменения в формулировках и доказательствах приводимых ниже теорем.

ционалом в $\mathcal{L}$, причем этот функционал мультипликативен в силу равенства

$$\int (x*y)(t)\,\chi(t)\,dt = \int \left(\int x(r)\,d_r \left(\int y(s)\,d_s C(E_r, E_s, t) \right) \right) \chi(t)\,dt =$$

$$= \int x(r)\,d_r \left(\int y(s)\,d_s \left(\int C(E_r, E_s, t)\,\chi(t)\,dt \right) \right) =$$

$$= \int x(r)\,d_r \left(\int y(s)\,d_s (\chi(E_r)\,\chi(E_s) \right) = \int x(r)\,\chi(r)\,dr \int y(s)\,\chi(s)\,ds \quad (x, y \in L).$$

Полученный мультипликативный функционал порождает максимальный идеал M, очевидно, связанный с характером χ посредством формулы (1.9). Построенный идеал $M \neq L$, так как в противном случае $\chi(t) = 0$ почти всюду. Первая часть теоремы доказана.

Пусть задан максимальный идеал $M \neq L$. Соответствие $x \to x(M)$ является линейным функционалом в L. Пользуясь теоремой о виде линейного функционала в L [12], получим

$$x(M) = \int x(t)\,\chi(t)\,dt \qquad (x \in L),$$

где $\chi(t)$ некоторая в существенном ограниченная единицей (так как норма функционала $x(M)$ равна 1), функция. Эта функция удовлетворяет (1.8), так как

$$\int C(A, B, t)\,\chi(t)\,dt = (\varkappa_A * \varkappa_B)(M) = \varkappa_A(M)\,\varkappa_B(M) = \chi(A)\,\chi(B).$$

В силу $M \neq L$ $\chi(t)$ не может почти всюду совпадать с нулем, поэтому χ характер, причем χ, очевидно, связан с M посредством формулы (1.9). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы вытекает

Следствие. *Каждый характер в существенном ограничен единицей.*

Таким образом, между максимальными идеалами $M \neq L$ и характерами г. с. L установлено взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой (1.9). В дальнейшем мы часто не будем различать максимальный идеал и соответствующий ему характер. В том же случае, если различать их нам будет необходимо, условимся соответствующие друг другу максимальный идеал и характер обозначать через M, χ_M и χ, M_χ. Множество максимальных идеалов $\neq L$ (характеров) обозначим через T. Так как L сепарабельно, то T локально компактное пространство в тихоновской топологии.

Как уже отмечалось, каждая г. с. обладает по крайней мере одним характером — 1. Легко построить пример г. с., для которой 1 является единственным характером — для этого достаточно рассмотреть функцию $C(A, B, t) = m(A)\,m(B)$ $(A, B \subset [0, 1],\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, где m — лебегова мера на $[0, 1]$. Очевидно, так определенная функция будет с. мерой, причем операция умножения запишется в виде $(x*y)(t) = \int\limits_0^1 x(r)\,dr \int\limits_0^1 y(s)\,ds$. Отсутствие нетривиальных характеров в этой г. с. объясняется наличием большого радикала, состоящего из всех суммируемых функций $x(t)$, для которых $\int\limits_0^1 x(t)\,dt = 0$.

Естественно ожидать, что при сужении радикала количество нетривиальных характеров будет увеличиваться. При отсутствии радикала из теоремы 3 следует, что для любых двух множеств $A, B \in [Q]$, для которых $m(A \setminus B) + m(B \setminus A) > 0$, найдется характер χ такой, что $\chi(A) \neq \chi(B)$.

Г. с. без радикала будем называть полупростой.

§ 2. Нормальные гиперкомплексные системы

Рассмотрим специальный класс г. с., обладающий многими свойствами группового кольца компактной коммутативной группы.

1°. С. меру $C(A, B, t)$ назовем нормальной, если между точками компакта Q можно установить гомеоморфизм $t \to t^*$ такой, что $(t^*)^* = t$, $C(A, B, D) = C(D, B^*, A)$ $(A, B, D \in [Q],\ t \in Q)$[1]. Г. с., построенную по нормальной с. мере, назовем нормальной. Нормальные с. меру и г. с. назовем эрмитовыми, если $t^* = t\,(t \in Q)$.

Из этого определения немедленно заключаем, что м. мера инвариантна относительно операции *. В самом деле,

$$m(Q)\,m(E) = C(Q, E, Q) = C(Q, E^*, Q) = m(Q)\,m(E^*),$$

т. е. $m(E^*) = m(E)$ $(E \in [Q])$.

