1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп

А. П. Мишина

1. Пусть A — смешанная абелева группа, F — ее максимальная периодическая подгруппа, $\mathfrak{J}^*$ — фактор-группа A/F и пусть φ — некоторый автоморфизм группы A [1]. Так как при всяком автоморфизме группы A подгруппа F отображается на себя, то этот автоморфизм φ порождает некоторый автоморфизм ψ группы F и некоторый автоморфизм χ группы $\mathfrak{J}^*=A/F$. Легко видеть, что если группа A *расщепляется,* т. е. если $A=F+\mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — группа без кручения, изоморфная $\mathfrak{J}^*$, то всякая заданная пара автоморфизмов ψ, χ групп F и $\mathfrak{J}^*$ соответственно может быть порождена некоторым автоморфизмом φ группы A.

Н. Я. Виленкин поставил вопрос, верно ли обратное утверждение, т. е. следует ли расщепляемость группы A из того, что всякая пара автоморфизмов ψ, χ соответственно групп F и $\mathfrak{J}^*$ порождается некоторым автоморфизмом группы A. Ниже на этот вопрос дается положительный ответ при некоторых ограничениях, накладываемых на группы F или $\mathfrak{J}^*$, причем оказывается, что достаточно рассматривать только одну вполне определенную пару автоморфизмов ψ, χ. Снять указанные ограничения автору не удалось — это связано с теми же трудностями, на которых остановилась построенная Бэром [2] теория расщепления абелевых групп.

Если заданный автоморфизм ψ группы F и заданный автоморфизм χ группы A/F могут быть порождены некоторым автоморфизмом группы A, то будем говорить, что автоморфизм ψ ***совместим*** с автоморфизмом χ в группе A. Через ψ_0 будем обозначать автоморфизм группы F, переводящий каждый элемент $f\in F$ в элемент $-f$. Тогда при некоторых ограничениях, накладываемых либо на группу F, либо на группу $\mathfrak{J}^*=A/F$, оказывается возможным доказать следующее утверждение:

(E) *Если в группе A автоморфизм ψ_0 ее максимальной периодической подгруппы F совместим с тождественным автоморфизмом группы $\mathfrak{J}^*=A/F$, то группа A расщепляется.*

---

[1]) Основные определения см. в [1].

[2]) См. [2].

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. Г. Курошу, под руководством которого выполнена эта работа.

2. Пусть φ есть некоторый автоморфизм смешанной группы A, порождающий тождественный автоморфизм фактор-группы $\mathfrak{J}^* = A/F$. Тогда, очевидно, для каждого $a \in A$ будет $- \varphi(a) = a + f$, где $f \in F$.

Теорема 1. *Пусть A — смешанная абелева группа, F — ее максимальная периодическая подгруппа и $\mathfrak{J}^* = A/F$. Группа A расщепляется тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ группы A, порождающий автоморфизм φ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{J}^*$ и обладающий тем дополнительным свойством, что $\varphi(a) = a + 2f$, $f \in F$, для любого элемента $a \in A$, $a \bar{\in} F$.*

Доказательство. Пусть группа A расщепляется, т. е. $A = F + \mathfrak{J}$. В качестве φ возьмем автоморфизм группы A, переводящий каждый элемент $f \in F$ в элемент $-f$ и оставляющий каждый элемент группы $\mathfrak{J}$ на месте. Этот автоморфизм φ, очевидно, обладает всеми нужными свойствами. В самом деле, если $a = f + a'$, где $a' \in \mathfrak{J}$, — произвольный элемент группы A, то $\varphi(a) = -f + a' = a - 2f$.

Обратно, пусть существует автоморфизм φ группы A с указанными в формулировке теоремы свойствами. Докажем, что группа A расщепляется.

Возьмем какую-нибудь систему образующих a_α^* (α пробегает множество индексов M) группы $\mathfrak{J}^*$ и пусть соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha^* = 0,$$

где β пробегает множество индексов N и при каждом β только конечное число коэфициентов $k_{\beta\alpha}$ отлично от нуля, — ее определяющие соотношения относительно этой системы образующих. Выберем из каждого смежного класса a_α^* по произвольному представителю a_α. Тогда во всей группе A будут иметь место соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha = f_\beta, \tag{1}$$

где $f_\beta \in F$.

В силу автоморфизма φ, отсюда получаем

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(a_\alpha + 2g_\alpha) = -f_\beta, \tag{2}$$

где $g_\alpha \in F$.

Вычитая (1) из (2), имеем

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} \cdot 2g_\alpha = -2f_\beta.$$

Но отсюда следует, что имеют место соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} g_\alpha = -f_\beta + h_\beta, \tag{3}$$

где h_β, $\beta \in N$, — элементы порядка 2 или нули.

Возьмем теперь вместо каждого a_α представителя того же смежного класса $a'_\alpha = a_\alpha + g_\alpha$. Тогда из (1), в силу (3), получим

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a'_\alpha = h_\beta. \qquad (4)$$

Рассмотрим подгруппу A_1 группы A, порожденную всеми h_β, $\beta \in N$ и всеми элементами a'_α, $\alpha \in M$. Легко видеть, что ее максимальной периодической подгруппой будет подгруппа F_1 группы A, порожденная элементами h_β, $\beta \in N$. Так как порядки этих элементов ограничены в совокупности, то A_1 расщепляется[1]. В силу этого, из соотношений (4) получаем

$$h_\beta = \sum_\alpha k_{\beta\alpha} g'_\alpha,$$

где g'_α — компонента элемента a'_α в прямом слагаемом F_1 группы A_1.

