DOI: 10.37863/umzh.v73i12.6482

УДК 517.925.53

М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ ТА ОПЕРАТОРА ГРІНА – САМОЙЛЕНКА ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІПШИЦЕВИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

For systems of non-Lipschitz differential equations, we establish conditions for the existence of invariant sets. To obtain this result, we use the Green – Samoilenko function and the corresponding operator.

Для систем неліпшицевих диференціальних рівнянь встановлено умови існування інваріантних множин. При дослідженні цих систем використано функцію та оператор Гріна – Самойленка.

1. Вступ. Однією з основних проблем теорії нелінійних коливань є проблема інваріантних множин динамічних систем. Цю проблему детально вивчено в [1] у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь, нелінійні частини яких задовольняють умови гладкості. Методи вивчення інваріантних множин, побудовані в [1], не застосовні до неліпшицевих диференціальних рівнянь. Для вирішення цієї проблеми в загальному випадку автори статті запропонували метод, що базується на функціональному аналізі з використанням функції й оператора Гріна – Самойленка та c-неперервних операторів.

2. Основний об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, Φ і X — скінченновимірні банахові простори з нормами $\|\cdot\|_\Phi$ і $\|\cdot\|_X$ відповідно і $L(X,X)$ — банахова алгебра всіх лінійних неперервних операторів $A\colon X\to X$ з нормою

$$\|A\|_{L(X,X)} = \sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_X.$$

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + b(\varphi, x),\\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x + F(\varphi, x), \quad t\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $a\colon \Phi\to\Phi$, $b\colon \Phi\times X\to\Phi$, $P\colon\Phi\to L(X,X)$ і $F\colon\Phi\times X\to X$ — неперервні відображення.

Множина $\mathcal{M}\subset\Phi\times X$ називається *інваріантною множиною* системи рівнянь (1), якщо для кожної точки $(\varphi_0, x_0)\in\mathcal{M}$ для розв'язку

$$\varphi = \varphi(t,\varphi_0,x_0), \quad x = x(t,\varphi_0,x_0)$$

цієї системи, що задовольняє умови

$$\varphi(0,\varphi_0,x_0)=\varphi_0, \quad x(0,\varphi_0,x_0)=x_0,$$

виконується співвідношення

$$\{(\varphi(t,\varphi_0,x_0), x(t,\varphi_0,x_0))\in\Phi\times X : t\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}.$$

Метою цієї роботи є з'ясування умов існування в системі (1) інваріантної множини $\mathcal{M}$, для якої

$$\sup\{\|x\|_X : (\varphi, x) \in \mathcal{M}\} < +\infty.$$

Це співвідношення означає, що проєкція множини $\mathcal{M}$ на $\{0\} \times X$ паралельно $\Phi \times \{0\}$ [2] є обмеженою ($\{0\} \times X$ і $\Phi \times \{0\}$ — підпростори простору $\Phi \times X$). Множини, що задовольняють таку умову, називатимемо X-*обмеженими*.

При з'ясуванні умов існування в системі (1) X-обмеженої інваріантної множини $\mathcal{M}$ крім неперервності відображень $a,\ b, P$ і F ми вимагатимемо, щоб виконувалися додаткові умови.

Нехай Y і Z — довільні банахові простори, $B_Y[0,\rho]$ — замкнена куля радіуса ρ з центром у точці O у просторі Y, тобто множина $\{y \in Y : \|y\|_Y \le \rho\}$, і $C^0(Y,Z)$ — банаховий простір неперервних і обмежених на Y функцій $u = u(y)$ зі значеннями в Z з нормою

$$\|u\|_{C^0(Y,Z)} = \sup_{y \in Y} \|u(y)\|_Z.$$

Зафіксуємо довільне число

$$r > 0.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + b(\varphi, z), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x + F(\varphi, x), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$.

Будемо вважати, що ця система для кожної точки $(\varphi_0, x_0) \in \Phi \times B_X[0,r]$ має єдиний розв'язок

$$\varphi = \varphi_t(\varphi_0, z), \quad x = x_t(\varphi_0, x_0),$$

що задовольняє умови

$$\varphi_0(\varphi_0, z) = \varphi_0, \quad x_0(\varphi_0, x_0) = x_0.$$

Зауважимо, що функція $\varphi = \varphi_t(\varphi_0, z)$, як розв'язок першого рівняння системи (2), залежить від $\varphi_0 \in \Phi$ та функції z і не залежить від x.

У подальшому будемо вважати, що виконуються такі умови.

Умова А. Для кожних $\varphi_0 \in \Phi$ і $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ розв'язок $\varphi = \varphi_t(\varphi_0, z)$ диференціального рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + b(\varphi, z), \quad t \in \mathbb{R},$$

як функція змінних φ_0 і z, є неперервним на $\Phi \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ і для довільних $b > 0,\ T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi_0\|_\Phi \le b, \quad |t| \le T} \|\varphi_t(\varphi_0, z_n) - \varphi_t(\varphi_0, z)\|_\Phi = 0,$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t| \le a} \|z_n(t) - z(t)\|_X = 0 \tag{3}$$

для всіх $a > 0$.

Умова Б. $\sup_{\varphi\in\Phi}\|P(\varphi)\|_{L(X,X)} < +\infty$.

Умова В. Для кожної обмеженої множини $G \subset X$

$$\sup_{(\varphi,x)\in\Phi\times G}\|F(\varphi,x)\|_X < +\infty.$$

Зазначимо, що задачу про інваріантні множини системи рівнянь (1) у випадку $\Phi = \mathbb{R}^m$, $X = \mathbb{R}^n$, $b(\varphi,x) \equiv 0$ і 2π-періодичних за змінними $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ та диференційовних $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ і $F(\varphi,x)$ (тут $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)$) детально дослідив А. М. Самойленко [1].