Имеет место

Л е м м а. 3. *В нормальной г. с. композиция суммируемой функции с функцией в существенном ограниченной непрерывна.*

Предварительно отметим, что для нормальной с. меры справедливо неравенство

$$C(A, B, t) \leqslant m(A) \qquad (A, B \in [Q],\ t \in Q). \tag{2.1}$$

В самом деле, при любом $D \in [Q]$ имеем

$$C(A, B, D) = C(D, A^*, B) \leqslant C(D, A^*, Q) = m(D)\,m(A^*) = \\ = m(D)\,m(A).$$

Отсюда заключаем, что (2.1) имеет место почти для всех t, а так как $C(A, B, t)$ непрерывна по t, то и для всех $t \in Q$.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть $x(t)$ произвольная суммируемая, а $f(t)$ в существенном ограниченная константой K функции.

---

[1] Мы придерживаемся обозначений, введенных на стр. 190, так что $C(A, B, D) = \int\limits_D C(A, B, t)\,dt$.

Из свойства β) с. меры следует непрерывность произведения двух ступенчатых функций. Непрерывность функции $(x*f)(t)$ будет доказана, если ее можно будет равномерно приблизить функциями $(g*h)(t)$, где g и h ступенчатые. Выберем g и h так, чтобы $\int |x(t)-g(t)|\,dt<\varepsilon$, $\int |g(t)|\,dt \leqslant \|x\|+1$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{t\in Q}|h(t)-f(t)|<\varepsilon$. Пользуясь неравенством (2.1) и абсолютной непрерывностью меры $C(A, E, t)$ (A и t фиксированы) относительно м. меры (лемма 2), получим

$$|(x*f)(t)-(g*h)(t)|\leqslant|(x*f)(t)-(g*f)(t)|+$$
$$+|(g*f)(t)-(g*h)(t)|=\left|\int [x(r)-g(r)]\,d_r\int f(s)\,d_s C(E_r, E_s, t)\right|+$$
$$+\left|\int g(r)\,d_r\int [f(s)-h(s)]\,d_s C(E_r, E_s, t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\int |x(r)-g(r)|\,d_r C(E_r, Q, t)+\varepsilon\int |g(r)|\,d_r C(E_r, Q, t)\leqslant$$
$$\leqslant K\int |x(r)-g(r)|\,dr+\varepsilon\int |g(r)|\,dr\leqslant (K+\|x\|+1)\,\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε лемма доказана.

Следствие. *Если нормальная г. с. содержит единицу, то Q состоит из конечного числа точек.*

Действительно, пусть $e(t)\in L$ единица г. с. Если $f(t)$ ограничена, то $(f*e)(t)$ в силу леммы 3 непрерывна. Поэтому каждая ограниченная функция почти всюду совпадает с непрерывной, но это, как легко видеть, возможно только тогда, когда Q состоит из конечного числа точек.

Теорема 4. *Нормальная г. с. обладает не более чем счетным числом характеров, являющихся непрерывными эрмитовыми* ($\chi(t) \doteq \overline{\chi(t^*)}$, $t\in Q$) *ортогональными друг к другу функциями.*

Доказательство. Для любых $A, B\in[Q]$ имеем

$$\chi(A)\chi(B)=\int C(A, B, t)\chi(t)\,dt=\int \chi(t)\,d_t C(A, B, E_t)=$$
$$=\int \chi(t)\,d_t C(E_t, B^*, A)=\int\limits_A (\chi*\varkappa_{B^*})(t)\,dt,$$

откуда

$$\chi(t)\,\chi(B)=(\chi*\varkappa_{B^*})(t)\qquad (B\in[Q]). \tag{2.2}$$

Непрерывность характера χ следует из этого равенства и леммы 3. Эрмитовость характера вытекает из справедливого при любом $E\in[Q]$ равенства

$$\chi(E)\int |\chi(r)|^2\,dr=\int \overline{\chi(r)}\,d_r\int C(E_r, E, t)\,\chi(t)\,dt=$$
$$=\int \overline{\chi(r)}\,d_r\int \chi(t)\,d_t C(E_r, E, E_t)=$$
$$=\int \overline{\chi(r)}\,d_r\int \chi(t)\,d_t C(E_t, E^*, E_r)=$$
$$=\int \chi(t)\,d_t\int \overline{\chi(r)}\,d_r C(E_t, E^*, E_r)=\overline{\chi(E^*)}\int |\chi(t)|^2\,dt.$$

Для доказательства ортогональности двух характеров χ и $\theta(\chi\neq\theta)$ выберем такое $B\in[Q]$, что $\chi(B)\neq\theta(B)=\overline{\theta(B^*)}$; тогда при помощи (2.2) получим

$$[\chi(B)-\overline{\theta(B^*)}]\int\chi(t)\overline{\theta(t)}\,dt=\int(\chi*\varkappa_{B^*})(t)\,\overline{\theta(t)}\,dt-$$

$$-\int(\overline{\theta}*\varkappa_B)(t)\,\chi(t)\,dt=\int\left(\int\chi(r)\,d_rC(E_r,B^*,t)\right)\overline{\theta(t)}\,dt-$$

$$-\int\left(\int\overline{\theta(r)}\,d_rC(E_r,B,t)\right)\chi(t)\,dt=\int\overline{\theta(t)}\,d_t\left(\int\chi(r)\,d_rC(E_r,B^*,E_t)\right)-$$

$$-\int\chi(t)\,d_t\left(\int\overline{\theta(r)}\,d_rC(E_r,B,E_t)\right)=\int\overline{\theta(t)}\,d_t\left(\int\chi(r)\,d_rC(E_t,B,E_r)\right)-$$

$$-\int\chi(t)\,d_t\left(\int\overline{\theta(r)}\,d_rC(E_r,B,E_t)\right)=0.$$

Нетрудно видеть, что оба последние интеграла равны друг другу, откуда следует, что $\int\chi(t)\overline{\theta(t)}\,dt=0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *М. мера в нормальной г. с. единственна.*