Возьмем теперь вместо каждого a'_α представителя того же смежного класса $a''_\alpha = a'_\alpha - g'_\alpha$. Тогда, в силу (4), получим

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a''_\alpha = 0. \qquad (5)$$

Так как

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a^*_\alpha = 0$$

— определяющие соотношения группы $\mathfrak{J}^*$, а каждое a''_α, $\alpha \in M$, — представитель смежного класса a^*_α, то из (5), очевидно, следует, что группа A расщепляется, $A = F + \mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — подгруппа группы A, порожденная элементами a''_α, $\alpha \in M$.

3. Теорема 2. *Пусть A — смешанная абелева группа, F — ее максимальная периодическая подгруппа, $\mathfrak{J}^* = A/F$, и пусть примарная компонента группы F по простому числу 2 равна нулю. Тогда для группы A справедливо утверждение* (*E*).

Доказательство. Пусть φ есть автоморфизм группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{J}^*$. Тогда при φ имеем: $\varphi(a) = a + f$, где $f \in F$, a — произвольный элемент группы A. Так как порядки всех элементов группы F, по условию, нечетны, то $f = 2f'$, где f' — некоторый элемент из F. Теперь наше утверждение есть непосредственное следствие теоремы 1.

4. Группа без кручения $\mathfrak{J}$ называется *2-полной*, если $\mathfrak{J} = 2\mathfrak{J}$, где $2\mathfrak{J}$ — группа, состоящая из всех элементов вида $2a$, $a \in \mathfrak{J}$.

Теорема 3. *Пусть A — смешанная абелева группа, F — ее максимальная периодическая подгруппа, а фактор-группа $\mathfrak{J}^* = A/F$ является 2-полной. Тогда для группы A справедливо утверждение* (*E*).

Доказательство. Пусть φ есть автоморфизм группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{J}^*$, и пусть $a \in A$, $a \bar{\in} F$. Тогда, так как группа $\mathfrak{J}^* = A/F$ 2-полная, $a = 2a_1 + f$, где $f \in F$. Поэтому $\varphi(a) = 2(a_1 + f_1) - f = a + 2(f_1 - f)$. В силу теоремы 1 отсюда следует наше утверждение.

---

[1]) См. [2], теорема 8; 5.

5. Теорема 4. *Пусть A — смешанная абелева группа, F — ее максимальная периодическая подгруппа, $\mathfrak{Z}^*=A/F$ и пусть $F=\sum_p F_p = F_2+F'$, где F_p — примарная компонента группы F по простому числу p, а $F'=\sum_{p\neq 2} F_p$. Тогда справедливость утверждения (E) для группы A следует из справедливости этого утверждения для всякой такой группы B, максимальная периодическая подгруппа которой есть F_2, а фактор-группа $B/F_2\cong\mathfrak{Z}^*$.*

Доказательство. Пусть a_α^* $(\alpha\in M)$ — система образующих группы $\mathfrak{Z}^*$,

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}a_\alpha^* = 0, \qquad \beta\in N, \tag{6}$$

система ее определяющих соотношений относительно этой системы образующих. Соотношениям (6) соответствуют в группе A соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}a_\alpha = f_\beta, \tag{7}$$

где каждое $f_\beta=f_{\beta,2}+f'_\beta$, $f_{\beta,2}\in F_2$, $f'_\beta\in F'$.

Пусть теперь существует автоморфизм φ группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{Z}^*$. При автоморфизме φ каждый элемент a_α переходит в некоторый элемент $a_\alpha+g_\alpha$, где $g_\alpha\in F$. Поэтому из (7), в силу φ, получим

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(a_\alpha+g_\alpha) = -f_\beta. \tag{8}$$

Вычтем теперь (7) из (8). Тогда будем иметь

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}g_\alpha = -2f_\beta \tag{9}$$

или для компонент в F'

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}g'_\alpha = -2f'_\beta. \tag{10}$$

Так как примарная компонента группы F' при $p=2$ равна нулю, соответствие $f'\to -2f'$ есть автоморфизм группы F'. Отсюда и из (10) получаем

$$f'_\beta = \sum_\alpha k_{\beta\alpha}h'_\alpha,$$

где все $h'_\alpha\in F'$.

Возьмем теперь вместо каждого a_α элемент $a'_\alpha=a_\alpha-h'_\alpha$. Тогда вместо соотношений (7) получим соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}a'_\alpha = f_{\beta,2},$$

где $f_{\beta,2}\in F_2$.

Из последних соотношений следует, что F' служит для группы A прямым слагаемым, т. е. $A=F'+B$, где B есть подгруппа группы A, порожденная всеми элементами группы F_2 и элементами a'_α, $\alpha \in M$. Ясно, что максимальная периодическая подгруппа группы B есть F_2 и что $B/F_2 \cong \mathfrak{J}^*$. Из совместимости в группе A автоморфизма ψ_0 группы F с тождественным автоморфизмом группы $\mathfrak{J}^* = A/F$ следует совместимость в группе B автоморфизма ψ_0 группы F с тождественным автоморфизмом группы B/F_2. В самом деле, элементы группы F_2 и элементы a'_α, $\alpha \in M$ составляют систему образующих группы B. Далее, из (9) для компонент в прямом слагаемом F_2 группы F получаем

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} g_{\alpha,2} = -2f_{\beta,2},$$

где все $g_{\alpha,2} \in F_2$. Поставим теперь в соответствие каждому элементу $f_2 \in F_2$ элемент $-f_2$, а каждому элементу a'_α — элемент $a'_\alpha + g_{\alpha,2}$. Тогда мы получим опять систему образующих группы B, причем соотношения относительно старой системы образующих, очевидно, перейдут в соотношения относительно новой системы образующих, и обратно. Если теперь для группы B утверждение (E) справедливо, то группа B расщепляется. Но тогда расщепляется и группа A. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 показывает, что достаточно рассматривать случай, когда максимальная периодическая подгруппа F смешанной абелевой группы A примарна по простому числу $p=2$, т. е. $F=F_2$. Только этот случай мы в дальнейшем и рассматриваем.

