К теории локально простых и локально центральных алгебр

А. Г. Курош

Алгебра V над полем P называется *локально конечной,* если всякое конечное множество элементов из V порождает подалгебру конечного ранга. Алгебра V называется *локально простой,* если всякое конечное множество ее элементов содержится в простой подалгебре конечного ранга. Далее, алгебра V с единицей называется *локально простой и локально центральной,* если всякое конечное множество элементов из V содержится в подалгебре конечного ранга, простой и центральной (т. е. нормальной); ясно, что алгебра V сама будет в этом случае и простой, и центральной. Наконец, алгебра V с единицей называется *локально матричной,* если всякое конечное множество ее элементов содержится в подалгебре, изоморфной полной матричной алгебре некоторого конечного порядка над основным полем P.

Настоящая работа примыкает к работе автора [1] и работе В. М. Курочкина [2]. В § 1 снимается возникший в связи с работой [1] вопрос о том, составляют ли локально простые и локально центральные алгебры в действительности более узкий класс алгебр, чем локально конечные алгебры, простые и центральные в целом. Параграф 2 содержит отрицательное решение одной проблемы, поставленной в работе [2]. Наконец, в § 3 доказывается один частный результат, относящийся к трудному вопросу о подалгебрах локально матричных алгебр.

§ 1

Т е о р е м а 1. *Над всяким полем P существует локально конечная алгебра счетного ранга, простая и центральная в целом, не являющаяся локально простой и локально центральной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим алгебру V, являющуюся объединением возрастающей последовательности V_n, $n=1, 2, \ldots,$ алгебр конечного ранга; *алгебра V будет поэтому локально конечной и счетного ранга.* В качестве алгебры V_n берем прямую сумму двух полных матричных алгебр A_n и B_n над полем P соответственно порядков s_n и t_n, причем эти порядки должны быть взаимно простыми,

$$(s_n, \ \ t_n) = 1. \tag{1}$$

Кроме того, должны выполняться равенства

$$s_{n+1}=s_n+t_n,\ t_{n+1}=s_n+2t_n. \tag{2}$$

Существование последовательностей натуральных чисел s_n и t_n, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), при любых исходных s_1 и t_1, подчиненных условию (1), проверяется без всяких затруднений.

Определим вложение алгебры V_n в алгебру V_{n+1}, $n=1, 2, \ldots$. Алгебра A_{n+1}, являющаяся алгеброй матриц порядка s_{n+1}, содержит подалгебру V'_n, изоморфную алгебре V_n, причем единицы алгебр A_{n+1} и V'_n совпадают. Действительно, те матрицы порядка s_{n+1}, которые могут иметь отличные от нуля элементы лишь на пересечении первых s_n строк и первых s_n столбцов, составляют в алгебре A_{n+1} подалгебру A'_n, являющуюся алгеброй матриц порядка s_n, т. е. изоморфную алгебре A_n. С другой стороны, те матрицы порядка s_{n+1}, отличные от нуля элементы которых могут стоять лишь на пересечении последних t_n строк и последних t_n столбцов, составляют в алгебре A_{n+1} подалгебру B'_n, изоморфную алгебре B_n. Подалгебра V'_n алгебры A_{n+1}, порожденная подалгебрами A'_n и B'_n, будет прямой суммой последних, т. е. будет изоморфной алгебре V_n. Очевидно, что подалгебра V'_n содержит единицу алгебры A_{n+1}.

Рассмотрим теперь алгебру B_{n+1}, являющуюся полной матричной алгеброй порядка t_{n+1}. Те матрицы порядка t_{n+1}, отличные от нуля элементы которых могут стоять лишь на пересечении первых s_n строк и первых s_n столбцов, составляют подалгебру A''_n, изоморфную алгебре A_n. С другой стороны, все матрицы порядка t_{n+1}, в которых отличные от нуля элементы могут стоять лишь на пересечении последних $2t_n$ строк и последних $2t_n$ столбцов, составляют матричную алгебру порядка $2t_n$. В ней можно выбрать, как известно, центральную матричную подалгебру B''_n порядка t_n, изоморфную алгебре B_n. Подалгебры A''_n и B''_n составляют в алгебре B_{n+1} прямую сумму V''_n, изоморфную алгебре V_n, причем снова единицы алгебр V''_n и B_{n+1} совпадают.