В самом деле, пусть кроме м. меры m имеется еще м. мера n; мера $n(E)$ абсолютно непрерывна относительно $m(E)$ (см. лемму 2), поэтому в силу теоремы Никодима [9] $n(E)=\int\limits_E n(t)\,dt$, где $n(t)$ неотрицательная суммируемая функция. Аналогично (2.2) получим $n(t)\,n(B)=(n^*\varkappa_{B^*})(t)$ $(B\in[Q])$, откуда заключаем, что $n(t)$ непрерывна, и, следовательно, ограничена. Это вместе с соотношением (1.1) показывает, что $n(t)$ характер. В силу теоремы 4 $n(t)$ и 1 ортогональны, что абсурдно, так как $n(t)\geqslant0$ $(t\in Q)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Если L нормальная г. с., то кольцо $\mathcal{L}$ симметрично, причем $(\lambda e+x(t))^*=\overline{\lambda}e+\overline{x(t^*)}$* [1].

Действительно, применяя теоремы 3 и 4, получим

$$(\overline{\lambda}e+\overline{x(t^*)})(M)=\overline{\lambda}+\int\overline{x(t^*)}\,\chi(t)\,dt=\overline{\lambda}+\int\overline{x(t)\,\chi(t)\,dt}=$$

$$=\overline{(\lambda e+x(t))\,(M)}\qquad(M\in T).$$

Следствие 3. *Для любых двух характеров χ и θ нормальной г. с. справедливо соотношение*

$$(x*\theta)(t)=\begin{cases}\chi(t)\int|\chi(t)|^2\,dt & (\chi=\theta)\\ 0 & (\chi\neq\theta),\end{cases}$$

т. е. характеры с точностью до коэфициента являются идемпотентами г. с.

[1] Напомним, что коммутативное нормированное кольцо называется симметричным, если в кольце существует инволюция $x\to x^*$ такая, что $x^*(M)=\overline{x(M)}$ для каждого максимального идеала M.

В самом деле, для любого $E \in [Q]$ имеем

$$\int_E (\chi * \theta)(t)\, dt = \int \chi(r)\, d_r \int \theta(s)\, d_s C(E_r, E_s, E) =$$

$$= \int \chi(r)\, d_r \int \theta(s)\, d_s C(E, E_r^*, E_s) = \theta(E) \int \chi(r) \overline{\theta(r)}\, dr,$$

откуда и следует утверждение.

Следствие 4. *Характеры эрмитовой г. с. вещественны.*

Следствие 5. *Характеры полупростой нормальной г. с. образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2 = L_2(Q)$.*

2°. Нормальная г. с. не обязательно является полупростой [1]), однако структура ее радикала довольно точно описывается приведенной ниже теоремой.

Назовем элемент u произвольного кольца K без единицы аннулятором, если $u * x = 0$ $(x \in K)$.

Теорема 5. *Радикал нормальной г. с. совпадает с совокупностью функций $x \in L$, для которых $x * y$ при любом $y \in L$ служит аннулятором г. с.* [2]).

Доказательство. Если $x \in L$ такова, что $x * y$ при любом $y \in L$ аннулятор, то x входит в радикал R, так как $x * x * x = 0$.

Покажем обратное включение. Пусть $z(t)$ в существенном ограниченная числом k функция; рассмотрим в L_2 оператор $S_z f = z * f$ $(f \in L_2)$. Он ограничен, так как в силу неравенства (2.1)

$$\int |(z * f)(t)|^2\, dt = \int \left| \int z(r)\, d_r \int f(s)\, d_s C(E_r, E_s, t) \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant k^2 \int \left| \int f(s)\, d_s C(Q, E_s, t) \right|^2 dt \leqslant m(Q) k^2 \left[\int |f(s)|\, ds \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant k^2 m^2(Q) \int |f(s)|^2\, ds \qquad (f \in L_2).$$

Сопряженный оператор S_z^* к S_z равен S_{z^*}. В самом деле, при $f, g \in L_2$

$$\int (z * f)(t) \overline{g(t)}\, dt = \int \left(\int z(r)\, d_r \int f(s)\, d_s C(E_r, E_s, t) \right) \overline{g(t)}\, dt =$$

$$= \int z(r)\, d_r \left(\int f(s)\, d_s \int \overline{g(t)}\, d_t C(E_r, E_s, E_t) \right) =$$

$$= \int z(r)\, d_r \int f(s)\, d_s \int \overline{g(t)}\, d_t C(E_t, E_r^*, E_s) = \int f(s) \overline{(z^* * g)}(s)\, ds.$$

Из соотношения $z * z^* * f = z^* * z * f$ заключаем, что S_z нормальный оператор.