6. В дальнейшем нам придется рассматривать различные расширения заданной периодической группы F при помощи заданной группы без кручения $\mathfrak{J}^*$. Пусть A — одно из таких расширений и пусть

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a^*_\alpha = 0, \qquad \beta \in N,$$

система определяющих соотношений группы $\mathfrak{J}^*$ относительно некоторой ее системы образующих a^*_α, где α пробегает множество индексов M.

Эти определяющие соотношения можно выбрать так, что ни одно из них не будет следствием остальных. В самом деле, группа $\mathfrak{J}^*$ изоморфна фактор-группе свободной абелевой группы по некоторой ее подгруппе, которая, как известно, сама является свободной абелевой группой. Элементы этой подгруппы — левые части соотношений, имеющих место в группе $\mathfrak{J}^*$. В качестве определяющих соотношений группы $\mathfrak{J}^*$ можно взять систему соотношений, левые части которых — система свободных образующих нашей подгруппы.

Возьмем теперь в каждом смежном классе a^*_α по произвольному представителю a_α. Тогда в группе A мы получим соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha = f_\beta,$$

где $f_\beta (\beta \in N)$ — некоторая система элементов группы F. Так как, по условию, ни одно из определяющих соотношений группы $\mathfrak{J}^*$ не является следствием остальных, то система элементов f_β, $\beta \in N$, может быть, вообще говоря, какой угодно.

Пусть теперь нам дана какая-то система элементов f_β группы F, где β пробегает множество индексов N (среди f_β могут быть и повторяющиеся). Построим расширение A группы F при помощи группы $\mathfrak{J}^*$, которому соответствует (в указанном выше смысле) именно эта система элементов f_β. В качестве образующих группы A возьмем все элементы группы F и множество элементов a_α, где $\alpha \in M$, а в качестве определяющих соотношений относительно этой системы образующих возьмем соотношения коммутативности, все соотношения, существующие между элементами группы F, и соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha = f_\beta, \tag{11}$$

где

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha^* = 0$$

определяющие соотношения группы $\mathfrak{J}^*$. Так как определяющие соотношения группы $\mathfrak{J}^*$ мы выбрали так, что ни одно из них не является следствием остальных, то из соотношений (11) не может следовать равенство нулю некоторого элемента из F, не равного нулю в F. Следовательно, группа F является подгруппой группы A. Фактор-группа A/F, очевидно, изоморфна $\mathfrak{J}^*$. Таким образом, мы действительно получили нужное расширение группы F при помощи группы $\mathfrak{J}^*$. Будем говорить, что A есть *расширение данной группы F при помощи данной группы $\mathfrak{J}^*$, задаваемое системой элементов f_β, $\beta \in N$.*

Как мы видим, всякому расширению A группы F при помощи группы $\mathfrak{J}^*$ соответствует некоторая система элементов f_β, $\beta \in N$, группы F, и обратно — всякой системе элементов f_β, где $\beta \in N$, $f_\beta \in F$, соответствует некоторое расширение группы F при помощи группы $\mathfrak{J}^*$. Если теперь мы возьмем все системы элементов f_β, $\beta \in N$, какие только можно составить из элементов группы F, то мы получим все расширения заданной группы F при помощи заданной группы $\mathfrak{J}^*$. При этом можно указать такое разбиение множества наших систем на классы, что два расширения будут изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие им системы элементов группы F принадлежат к одному классу. Нам это, однако, дальше не понадобится.

7. Определение[1]. Группа без кручения $\mathfrak{J}$ называется *почти p-бесконечной,* где p — простое число, если в ней существует такая сервантная подгруппа S конечного ранга, что $\mathfrak{J}/S$ содержит отличный от нуля элемент, делящийся в этой группе на любую степень числа p.

Теорема 5. *Пусть группа A такова, что $F = F_2$, а $\mathfrak{J}^* = A/F$ — расширение не почти 2-бесконечной группы S^* конечного ранга при помощи произвольной 2-полной группы без кручения. Тогда для группы A утверждение* (E) *справедливо.*

---

[1] См. [2].

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\overline{\mathfrak{Z}}^*=\mathfrak{Z}^*/S^*$. Пусть $\overline{a}_\alpha^*$, $\alpha\in M$ — система образующих группы $\overline{\mathfrak{Z}}^*$, а

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}\overline{a}_\alpha^*=0, \qquad \beta\in N, \tag{12}$$

система ее определяющих соотношений относительно этой системы образующих, причем определяющие соотношения выбраны так, что ни одно из них не является следствием остальных (см. п. 6). Возьмем из каждого смежного класса $\overline{a}_\alpha^*$ по произвольному представителю a_α^*, $a_\alpha^*\in\mathfrak{Z}^*$. Тогда из соотношений (12) во всей группе $\mathfrak{Z}^*$ получим соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}a_\alpha^*-s_\beta^*=0, \tag{13}$$

где $s_\beta^*\in S^*$.