Подалгебры

$$V'_n=A'_n+B'_n,\quad V''_n=A''_n+B''_n$$

алгебры V_{n+1} изоморфны между собой, причем существует такой изоморфизм φ, при котором A'_n отображается на A''_n, B'_n — на B''_n. Суммы элементов подалгебр V'_n и V''_n, соответствующих друг другу при изоморфизме φ, составляют в алгебре V_{n+1} подалгебру, изоморфную с V_n. Отождествляя ее с V_n, мы определим *вложение алгебры V_n в алгебру V_{n+1}*.

Заметим, что единица алгебры V_n является суммой единиц алгебр V'_n и V''_n, т. е. суммой единиц алгебр A_{n+1} и B_{n+1}, и поэтому совпадает с единицей алгебры V_{n+1}. *Предельная алгебра V обладает, следовательно, единицей.*

Пусть

$$e',\ \overline{e}',\ e'',\ \overline{e}'' \tag{3}$$

будут соответственно единицы подалгебр A_n', B_n', A_n'', B_n''. Так как эти подалгебры составляют в алгебре V_{n+1} прямую сумму, то элементы (3) линейно независимы над полем P. Единицами подалгебр V_n' (т. е. A_{n+1}), V_n'' (т. е. B_{n+1}), $A_n = A_n' + A_n''$, $B_n = B_n' + B_n''$ и V_n (т. е. V_{n+1}) будут соответственно служить элементы

$$e' + \overline{e}',\ \ e'' + \overline{e}'',\ \ e' + e'',\ \ \overline{e}' + \overline{e}'',\ \ e' + \overline{e}' + e'' + \overline{e}'' = 1.$$

Так как центр алгебры V_{n+1} является прямой суммой центров алгебр A_{n+1} и B_{n+1}, то он состоит из элементов вида

$$\alpha(e' + \overline{e}') + \beta(e'' + e''), \qquad \alpha, \beta \subset P.$$

С другой стороны, центр алгебры V_n является прямой суммой центров алгебр A_n и B_n, т. е. состоит из элементов вида

$$\gamma(e' + e'') + \delta(\overline{e}' + \overline{e}''), \qquad \gamma, \delta \subset P.$$

Отсюда вытекает, ввиду линейной независимости элементов (3), что лишь элементы вида $\alpha \cdot 1$, $\alpha \subset P$, входят в пересечение центров алгебр V_n и V_{n+1}, а поэтому *предельная алгебра V будет центральной.*

Пусть алгебра V обладает нетривиальным идеалом D. Существует такое n, что пересечение $D \cap V_n$ отлично и от нуля, и от V_n. Тогда и пересечение $D \cap V_{n+1}$ будет отличным как от нуля, так и от V_{n+1}; ясно также, что

$$(D \cap V_n) \subseteq (D \cap V_{n+1}).$$

Однако алгебра V_n, как прямая сумма двух простых алгебр, обладает лишь двумя нетривиальными идеалами, а именно A_n и B_n. Аналогично алгебра V_{n+1} также обладает лишь двумя нетривиальными идеалами A_{n+1} и B_{n+1}. Однако ни одна из подалгебр A_n, B_n не содержится целиком ни в A_{n+1}, ни в B_{n+1}. Отсюда вытекает, что *алгебра V будет простой.*

Пусть, наконец, алгебра V обладает центральной простой подалгеброй W конечного ранга r^2, $r \geqslant 1$. Существует такое n, что

$$W \subset V_n = A_n + B_n.$$

Так как подалгебра W содержит единицу алгебры V, то ее компоненты в A_n и в B_n отличны от нуля и даже содержат единицы этих прямых слагаемых. Отсюда, ввиду простоты алгебры W, следует, что ее компоненты изоморфны ей самой. Таким образом, полная матричная алгебра A_n ранга s_n^2 содержит центральную простую подалгебру ранга r^2, откуда, как известно, следует, что s_n делится на r. Аналогично и t_n делится на r, т. е. ввиду условия (1), будет $r=1$. Мы доказали, что *алгебра V не содержит отличных от основного поля P центральных простых подалгебр конечного ранга и поэтому не может быть локально простой и локально центральной.*