Если $z(t) \in R$ в существенном ограничена, то спектр оператора S_z состоит из нуля.

---

[1]) См. пример на стр. 192.

[2]) Идея доказательства этой теоремы заимствована нами в [13].

Действительно, так как $z \in R$, то при $\lambda \neq 0$ существует элемент $(z-\lambda e)^{-1}$. Положим $(z-\lambda e)^{-1}=r-\frac{1}{\lambda}e$, где $r \in \mathcal{L}$. Имеем

$$e=(z-\lambda e)*\left(r-\frac{1}{\lambda}e\right)=z*r-\frac{1}{\lambda}z-\lambda r+e,$$

откуда $r=\frac{1}{\lambda}\left(r*z-\frac{1}{\lambda}z\right)$. Из этого соотношения заключаем, что $r \in L$. Более того, в силу леммы 3 $r(t)$ в существенном ограниченная функция, и поэтому оператор S_r $(S_r f=r*f,\ f \in L_2)$ непрерывен в L_2. Очевидно, $(S_z-\lambda E)^{-1}=S_r-\frac{1}{\lambda}E$. Таким образом, спектр S_z состоит из нуля и так как S_z нормален, то $S_z=0$, т.е. $z*f=0$ для любого $f \in L_2$. В силу плотности L_2 в L по норме L это равенство имеет место для всех $f \in L$, т.е. z аннулятор г.с. Пусть теперь $x \in R$ произвольно. Если $y(t)$ ограниченная функция, то $z=x*y \in R$ и непрерывна; поэтому в силу доказанного $x*y*f=z*f=0$ при любом $f \in L$. Для завершения доказательства достаточно отметить, что ограниченные функции плотны в L.

Следствие (критерий полупростоты нормальной г. с.). *Для того чтобы нормальная г. с. была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала отличных от нуля аннуляторов.*

3°. Пусть L полупростая нормальная г. с., как уже указывалось, система ее характеров ортогональна и полна в L_2. Введем обозначение

$$\mu_\chi=\left(\int|\chi(t)|^2\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

система функций $\chi(t)\mu_\chi$ $(\chi \in T)$ ортонормированная и полная. Отметим следующую формулу разложения с. меры в ряд по характерам:

$$C(A,B,t)=\sum_\chi\int C(A,B,t)\overline{\chi(t)}\,dt\,\chi(t)\mu_\chi^2=\sum_\chi\overline{\chi(A)}\,\overline{\chi(B)}\,\chi(t)\mu_\chi^2.$$

В силу неравенства Бесселя этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

§ 3. Нормальные гиперкомплексные системы с базисной единицей

1°. Будем говорить, что нормальная г. с. обладает базисной единицей o (б. е.), если существует такая точка $o \in Q$, что $C(A,B,o)=$ $=m(A^*\cap B)$ $(A, B \in [Q])$.

Нетрудно проверить, что для г. с. конечного ранга рассматриваемый случай будет соответствовать тому, что существует единица o г. с., лежащая в ее базисе.

Следующая теорема показывает, что на нормальные г. с. с б. е. переносится известный факт полупростоты г. с. конечного ранга с единицей.

Теорема 6. *Нормальная г. с. с б. е. полупростая.*

Доказательство теоремы базируется на лемме.

Лемма 4. *В нормальной г. с. с б. е. существует последовательность $e_n(t)$ $(n=1, 2,\ldots)$ суммируемых функций таких, что $\|e_n\|=1$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $x * e_n$ слабо сходится к x для любого $x \in L$.*

Для доказательства леммы положим $e_n(t)=\dfrac{\varkappa_{U_n}(t)}{m(U_n)}$, где $U_n (n=1,2,\ldots)$ последовательность сфер в Q, стягивающихся к б. е. o; очевидно $\|e_n\|=1$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть $l(x)=\int x(t)\, f(t)\, dt$ $(x \in L,\ \operatorname{vrai}\max\limits_{t \in Q} |f(t)|=\|l\|<\infty)$ некоторый линейный функционал в L, положим $l_n(x)=l(x * e_n)$ $(n=1,2,\ldots, x \in L)$; очевидно l_n $(n=1,2,\ldots)$ являются линейными функционалами в L. Нам нужно доказать, что $l_n(x)=l(x * e_n) \to l(x)$ $(x \in L)$, т. е. установить слабую сходимость l_n к l. Так как очевидно $\|l_n\| \leqslant \|l\|$ $(n=1,2,\ldots)$, то достаточно проверить соотношение $l_n(x) \to l(x)$ для некоторого множества функций $x(t) \in L$, линейная оболочка которого плотна в L, например, для характеристических функций. Итак, пусть $\varkappa_A$ характеристическая функция множества $A \in [Q]$. Имеем

$$\int (\varkappa_A * e_n)(t)\, f(t)\, dt=\frac{1}{m(U_n)} \int f(t)\, d_t C(A, U_n, E_t)=$$

$$=\frac{1}{m(U_n)} \int f(t)\, d_t C(E_t, A^*, U_n)=\frac{1}{m(U_n)} \int\limits_{U_n} (f * \varkappa_{A^*})(t)\, dt.$$