Элементы a_α^* и все элементы группы S^* составляют, очевидно, систему образующих группы $\mathfrak{Z}^*$; легко показать, что соотношения (13) и все соотношения, существующие между элементами группы S^*, служат для нее определяющими соотношениями, т. е. что всякое соотношение в группе $\mathfrak{Z}^*$ из них следует. Эту систему соотношений мы и возьмем в качестве определяющих соотношений группы $\mathfrak{Z}^*$.

Рассмотрим теперь подгруппу S группы A, являющуюся полным прообразом подгруппы S^* фактор-группы $\mathfrak{Z}^*$. Для пары групп F и S/F выполнены достаточные условия Бэра [1]), а поэтому S расщепляется, т. е. $S=F+S'$. Выберем в качестве представителей смежных классов $s^*\in S^*$ элементы группы S', а представители a_α смежных классов a_α^* выберем произвольно. Тогда в группе A в правых частях соотношений, получающихся из соотношений, имеющих место внутри группы S^*, будут стоять нули, а соотношениям (13) будут соответствовать соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}a_\alpha-s_\beta'=f_\beta, \tag{14}$$

где $s_\beta'\in S'$, $f_\beta\in F$. Только эти последние соотношения нам и нужно теперь рассмотреть.

По предположению, существует автоморфизм φ группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{Z}^*$. В силу этого, как и в пункте 5, получаем

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(a_\alpha+g_\alpha)-(s_\beta'+g_\beta')=-f_\beta,$$

где все g_α, $g_\beta'\in F$. Отсюда имеем

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}g_\alpha-g_\beta'=-2f_\beta. \tag{15}$$

Справедлива следующая лемма [2]).

[1]) См. [2], 7; 2.

[2]) См. [2], 5; 2.

Пусть S — не почти p-бесконечная группа конечного ранга и пусть $s_1, \ldots, s_n$ — некоторая ее максимальная линейно независимая система элементов. Тогда существует такое целое число w, что из равенства

$$p^{w+k} s = \sum_{i=1}^{n} c_i s_i,$$

где $s \in S$, c_i — целые числа, $k > 0$, следует, что каждое $c_i \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Применим эту лемму к группе S'. Пусть $s'_1, \ldots, s'_l$ — максимальная линейно независимая система элементов группы S' и пусть s' — произвольный элемент этой группы. Тогда будем иметь

$$ms' = \sum_{i=1}^{l} m_i s'_i,$$

где m, m_i — некоторые целые числа, причем можно считать, что общий наибольший делитель чисел $m, m_1, \ldots, m_l$ равен 1. Отсюда, по лемме, следует, что m делится не больше, чем на 2^w, где w не зависит от s'. Применяя автоморфизм φ, получим

$$m(s' + g') = \sum_{i=1}^{l} m_i (s'_i + g'_i), \quad \text{где} \quad g',\ g'_i \in F,$$

откуда

$$mg' = \sum_{i=1}^{l} m_i g'_i.$$

Отсюда следует (так как элементы $g'_1, \ldots, g'_l$ фиксированы), что порядки всех элементов $g' = \varphi(s') - s'$, где s' пробегает всю группу S', ограничены в совокупности. В частности, ограничены в совокупности порядки всех элементов g'_β. Подгруппу группы F, порожденную всеми g'_β, обозначим через $F^{(1)}$.

Рассмотрим теперь расширение $A^{(1)}$ группы $F^{(1)}$ при помощи группы $\bar{\mathfrak{Z}}^* = \mathfrak{Z}^*/S^*$, задаваемое (в смысле п. 6) системой элементов g'_β. В группе $A^{(1)}$ мы будем иметь соотношения

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} a_\alpha^{(1)} = g'_\beta, \qquad \beta \in N, \tag{16}$$

где $\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} \bar{a}^*_\alpha = 0$ — определяющие соотношения группы $\bar{\mathfrak{Z}}^*$. Так как, очевидно, порядки всех элементов группы $F^{(1)}$ ограничены в совокупности, то, как известно, группа $A^{(1)}$ расщепляется, т. е. $A^{(1)} = F^{(1)} + \mathfrak{Z}^{(1)}$ [1]. Если теперь написать равенства (16) для компонент в прямом слагаемом $F^{(1)}$ группы $A^{(1)}$, то получим

$$g'_\beta = \sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} h'_\alpha, \quad h'_\alpha \in F^{(1)} \subseteq F.$$

Отсюда и из (15) имеем

$$-2f_\beta = \sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} h_\alpha, \tag{17}$$

где $h_\alpha = g_\alpha - h'_\alpha$.

---

[1] См. [1], § 42.

Возьмем теперь расширение $A^{(2)}$ всей группы F при помощи группы $\overline{\mathfrak{J}}^*=\mathfrak{J}^*/S^*$, задаваемое системой элементов f_β. В группе $A^{(2)}$ мы будем иметь соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha^{(2)} = f_\beta, \tag{18}$$

соответствующие определяющим соотношениям (12) группы $A^{(2)}/F=\overline{\mathfrak{J}}^*$.

Так как $\overline{\mathfrak{J}}^*$ — 2-полная группа без кручения, то соответствие $\bar{a}^* \to 2\bar{a}^*$, где $\bar{a}^* \in \overline{\mathfrak{J}}^*$, есть автоморфизм группы $\overline{\mathfrak{J}}^*$. Отсюда следует, что система элементов $2\bar{a}_\alpha^*$, $\alpha \in M$, будет также системой образующих группы $\overline{\mathfrak{J}}^*$, а соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(2\bar{a}_\alpha^*) = 0 \tag{19}$$

системой ее определяющих соотношений относительно этой новой системы образующих. Этим соотношениям во всей группе $A^{(2)}$ соответствуют, ввиду (18), соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(2a_\alpha^{(2)}) = 2f_\beta.$$

Если теперь вместо каждого $2a_\alpha^{(2)}$ взять представителя того же смежного класса $2a_\alpha^{(2)}+h_\alpha$, то, ввиду (17), получается

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha}(2a_\alpha^{(2)}+h_\alpha) = 0.$$

Отсюда следует, что $A^{(2)}=F+\mathfrak{J}^{(2)}$, так как соотношения (19) — определяющие для группы $A^{(2)}/F$. Но тогда из (18) получаем

$$f_\beta = \sum_\alpha k_{\beta\alpha} h_\alpha'',$$

где все $h_\alpha'' \in F$.