Локально простая и локально центральная алгебра V над полем P называется *примарной по простому числу* p, если ранг ее всякой простой центральной подалгебры конечного ранга является степенью числа p. Известно, что всякая локально простая и локально центральная алгебра счетного ранга и, вообще, всякая алгебра, разложимая в прямое произведение конечных простых и центральных алгебр, является прямым произведением примарных алгебр, относящихся к различным простым числам. В. М. Курочкин [2] поставил вопрос о справедливости этого утверждения для любых локально простых и локально центральных алгебр. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Над всяким полем* P *существует локально матричная алгебра, которая не может быть разложена в прямое произведение примарных подалгебр.*

Доказательство. Обозначим через A алгебру над полем P, являющуюся прямым произведением полных матричных алгебр простых порядков, по одной для каждого простого числа p. Как известно (см. Курош [1], теорема 10), в алгебре A содержится истинная подалгебра A', изоморфная самой A, причем единицы алгебр A и A' совпадают. Для дальнейшего заметим, что ни для какого простого числа p алгебра A не содержит подалгебры, содержащей единицу алгебры A и разложимой в прямое произведение двух матричных алгебр порядка p: эта подалгебра содержалась бы уже в произведении конечного числа множителей исходного прямого разложения алгебры A, но тогда произведение нескольких различных простых чисел должно было бы делиться на p^2.

Рассмотрим теперь алгебры A_α, изоморфные алгебре A, причем индекс α пробегает все порядковые числа не более чем счетной мощности. Алгебры A_α будут составлять возрастающую последовательность, если мы следующим образом определим последовательные вложения этих алгебр друг в друга. Алгебра A_1 вкладывается в алгебру A_2 так же, как выше подалгебра A' была вложена в алгебру A. Пусть алгебры A_β для всех β, $\beta < \alpha$ уже составляют возрастающую последовательность, причем единицы этих алгебр совпадают. Если число $\alpha-1$ существует, то вкладываем алгебру $A_{\alpha-1}$ в алгебру A_α так же, как подалгебра A' вложена в алгебру A. Если же число α предельное, то рассмотрим объединение B_α возрастающей последовательности алгебр A_β, $\beta < \alpha$. Это будет локально матричная алгебра счетного ранга, т. е. прямое произведение матричных алгебр простых порядков. Для каждого простого числа p в это прямое разложение алгебры B_α должен входить множитель, являющийся матричной алгеброй порядка p, причем только один: если бы входило прямое произведение двух таких множителей, то оно содержалось бы уже в некотором A_β, что, однако, невозможно, так как A_β изоморфно A. Этим доказано, что алгебра B_α сама изоморфна алгебре A и поэтому может быть изоморфно отображена на алгебру A_α. Таким путем определяется вложение в алгебру A_α всех алгебр A_β, $\beta < \alpha$.

Алгебры A_α для всех порядковых чисел α не более чем счетной мощности теперь уже составляют возрастающую последовательность. Обозначим ее объединение через V. Это будет локально матричная алгебра несчетного ранга, причем *она не может разлагаться в прямое произведение примарных локально матричных подалгебр, относящихся к различным простым числам.* В самом деле, если бы такое разложение существовало, то хотя бы один из множителей, относящийся, например, к простому числу p, имел бы несчетный ранг, а поэтому содержал бы над своим центром P прямое произведение двух полных матричных подалгебр порядка p. Это прямое произведение уже лежало бы тогда в одной из алгебр A_α, что, однако, невозможно.

Прямое произведение $V \times V$ также нельзя разложить в прямое произведение примарных локально матричных подалгебр, относящихся к различным простым числам. В самом деле, для этого случая можно повторить все доказательство, проведенное выше, начиная, однако, не с алгебры A, а с $A \times A$ и учитывая, что алгебра $A \times A$ ни для одного простого p не содержит прямого произведения *трех* полных матричных алгебр порядка p. Отсюда вытекает, что *алгебра V вообще не разлагается в прямое произведение примарных локально простых и локально центральных алгебр:* если бы такое разложение существовало, то, беря прямое произведение алгебры V на алгебру, ей инверсно изоморфную — эта алгебра изоморфна самой алгебре V, — мы получили бы для алгебры $V \times V$ разложение в прямое произведение примарных локально матричных подалгебр, что, однако, как сказано выше, невозможно. Теорема доказана.