В силу леммы 3 $(f * \varkappa_{A^*})(t)$ непрерывна по t, поэтому

$$l_n(\varkappa_A)=\int (\varkappa_A * e_n)(t)\, f(t)\, dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (f * \varkappa_{A^*})(o)=$$

$$=\int f(t)\, d_t\, C(E_t, A^*, o)=\int f(t)\, d_t m(E_t \cap A)=f(A)=l(\varkappa_A). \qquad (3.1)$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. В силу критерия полупростоты нормальной г. с. достаточно показать, что она не содержит отличных от нуля аннуляторов. Предположим противное, пусть $x \neq 0$ аннулятор. По теореме Гана найдется функционал $l \in L^*$ такой, что $l(x) \neq 0$. Вместе с тем в силу леммы 4 $l(x)=\lim\limits_{n \to \infty} l(x * e_n)=0$. Теорема доказана.

Следствие. *Система характеров нормальной г. с. с б. е. полна в L_2.*

Сейчас мы покажем, что б. е. можно по существу рассматривать как некоторое „граничное условие", налагаемое на систему характеров. Сказанное приобретает точный смысл для г. с., связанных с диференциальными уравнениями — в этом случае характерами будут собственные функции некоторых краевых задач.

Теорема 7. *Для того чтобы точка $o \in Q$ была базисной единицей нормальной г. с., необходимо и достаточно, чтобы система характеров была полна в L_2 и $\chi(o) = 1$ для каждого характера.*

Доказательство. Пусть г. с. нормальна и имеет б. е. o, а $\chi \in T$. Выберем такое $A \in [Q]$, чтобы $\chi(A) \neq 0$. Тогда, воспользовавшись соотношением (2.1), получим

$$\chi(A) \lim_{n\to\infty} \frac{\chi(U_n)}{m(U_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(U_n)} \int C(A, U_n, t)\, \chi(t)\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (\varkappa_A * e_n)(t)\, \chi(t)\, dt = \chi(A).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{m(U_n)} \displaystyle\int_{U_n} \chi(t)\, dt = 1$. Так как $\chi(t)$ непрерывна, то $\chi(o) = 1$. Полнота системы характеров в L_2 следует из теоремы 6.

Наоборот, пусть L нормальная г. с., а точка $o \in Q$ такова, что $\chi(o) = 1$ для каждого $\chi \in T$, причем система характеров полна в L_2. Для любых $B, D \in [Q]$ имеем

$$\int_D (\chi * \varkappa_B)(t)\, dt = \int \chi(r)\, d_r C(E_r, B, D) = \int \chi(r)\, d_r C(D, B^*, E_r) = \chi(B^*)\, \chi(D).$$

Так как $(\chi * \varkappa_B)(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны, то из произвольности $D \in [Q]$ заключаем, что

$$(\chi * \varkappa_B)(o) = \chi(B^*)\, \chi(o) = \chi(B^*). \tag{3.2}$$

В силу соотношения (2.1) производная $C(E, B, o)$ ($E \in [Q]$, B — фиксировано) по мере $m(E)$ ограничена единицей. Поэтому существует неотрицательная ограниченная единицей функция $C(t)$ ($t \in Q$) такая, что $C(E, B, o) = \displaystyle\int_E C(t)\, dt$ ($E \in [Q]$). Применяя (3.2), получим для каждого $\chi \in T$

$$\int [C(t) - \varkappa_{B^*}(t)]\, \chi(t)\, dt = \int \chi(t)\, C(t)\, dt - \chi(B^*) =$$

$$= \int \chi(t)\, d_t C(E_t, B, o) - \chi(B^*) = (\chi * \varkappa_B)(o) - \chi(B^*) = 0.$$

Так как $C(t) - \varkappa_{B^*}(t) \in L_2$, а система характеров полна в L_2, то почти везде $C(t) = \varkappa_{B^*}(t)$. Поэтому для любого $A \in [Q]$

$$C(A, B, o) = \int_A C(t)\, dt = \int_A \varkappa_{B^*}(t)\, dt = \int_{A^*} \varkappa_B(t)\, dt = m(A^* \cap B).$$

Теорема доказана.

2°. Известная теорема об абсолютной сходимости тригонометрического ряда ограниченной функции с неотрицательными коэфициентами Фурье переносится на случай разложения по характерам нормальной г. с. с б. е. при помощи метода Рисса-Райкова [4, 3].