Вернемся теперь к соотношениям (14). Возьмем в этих соотношениях вместо каждого a_α элемент $a_\alpha'=a_\alpha-h_\alpha''$, а элементы s_β' оставим прежними. Тогда получим

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} a_\alpha' - s_\beta' = 0.$$

Так как представителей смежных классов из S^* мы не меняли, то это и означает, что группа A расщепляется, $A=F+\mathfrak{J}$, причем $\mathfrak{J} \supset S'$.

Теорема 6. *Если $\mathfrak{J}^*=A/F$ — группа конечного ранга, а $F=F_2$, то для группы A справедливо утверждение* (E).

Доказательство. Если $\mathfrak{J}^*$ — 2-полная группа, то можно сослаться на теорему 3. Пусть $\mathfrak{J}^*$ — не 2-полная группа. Тогда в ней существует элемент a_1^*, который в группе $\mathfrak{J}^*$ не делится на 2. Берем этот элемент и порожденную им сервантную подгруппу S_1^* группы $\mathfrak{J}^*$. Если фактор-группа $\overline{\mathfrak{J}}^*=\mathfrak{J}^*/S_1^*$ — 2-полная группа, то выполнены условия предыдущей теоремы, и все доказано. Пусть она — не 2-полная группа. Берем в ней элемент $\bar{a}_2^*=a_2^*+S_1^*$, который не делится в ней на 2, и обозначаем через $\bar{S}_2^*$ порожденную им сервантную подгруппу группы $\mathfrak{J}^*$. Рассматриваем фактор-группу $\mathfrak{J}^*/S_2^*$, где S_2^* — подгруппа группы $\mathfrak{J}^*$, соответствующая $\bar{S}_2^*$, и т. д. Через конечное число шагов мы получим такую группу S^*, что или $S^*=\mathfrak{J}^*$, или $\mathfrak{J}^*/S^*$ — 2-полная группа. S^* — не почти 2-бесконечная группа конечного ранга. Действительно, в группе S^* мы имеем цепочку подгрупп

$$O \subset S_1^* \subset S_2^* \subset \ldots \subset S_n^* = S^*,$$

каждый фактор которой — не 2-полная группа 1-го ранга. Отсюда и из теоремы (7.1) в работе Бэра [2] посредством применения индукции получается, что всякая смешанная абелева группа S, такая, что $S/F(S) \cong S^*$, где $F(S)$ — максимальная периодическая подгруппа группы S, примарная по простому числу $p=2$, расщепляется. Но отсюда, в свою очередь, по теореме (8.1) из работы Бэра [2] следует, что группа S^* не почти 2-бесконечна. Этим теорема 6 доказана.

8. Легко видеть, что в рассматриваемых вопросах без ограничения общности группу F можно считать редуцированной. Везде в дальнейшем будет предполагаться, что это условие выполнено.

Пусть смешанная абелева группа A расщепляется, — $A=F+B'$, где B' — группа без кручения, и пусть φ — некоторый автоморфизм группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы A/F. При этом автоморфизме φ группа B' переходит, вообще говоря, в какую-то другую подгруппу группы A. Образ каждого элемента $b' \in B'$ есть $\varphi(b')=b'+f(b')$, где $f(b') \in F$. Докажем, что *если B' есть группа конечного ранга, то порядки всех элементов $f(b')$ ограничены в совокупности, когда b' пробегает всю группу B'.*

В самом деле, если B' — группа конечного ранга, то в ней, как это сразу следует из доказательства теоремы 6, можно найти цепочку сервантных в B' подгрупп

$$O \subset S \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n = B',$$

где S есть не почти 2-бесконечная группа конечного ранга, фактор-группа по которой — 2-полная, а каждый фактор S_k/S_{k-1} — 2-полная группа 1-го ранга. Доказательство будем вести по индукции. Для подгруппы S наше утверждение, как показано при доказательстве теоремы 5, справедливо. Пусть оно уже доказано для S_{k-1}. Докажем его для S_k. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение для образующих элементов группы S_k. В качестве образующих элементов этой группы возьмем все элементы группы S_{k-1} и представителей тех смежных классов группы $S_k^*=S_k/S_{k-1}$, которые составляют систему образующих этой группы. При этом в качестве образующих группы S_k^* возьмем какой-то фиксированный элемент $e^* \in S_k^*$, решения всех уравнений вида

$$pe^*_{p,\, i+1} = e^*_{p,\, i}, \tag{20}$$

где $e^*_{p,0}=e^*$, p — простое число, по которому e^* имеет в группе S^*_k бесконечную высоту, $i=0, 1, 2, \ldots$, и решения всех уравнений вида

$$q^{m_q}e^*_q=e^*, \tag{21}$$

где $q\neq 2$ — простое число, по которому элемент e^* имеет конечную высоту m_q.