Алгебра V, построенная выше над произвольным полем P, является еще одним примером локально матричной алгебры, которая не может быть разложена в прямое произведение простых центральных алгебр конечного ранга. Первые примеры алгебр с этим свойством были указаны в работе автора [1]. Там, однако, на основное поле P накладывалось одно ограничение — оно не должно было быть абсолютно алгебраическим полем конечной характеристики — и, кроме того, рассматривались лишь разложения в прямое произведение матричных алгебр конечного порядка.

§ 3

Всякая подалгебра локально матричной алгебры будет, понятно, локально конечной. Пока не установлено, можно ли всякую локально конечную алгебру изоморфно вложить в некоторую локально матричную алгебру, хотя такое обобщение классической теоремы о вложении алгебр конечного ранга в матричные алгебры было бы вполне естественным [1]. Еще в работе [1] было отмечено, что в локально матричную алгебру можно вложить любую локально простую и локально централь-

[1] В самое последнее время В. М. Курочкин сообщил автору пример, дающий отрицательный ответ на этот вопрос. (Замечание при корректуре).

ную алгебру A: достаточно взять прямое произведение алгебры A на алгебру, ей инверсно изоморфную. Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3. *Всякая локально простая алгебра A счетного ранга с единицей содержится в некоторой локально матричной алгебре B счетного ранга, причем единицы алгебр A и B совпадают.*

Доказательство. Алгебра A является объединением возрастающей последовательности

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \tag{1}$$

простых алгебр конечного ранга с общей единицей.

Каждую из алгебр A_n, $n=1, 2, \ldots$, можно вложить в некоторую полную матричную алгебру B_n конечного порядка с той же единицей. При этом можно считать, что порядок матричной алгебры B_{n+1} делится на порядок матричной алгебры B_n, т. е. что B_n может быть вложено (с общей единицей) в B_{n+1}. Будем считать, что алгебры B_n уже выбраны для всех n и что для каждого n зафиксировано определенное изоморфное отображение φ_n алгебры A_n в алгебру B_n. Нашей целью является разыскание таких вложений алгебр B_n друг в друга, при которых их подалгебры $A_n\varphi_n$ вкладывались бы друг в друга в соответствии с (1).

Рассмотрим матричную алгебру B_{n+1}. Она содержит подалгебру $A_{n+1}\varphi_{n+1}$, в которой содержится подалгебра $A_n\varphi_{n+1}$. С другой стороны, существует изоморфное отображение χ_n алгебры B_n в алгебру B_{n+1}, причем подалгебра $B_n\chi_n$ содержит в свою очередь подалгебру $A_n\varphi_n\chi_n$. Подалгебры $A_n\varphi_n\chi_n$ и $A_n\varphi_{n+1}$ изоморфны алгебре A_n и, следовательно, изоморфны между собой. Так как эти подалгебры простые и содержат единицу алгебры B_{n+1}, то (см. Алберт [3], теорема 4.14) существует автоморфизм ψ_n алгебры B_{n+1}, индуцирующий данный изоморфизм этих двух подалгебр, $A_n\varphi_n\chi_n\psi_n = A_n\varphi_{n+1}$.

Отображение $\chi_n\psi_n$ будет, следовательно, таким изоморфным отображением алгебры B_n в алгебру B_{n+1}, при котором подалгебра $A_n\varphi_n$ отображается в подалгебру $A_{n+1}\varphi_{n+1}$ так же, как в (1) подалгебра A_n отображается в подалгебру A_{n+1}. Алгебры B_n, $n=1, 2, \ldots$, составляют теперь возрастающую последовательность, объединение которой является локально матричной алгеброй и содержит исходную алгебру A.

Теорема доказана. Освободиться в ее формулировке от предположения о счетности ранга пока не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Direct decompositions of simple rings, Матем. сб. 11 (1942), 245—264.

2. В. М. Курочкин, К теории локально простых и локально нормальных алгебр, Матем. сб. 22 (1948), 443—454.

3. A. A. Albert, Structure of algebras, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., N. Y., 1939.

Поступила 9.I 1951.

Москва.