Теорема 8. *Если коэфициенты Фурье в существенном ограниченной функции при ее разложении по характерам нормальной г. с. с б. е. неотрицательны, то ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ в существенном ограниченная функция с неотрицательными коэфициентами Фурье. Рассмотрим в L функционал $F(x)=\int x(t)\varphi(t)\,dt$. Для каждой $x\in L_2$ имеем

$$F(x*x^*)=\int\Big[\sum_\chi\int(x*x^*)(t)\,\chi(t)\,dt\,\overline{\chi(r)}\,\mu_\chi^2\Big]\varphi(r)\,dr=$$
$$=\sum_\chi\Big|\int x(t)\,\chi(t)\,dt\Big|^2\int\varphi(r)\overline{\chi(r)}\,dr\,\mu_\chi^2\geqslant 0.$$

В силу непрерывности F в L это соотношение имеет место для каждой $x\in L$. Введем по F в L скалярное произведение, полагая $(x,y)_1=F(x*y^*)$ $(x,y\in L)$. Неравенство Буняковского примет вид $|F(x*y^*)|^2\leqslant F(x*x^*)\;F(y*y^*)$ $(x,y\in L)$, полагая здесь $y=e_n^*$, где функции e_n $(n=1,2,\ldots)$ взяты из леммы 4, получим

$$|F(x*e_n)|^2\leqslant F(x*x^*)\,F(e_n*e_n^*)\leqslant F(x*x^*)\|F\|.$$

Переходя здесь к пределу по $n\to\infty$ и применяя лемму 4, получим

$$|F(x)|^2\leqslant\|F\|F(x*x^*)\qquad(x\in L).\tag{3.3}$$

Доопределим функционал F на кольцо $\mathcal{L}$ равенством $F(\lambda e+x)=\lambda\|F\|+F(x)$. В силу (3.3) этот функционал будет позитивен в кольце $\mathcal{L}$. Применяя теорему Райкова о представлении позитивных функционалов в кольце [3], получим

$$F(x)=\int_T x(M)\,d\Phi(M)=\sum_\chi x(M_\chi)\,\Phi(M_\chi),$$

где $\Phi(M_\chi)$ неотрицательные константы, причем $\sum_\chi\Phi(M_\chi)<\infty$.

Отсюда

$$\int x(t)\varphi(t)\,dt=\sum_\chi x(M_\chi)\,\Phi(M_\chi)=\sum_\chi\int x(t)\,\chi(t)\,dt\,\Phi(M_\chi)=$$
$$=\int x(t)\Big(\sum_\chi\chi(t)\,\Phi(M_\chi)\Big)dt.$$

Так как $x(t)$ произвольная суммируемая функция, то почти всюду $\varphi(t)=\sum_\chi\chi(t)\,\Phi(M_\chi)$. Теорема доказана.

§ 4. Четная подсистема нормальной гиперкомплексной системы

В настоящем параграфе мы покажем, что всякая нормальная г. с. содержит некоторое подкольцо, являющееся эрмитовой г. с., которую мы называем четной подсистемой. Четная подсистема в известной степени описывает саму нормальную г. с.

Пусть $L(Q)$ нормальная неэрмитовая г. с.; назовем функцию $x(t) \in L(Q)$ четной, если $x(t^*) = x(t)$ почти везде. Покажем, что совокупность $H(Q)$ всех четных функций образует замкнутое подкольцо кольца $L(Q)$. Для этого нужно лишь проверить, что композиция $x * y$ двух четных функций x и y есть четная функция. Предварительно покажем, что из нормальности г. с. следует соотношение

$$C(A, B, D) = C(A^*, B^*, D^*) \qquad (A, B, D \in [Q]). \tag{4.1}$$

Действительно, $C(A, B, D) = C(D, B^*, A) = C(B^*, D, A) = C(A, D^*, B^*) = C(D^*, A, B^*) = C(B^*, A^*, D^*) = C(A^*, B^*, D^*)$.

Пользуясь (4.1), проверяем

$$\int_{D^*} (x * y)(t)\, dt = \int x(r)\, d_r \int y(s)\, d_s C(E_r, E_s, D^*) =$$

$$= \int x(r)\, d_r \int y(s)\, d_s C(E_r^*, E_s^*, D) =$$

$$= \int x(r^*)\, d_r \int y(s^*)\, d_s C(E_r, E_s, D) = \int_D (x * y)(t)\, dt \qquad (D \in [Q]).$$

Утверждение доказано.