Соотношениям (20) и (21) соответствуют в группе S_k соотношения:

$$pe_{p,\,i+1}-e_{p,\,i}=s^{(k-1)}_{p,\,i}, \quad q^{m_q}e_q-e=s^{(k-1)}_q,$$

где $s^{(k-1)}_{p,\,i}$, $s^{(k-1)}_q\in S_{k-1}$, а элементы $e, e_{p,\,i}, e_q$ — представители соответственно смежных классов $e^*, e^*_{p,\,i}, e^*_q$, причем $e_{p,0}=e$. Рассмотрим соотношения

$$2e_{2,\,i+1}-e_{2,\,i}=s^{(k-1)}_{2,\,i}, \quad i=0, 1, 2, \ldots$$

В силу автоморфизма φ, отсюда получаем

$$2\,(e_{2,\,i+1}+f\,(e_{2,\,i+1}))-(e_{2,\,i}+f\,(e_{2,\,i}))=s^{(k-1)}_{2,\,i}+f\,(s^{(k-1)}_{2,\,i}),$$

откуда

$$2f\,(e_{2,\,i+1})-f\,(e_{2,\,i})=f\,(s^{(k-1)}_{2,\,i}). \tag{22}$$

По индуктивному предположению порядки всех элементов $f\,(s^{(k-1)})$, где $s^{(k-1)}\in S_{k-1}$, ограничены в совокупности некоторым числом 2^ν. Умножим все соотношения (22) на 2^ν. Тогда получим

$$2\cdot 2^\nu f\,(e_{2,\,i+1})-2^\nu f\,(e_{2,\,i})=0, \quad i=0, 1, 2, \ldots$$

Но это означает, что подгруппа группы F, порожденная элементами $2^\nu f\,(e_{2,\,i})$, $i=0, 1, 2, \ldots$, является 2-полной, а так как группа F примарна по 2, эта подгруппа будет просто полной. Так как, по предположению, группа F — редуцированная, то отсюда следует, что $2^\nu f\,(e_{2,\,i})=0$, $i=0, 1, 2, \ldots$ В частности, $2^\nu f\,(e_{2,0})=2^\nu f\,(e)=0$. Отсюда — все $2^\nu f\,(e_{p,\,i})$, $p\neq 2$, и все $2^\nu f\,(e_q)$ также равны нулю, так как для них мы получаем:

$$p\cdot 2^\nu f\,(e_{p,\,i+1})-2^\nu f\,(e_{p,\,i})=0; \quad q^{m_q}\cdot 2^\nu f\,(e_q)-2^\nu f\,(e)=0;$$
$$(p, 2)=(q, 2)=1.$$

Этим ограниченность в совокупности порядков элементов $\varphi\,(s^{(k)})-s^{(k)}$, где $s^{(k)}$ пробегает всю группу S_k, доказана. Следовательно, и порядки элементов $\varphi(b')-b'$ ограничены в совокупности. Больше того, мы получили, что *порядки всех элементов $\varphi(b')-b'=f\,(b')$, где $b'\in B'$, ограничены в совокупности тем же числом 2^ν, которым ограничены в совокупности порядки элементов $\varphi\,(s)-s$, где $s\in S$.*

9. Докажем теперь следующее утверждение:

Теорема 7. *Если $\mathfrak{Z}^*=A|F$ — произвольная счетная группа, а $F=F_2$, то для группы A справедливо утверждение (E).*

Доказательство. Так как группа $\mathfrak{Z}^*$ счетна, то в ней можно найти такую счетную возрастающую последовательность вложенных друг в друга сервантных подгрупп $B_0^* = O^* \subset B_1^* \subset \ldots \subset B_n^* \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}^*$, объединением которой является группа $\mathfrak{Z}^*$, что каждый фактор B_n^*/B_{n-1}^* есть группа 1-го ранга.

Пусть существует автоморфизм φ группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{Z}^* = A/F$, и пусть B_n — подгруппа группы A, соответствующая подгруппе B_n^* группы $\mathfrak{Z}^*$, т. е. $B_n^* = B_n/F$. Ясно, что при автоморфизме φ каждая группа B_n отображается на себя. Следовательно, в каждой группе B_n автоморфизм ψ_0 ее максимальной периодической подгруппы F совместим с тождественным автоморфизмом группы $B_n/F = B_n^*$. Отсюда следует, по теореме 6, что каждая группа B_n расщепляется, $B_n = F + B_n'$. Докажем, что существуют такие расщепления групп B_n, что при любом n $B_n' \supset B_{n-1}'$.

Для $n=1$ утверждение справедливо. Предположим, что уже построено нужное расщепление группы B_{n-1}, и рассмотрим группу B_n. Пусть сперва фактор B_n^*/B_{n-1}^* — 2-полная группа. Возьмем в качестве определяющих соотношений группы $B_n/F = B_n^*$ все соотношения внутри группы $B_{n-1}/F = B_{n-1}^*$ и соотношения вида

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} b_{\alpha, n}^* - b_{\beta, n-1}^* = 0, \qquad \beta \in N, \tag{23}$$

где $b_{\beta, n-1}^* \in B_{n-1}^*$, а $\sum_\alpha k_{\beta\alpha} \overline{b}_{\alpha, n}^* = 0$ — определяющие соотношения фактор-группы B_n^*/B_{n-1}^*. В качестве представителей смежных классов $b_{\beta, n-1}^* \in B_{n-1}^*$ возьмем элементы группы B_{n-1}', а представителей смежных классов $b_{\alpha, n}^*$ выберем произвольно. Тогда, проводя точно те же рассуждения, что при доказательстве теоремы 5, и используя ограниченность в совокупности порядков элементов $\varphi(b_{n-1}') - b_{n-1}'$, где b_{n-1}' пробегает B_{n-1}', мы как раз и получим нужное расщепление группы $B_n: B_n = F + B_n'$, где $B_n' \supset B_{n-1}'$.