Введенное подкольцо $H(Q)$ можно рассматривать как некоторую г. с. Для этого введем в рассмотрение компакт $\mathbf{Q}$, получаемый из компакта Q отождествлением точек t и t^* $(t \in Q)$ в класс $\mathbf{t} \in \mathbf{Q}$. Полные прообразы множеств $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \ldots \in [\mathbf{Q}]$ при отображении $t \to \mathbf{t}$ $(t \in Q, \mathbf{t} \in \mathbf{Q}, t \in \mathbf{t})$ будем обозначать через $A, B, E, \ldots \in [Q]$; очевидно, что $A, B, E, \ldots$ инвариантны относительно $*$. Введем меру $\mathbf{m}$ на $\mathbf{Q}$ соотношением $\mathbf{m}(\mathbf{E}) = m(E)$ $(\mathbf{E} \in [\mathbf{Q}])$, интегрирование по этой мере будем обозначать посредством $\int \ldots d\mathbf{t}$. Очевидно, что каждая функция $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in L(\mathbf{Q})$ порождает четную функцию $x(t) \in L(Q)$ и, наоборот, причем

$$\int_{\mathbf{E}} \mathbf{x}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \int_E x(t)\, dt.$$

Из изложенного легко следует, что композиция двух функций из $H(Q)$ может быть записана в виде

$$(x * y)(\mathbf{t}) = \int x(\mathbf{r})\, d_{\mathbf{r}} \left(\int y(\mathbf{s})\, d_{\mathbf{s}} \mathbf{C}(\mathbf{E}_{\mathbf{r}}, \mathbf{E}_{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) \right),$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{t})$ — с. мера, определяемая равенством

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{t}) = C(A, B, t) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(t) \tag{4.2}$$

$$(t \in \mathbf{t};\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in [\mathbf{Q}],\ \mathbf{t} \in \mathbf{Q}).$$

Таким образом, подкольцо $H(Q)$ можно рассматривать как некоторую г. с. $L(\mathbf{Q})$, базисом которой служит компакт $\mathbf{Q}$. Полученная г. с. эрмитова, это следует из очевидно вытекающего из (4.2) равенства

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}) = \overline{C(A, B, D)} \qquad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D} \in [\boldsymbol{Q}])$$

и соотношения $B^* = B$.

Кольцо $H(Q)$, или, что то же, г. с. $L(\boldsymbol{Q})$, будем называть четной подсистемой г. с. $L(Q)$. Имеет место

Теорема 9. *Система характеров четной подсистемы $H(Q$ состоит из совокупности функций* $\mathrm{Re}\,\chi(t)$, *где χ пробегают систему характеров г. с. $L(Q)$. Если г. с. $L(Q)$ полупростая* (с б. е.), *то и четная подсистема $H(Q)$ полупростая* (с б. е.). *Наоборот, если $H(Q)$ полупростая* (с б. е.) *и $x * x \neq 0$ при $x \in L(Q)$, $\boldsymbol{x} \neq 0$, то и $L(Q)$ полупростая.*

Доказательство. Предварительно покажем, что при $x \in H(Q)$

$$\int x(t) \,\mathrm{Re}\,\chi(t)\, dt = \int x(t) \chi(t)\, dt \qquad (\chi \in T). \tag{4.3}$$

Действительно, это равенство достаточно доказать для вещественной $\boldsymbol{x}(t) \in H(Q)$; но для таких функций оно следует из соотношения

$$\int x(t) \chi(t)\, dt = \int x(t^*) \chi(t^*)\, dt = \overline{\int x(t) \chi(t)\, dt} \qquad (\chi \in T).$$

Из (4.3) вытекает, что каждая функция

$$\mathrm{Re}\,\chi(t) = \frac{1}{2}[\chi(t) + \chi(t^*)] \in H(Q) \qquad (\chi \in T)$$

является характером г. с. $L(\boldsymbol{Q})$. В самом деле, замечая, что

$$\int C(A, B, t) \chi(t^*)\, dt = \chi(A^*) \chi(B^*),$$

получим

$$\int \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{t}) \,\mathrm{Re}\,\chi(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t} = \frac{1}{2} \int C(A, B, t) \chi(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int C(A, B, t) \chi(t^*)\, dt = \frac{1}{2} \chi(A) \chi(B) + \frac{1}{2} \chi(A^*) \chi(B^*) =$$

$$= \chi(A) \chi(B) = \mathrm{Re}\,\chi(A)\,\mathrm{Re}\,\chi(B) = \mathrm{Re}\,\chi(A)\,\mathrm{Re}\,\chi(\boldsymbol{B}),$$

так как $\varkappa_A, \varkappa_B \in H(Q)$.

Наоборот, покажем, что каждый характер $\varphi(\boldsymbol{t})$ г. с. $L(\boldsymbol{Q})$ представим в виде $\varphi(\boldsymbol{t}) = \mathrm{Re}\,\chi(\boldsymbol{t})$ $(\chi \in T,\ t \in \boldsymbol{t})$. Для этого заметим, что в силу одной теоремы Г. Е. Шилова [3] максимальный идеал кольца $H(Q)$, соответствующий характеру φ, как максимальный идеал симметрического подкольца $\mathcal{L}(Q)$, может быть расширен до некоторого максимального идеала M кольца $\mathcal{L}(Q)$; при этом очевидно $M \neq L(Q)$. Иными словами, существует такой характер $\chi(t)$ г. с. $L(Q)$, что для каждой $\boldsymbol{x}(t) \in H(Q)$ имеем

$$\int x(t) \chi(t)\, dt = \int x(t) \varphi(t)\, dt.$$

При помощи равенства (4.3) отсюда заключаем, что

$$\int x(t)\varphi(t)\,dt=\int x(t)\operatorname{Re}\chi(t)\,dt \qquad (x\in H(Q)),$$

что и требовалось.

Далее, из (4.3) очевидно, что если $L(Q)$ полупростая (с б. е.), то и $L(\boldsymbol{Q})$ полупростая (с б. е.).

Пусть теперь г. с. $L(\boldsymbol{Q})$ полупростая, причем $x*x\neq 0$ ($x\in L(Q)$, $x\neq 0$), докажем, что и $L(Q)$ полупростая. Предположим противное, пусть $x\neq 0$ принадлежит радикалу г. с. $L(Q)$. Замечая, что $x(t)+x(t^*)\in H(Q)$ и применяя (4.3), получим

$$\int[x(t)+x(t^*)]\operatorname{Re}\chi(t)\,dt=\int[x(t)+x(t^*)]\chi(t)\,dt=$$

$$=\int x(t)\,\chi(t)\,dt+\int x(t)\,\overline{\chi(t)}\,dt=0 \qquad (\chi\in T).$$

Так как по доказанному функции $\operatorname{Re}\chi(t)$ ($\chi\in T$) образуют систему характеров полупростой г. с. $L(\boldsymbol{Q})$, то почти везде

$$x(t)=-x(t^*). \tag{4.4}$$

С другой стороны в силу равенства

$$\int x(r)\,d_r\int x(s^*)\,d_s\,C(E_r,E_s,D^*)=\int x(r)\,d_r\int x(s^*)\,d_s\,C(E_r^*,E_s^*,D)=$$

$$=\int x(r^*)\,d_r\int x(s)\,d_s\,C(E_r,E_s,D) \qquad (D\in[Q])$$

заключаем, что $x(t)*x(t^*)\in H(Q)$, так как $x(t)*x(t^*)$ аннулятор г. с. $L(Q)$, (см. теорема 5) и тем более г. с. $L(\boldsymbol{Q})$, то в силу полупростоты $L(\boldsymbol{Q})$ и следствия теоремы 5 $x(t)*x(t^*)=0$. Из полученного соотношения и (4.4) заключаем, что $x*x=0$, что абсурдно.

Пусть теперь г. с. $L(\boldsymbol{Q})$ имеет б. е., причем $x*x\neq 0$ ($x\in L(Q)$, $x\neq 0$); докажем, что и $L(Q)$ имеет б. е. Обозначим через $\boldsymbol{o}$ б. е. г. с. $L(\boldsymbol{Q})$ и пусть $o\in\boldsymbol{o}$. Тогда для каждого $\chi\in T$ $\operatorname{Re}\chi(o)=1$ (см. теор. 7), поэтому

$$|\chi(o)|^2=[\operatorname{Re}\chi(o)]^2+[\operatorname{Im}\chi(o)]^2\geqslant 1,$$

что вместе с неравенством $|\chi(o)|\leqslant 1$ показывает, что $\operatorname{Im}\chi(o)=0$, т. е. $\chi(o)=1$ ($\chi\in T$). С другой стороны, так как $L(\boldsymbol{Q})$ полупростая и $x*x\neq 0$, то по доказанному и $L(Q)$ полупростая; для доказательства утверждения осталось применить теорему 7.

Теорема доказана.

Представляется интересным выяснить, можно ли каждую эрмитову г. с. рассматривать как четную подсистему некоторой нормальной г. с. Авторы не знают ответа на этот вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Континуальные алгебры, ДАН, LXXII : 1 (1950).

2. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Некоторые классы континуальных алгебр, ДАН, LXXII : 2 (1950).

3. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. 1 : 2 (12) (1948).

4. Д. А. Райков, Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, XIV (1945).

5. Б. М. Левитан, Нормированные кольца, порожденные обобщенной операцией сдвига, ДАН, XLVII : 1 (1945).

6. А. Я. Повзнер, Об уравнениях типа Штурма-Лиувилля и позитивных функциях, ДАН, XLIII : 9 (1944).

7. Ю. М. Березанский, Гиперкомплексные системы с компактным и дискретным базисом. (Диссертация, Киев, 1950).

8. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том V, М.—Л., 1947.

9. С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949 г.

10. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, т. III : 1 (23), (1948).

11. А. А. Марков, On mean values and exterior densities, Матем. сб. 4 (46) : 1 (1938).

12. С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

13. J. Segal, The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc., 61 : 1 (1947).

14. Ю. М. Березанский, О центре группового кольца компактной группы, ДАН, LXXII : 5 (1950).

Поступила 19.XII 1950.

Киев.