Пусть теперь фактор B_n^*/B_{n-1}^* не 2-полная группа. В качестве определяющих соотношений группы $B_n^* = B_n/F$ возьмем те же соотношения, что и в первом случае, и так же, как там, выберем представителей смежных классов. Тогда соотношениям, имеющим место в группе B_{n-1}^*, в группе B_n будут соответствовать соотношения, в правых частях которых стоят нули, а соотношениям вида (23) будут соответствовать соотношения

$$\sum_\alpha k_{\beta\alpha} b_{\alpha, n} - b_{\beta, n-1}' = f_\beta, \tag{24}$$

где $b_{\beta, n-1}' \in B_{n-1}'$, $f_\beta \in F$. Так как для группы $\overline{B}_n^* = B_n^*/B_{n-1}^*$, являющейся группой 1-го ранга, выполнены достаточные условия Бэра [2], то расширение группы F при помощи группы $\overline{B}_n^*$, задаваемое системой элементов f_β, заведомо расщепляется. Отсюда следует, что элементы f_β могут быть записаны в виде

$$f_\beta = \sum_\alpha k_{\beta\alpha} g_{\alpha, n},$$

где элементы $g_{\alpha, n}$ взаимно однозначно соответствуют элементам $b_{\alpha, n}$, причем $g_{\alpha, n} \in F$. Если теперь не трогать элементы $b'_{\beta, n-1}$, а вместо каждого $b_{\alpha, n}$ взять элемент $b'_{\alpha, n} = b_{\alpha, n} - g_{\alpha, n}$, принадлежащий тому же смежному классу, что и $b_{\alpha, n}$, то вместо соотношений (24) получим

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} b'_{\alpha, n} - b'_{\beta, n-1} = 0.$$

Отсюда следует, что $B_n = F + B'_n$, причем $B'_n \supset B'_{n-1}$.

Итак, при каждом n будет $B_n = F + B'_n$, причем $B'_n \supset B'_{n-1}$. Если теперь $\mathfrak{J}$ — объединение возрастающей последовательности групп B'_n, то, очевидно, $A = F + \mathfrak{J}$.

Замечание. *Утверждение (E) справедливо для группы A, если группа $\mathfrak{J}^* = A/F$ есть объединение счетной возрастающей последовательности сервантных подгрупп $O \subset C_1^* \subset \ldots \subset C_n^* \subset \ldots \subset \mathfrak{J}^*$, в которой каждый фактор C_{n+1}^*/C_n^* есть или не почти 2-бесконечная группа конечного ранга или произвольная 2-полная группа.*

Это легко следует из доказательства последней теоремы и из п. 8.

10. Определение[1]. Пусть $\mathfrak{J}$ — абелева группа без кручения. Если группа $\mathfrak{J}$ счетна, то $D(\mathfrak{J}) = 1$. Если ν — произвольное порядковое число, то положим $D(\mathfrak{J}) = \nu$, если $D(\mathfrak{J}) \nless \nu$ и если в $\mathfrak{J}$ существует такая сервантная подгруппа S конечного ранга, что $\mathfrak{J}/S$ есть прямая сумма групп $\mathfrak{J}'$, для которых $D(\mathfrak{J}') < \nu$.

Как показал Бэр[2], существуют группы без кручения $\mathfrak{J}$, для которых инвариант $D(\mathfrak{J})$ не определен.

Теорема 8. *Если для группы $\mathfrak{J}^* = A/F$ определено $D(\mathfrak{J}^*)$, то для группы A справедливо утверждение* (E).

Доказательство. Если $D(\mathfrak{J}^*) = 1$, то группа $\mathfrak{J}^*$ счетна и можно воспользоваться теоремой 7. Пусть утверждение (E) уже доказано для всех порядковых чисел $\mu < \nu$ и пусть $D(\mathfrak{J}^*) = \nu$. Тогда в группе $\mathfrak{J}^*$ существует такая сервантная подгруппа S^* конечного ранга, что $\mathfrak{J}^*/S^* = \overline{\mathfrak{J}}^*$ есть прямая сумма групп $\overline{\mathfrak{J}}_\sigma^*$, для которых $D(\overline{\mathfrak{J}}_\sigma^*) < \nu$. По индуктивному предположению, для групп $\overline{\mathfrak{J}}_\sigma^*$ утверждение (E) справедливо. Легко видеть, что тогда оно справедливо и для прямой суммы $\overline{\mathfrak{J}}^* = \sum_{\sigma} \overline{\mathfrak{J}}_\sigma^*$.

Итак, группа $\mathfrak{J}^*$ есть расширение группы конечного ранга S^* при помощи группы без кручения $\overline{\mathfrak{J}}^*$, для которой справедливость утверждения (E) уже доказана. Пусть теперь A — расширение примарной по $p=2$ группы F при помощи группы $\mathfrak{J}^*$ и пусть в группе A автоморфизм ψ_0 группы F совместим с тождественным автоморфизмом группы $A/F = \mathfrak{J}^*$. По теореме 6 отсюда следует, что подгруппа S группы A, соответствующая подгруппе S^* группы $\mathfrak{J}^*$, расщепляется, $S = F + S'$. Берем, как и раньше, в качестве определяющих соотношений группы $A/F = \mathfrak{J}^*$ все соотношения, существующие внутри группы S^*,

[1] См. [2].

[2] См. [3].

и соотношения, получающиеся из определяющих соотношений группы $\mathfrak{J}^*/S^*$. Последние имеют вид

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} a_{\alpha}^* - s_{\beta}^* = 0, \qquad (25)$$

где α пробегает некоторое множество индексов M, β — некоторое множество индексов N и при каждом β только конечное число коэфициентов $k_{\beta\alpha} \neq 0$. Возьмем в качестве представителей смежных классов $s^* \in S^*$ элементы группы S', а представителей смежных классов a_{α}^* выберем произвольно. Тогда во всей группе A нужно будет рассмотреть только соотношения

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} a_{\alpha} - s_{\beta} = f_{\beta}, \qquad (26)$$

получающиеся из соотношений (25). По предположению, существует автоморфизм φ группы A, порождающий автоморфизм ψ_0 группы F и тождественный автоморфизм группы $\mathfrak{J}^*$. В силу φ, из (26) получаем

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha}(a_{\alpha} + g_{\alpha}) - (s_{\beta} + g'_{\beta}) = -f_{\beta} \qquad (27)$$

или, вычитая (26) из (27),

$$\sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} g_{\alpha} - g'_{\beta} = -2f_{\beta}.$$

Из конечности ранга группы S^* следует, ввиду п. 8, ограниченность в совокупности порядков элементов g'_{β}, в силу чего существует запись

$$2f_{\beta} = \sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} g''_{\alpha}, \qquad g''_{\alpha} \in F. \qquad (28)$$

Рассмотрим теперь расширение A' нашей группы F при помощи группы $\overline{\mathfrak{J}}^* = \mathfrak{J}^*/S^*$, задаваемое системой элементов f_{β}. Из соотношений (28) следует, что в группе A' автоморфизм ψ_0 группы F совместим с тождественным автоморфизмом группы $A'/F = \overline{\mathfrak{J}}^*$. Это доказывается совершенно так же, как аналогичное утверждение для группы B в доказательстве теоремы 4. Так как, как показано, для группы $\overline{\mathfrak{J}}^*$ утверждение (E) справедливо, то отсюда следует, что $A' = F + \mathfrak{J}'$. Но это означает, что существует запись

$$f_{\beta} = \sum_{\alpha} k_{\beta\alpha} h_{\alpha},$$

где $h_{\alpha} \in F$, что и требовалось доказать.

11. Можно указать еще ряд случаев, когда смешанная абелева группа A расщепляется.

а) Из доказательства теоремы 8 и из п. 8 легко следует, что утверждение (E) справедливо также в случае, когда $\mathfrak{J}^*$ есть расширение группы без кручения, о которой говорится в формулировке теоремы 5, при помощи произвольной группы без кручения, для которой справедливость утверждения (E) уже доказана (группа F при этом предполагается произвольной).

Ясно, что утверждение (Е) справедливо также и в том случае, когда $\mathfrak{J}^*$ есть расширение группы без кручения, для которой справедливость (Е) уже доказана, при помощи некоторой группы, для которой выполнены достаточные условия Бэра.

б) Мы везде предполагали, что в рассматриваемой группе A автоморфизм ψ_0 ее максимальной периодической подгруппы F совместим с тождественным автоморфизмом группы $A/F=\mathfrak{J}^*$. Точно то же получится, если предположить, что в группе A совместимы тождественный автоморфизм группы F и автоморфизм χ_0 группы $\mathfrak{J}^*=A/F$, переводящий каждый элемент $a^*\in\mathfrak{J}^*$ в элемент $-a^*$. Можно даже доказать, что тождественный автоморфизм группы F тогда и только тогда совместим в группе A с автоморфизмом χ_0 группы $\mathfrak{J}^*$, когда автоморфизм ψ_0 группы F совместим в A с тождественным автоморфизмом группы $\mathfrak{J}^*$.

Далее, пусть разность двух автоморфизмов ψ_1 и ψ_2 группы F есть автоморфизм этой группы. Тогда из совместимости автоморфизмов ψ_1 и ψ_2 с тождественным автоморфизмом группы $\mathfrak{J}^*=A/F$ следует, что группа A расщепляется.

Аналогично, если разность двух автоморфизмов χ_1 и χ_2 группы $\mathfrak{J}^*=A/F$ есть автоморфизм этой группы, то из совместимости в группе A тождественного автоморфизма группы F с автоморфизмами χ_1 и χ_2 следует, что группа A расщепляется.

в) До сих пор мы рассматривали случай, когда существует автоморфизм φ смешанной группы A, порождающий заданный автоморфизм ее максимальной периодической подгруппы F и заданный автоморфизм фактор-группы $\mathfrak{J}^*=A/F$. Пусть теперь φ есть эндоморфизм группы A. Предположим, что при этом эндоморфизме все элементы группы F остаются на месте, а каждый элемент $a\,\overline{\in}\,F$ переходит в элемент $\varphi(a)=2a+f$, где $f\in F$. Тогда группа A расщепляется, причем это верно без каких бы то ни было ограничений на группы F или $\mathfrak{J}^*$.

То же самое получается, если существует эндоморфизм группы A, переводящий каждый элемент $f\in F$ в элемент $2f$, а каждый элемент $a\,\overline{\in}\,F$ — в элемент того же смежного класса $a+g$, $g\in F$.

Все эти утверждения легко доказываются приведенными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, ГТТИ, М.—Л., 1944.

2. R. Baer, The Subgroup of the Elements of Finite Order of an Abelian Group, Ann. of Math. 37 (1936), 766—781.

3. R. Baer, Abelian Groups without Elements of Finite Orders, Duke Math. J., 3 (1937), 68—122.

Поступила 28.IX 1950.

Москва.