3. Функція і оператор Гріна – Самойленка. Нехай $\mathfrak{M}(Y,Z)$ — банаховий простір обмежених на Y функцій $z = z(y)$ зі значеннями в Z і нормою

$$\|z\|_{\mathfrak{M}(Y,Z)} = \sup_{y\in Y}\|z(y)\|_Z,$$

де Y і Z — банахові простори, що використовувалися в п. 2, і $\varphi_t(\varphi,z)$ — розв'язок першого рівняння системи (2), для якого

$$\varphi_0(\varphi,z) = \varphi.$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi,z)$ операторний розв'язок задачі

$$\begin{gathered}\frac{dX(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi,z))X(t), \quad t\in\mathbb{R},\\ X(\tau) = I,\end{gathered} \tag{4}$$

де I — одиничний елемент алгебри $L(X,X)$. Завдяки неперервності відображення $P\colon \Phi \to$ $\to L(X,X)$ та умовам А і Б операторна функція $P(\varphi_t(\varphi,z))$ неперервна за змінною t на $\mathbb{R}$ і обмежена на $\mathbb{R}$. Тому задача (4) для кожних $\varphi\in\Phi$ і $z\in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ має єдиний розв'язок (див., наприклад, [3]), визначений на $\mathbb{R}$.

Розглянемо операторну функцію

$$G_0(\tau,\varphi,z) = \begin{cases}\Omega_\tau^0(\varphi,z)C(\varphi_\tau(\varphi,z)), & \text{якщо} \quad \tau\le 0,\\ -\Omega_\tau^0(\varphi,z)(I - C(\varphi_\tau(\varphi,z))), & \text{якщо} \quad \tau > 0,\end{cases}$$

де $C\in C^0(\Phi, L(X,X))$.

Будемо вважати, що інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_0(\tau,\varphi,z)\|_{L(X,X)}d\tau$$

збігається для кожних $(\varphi,z)\in\Phi\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ і

$$\sup_{\varphi\in\Phi,\ z\in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]}\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_0(\tau,\varphi,z)\|_{L(X,X)}d\tau < +\infty. \tag{5}$$

Ця функція називається *функцією Гріна – Самойленка* системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + b(\varphi, z), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6}$$

у випадку $b(\varphi, z) \equiv 0$ [4]. Збережемо цю назву для $G_0(\tau, \varphi, z)$ і у випадку $b(\varphi, z) \not\equiv 0$.

Виконання співвідношення (5) означає, що згідно з [1] функція Гріна – Самойленка є грубою.

Зауважимо, що система рівнянь (6) має функцію Гріна – Самойленка, якщо інваріантна множина

$$\mathcal{K} = \{(\varphi, 0) \in \Phi \times X : \varphi \in \Phi\}$$

цієї системи експоненціально дихотомічна, тобто виконується така умова.

Умова Г. Існують підпростори $X_+(\tau, \varphi, z), X_+(\tau, \varphi, z) \subset X$, де $(\tau, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times \Phi \times \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$, і додатні сталі K, N і ν, для яких:

1) для кожних $(\tau, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times \Phi \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$ простір X є прямою сумою підпросторів $X_+(\tau, \varphi, z)$ і $X_-(\tau, \varphi, z)$:

$$X = X_+(\tau, \varphi, z) \oplus X_-(\tau, \varphi, z),$$

причому проєктори $P_+(\tau, \varphi, z)$ і $P_-(\tau, \varphi, z)$, породжені цією сумою, рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{(\tau,\varphi,z)\in\mathbb{R}\times\Phi\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]} \left\{\|P_+(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)}, \|P_-(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)}\right\} \le K;$$

2) для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$, $t \ge \tau$, $\varphi \in \Phi$, $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$ і $x_0 \in X_-(\tau, \varphi, z)$ виконується нерівність

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, z)x_0\right\|_X \le Ne^{-\nu(t-\tau)}\|x_0\|_X;$$

3) для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$, $t \le \tau$, $\varphi \in \Phi$, $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$ і $x_0 \in X_+(\tau, \varphi, z)$ виконується нерівність

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, z)x_0\right\|_X \le Ne^{-\nu(\tau-t)}\|x_0\|_X.$$

У випадку виконання умови Г функція Гріна – Самойленка системи рівнянь (6) має вигляд

$$G_0(\tau, \varphi, z) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, z)P_-(\tau, \varphi, z), & \text{якщо} \quad \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi, z)P_+(\tau, \varphi, z), & \text{якщо} \quad \tau > 0, \end{cases} \tag{7}$$

і для неї

$$\|G_0(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} \le Ne^{-\nu|\tau|} \tag{8}$$

для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \Phi$ і $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$.

Згідно з [4] *оператором Гріна – Самойленка* назвемо оператор $\mathcal{G}_z$, що діє з простору $C^0(\Phi, X)$ у простір $\mathfrak{M}(\Phi, X)$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{G}_z u)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi, z)u(\varphi_\tau(\varphi, z))d\tau.$$

У подальшому покажемо, що для кожного $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$

$$\mathcal{G}_z C^0(\Phi, X) \subset C^0(\Phi, X),$$

тобто оператор $\mathcal{G}_z$ діє в просторі $C^0(\Phi, X)$.

Зазначимо, що оператор Гріна – Самойленка розглядався в [4] у випадку $b(\varphi, x) \equiv 0$.

У подальшому крім умови Г будемо використовувати таку умову.

Умова Ґ. Для довільних $z, z_n \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r],\ n \in \mathbb{N},\ \theta > 0$ і $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_\Phi \le \theta,\ |\tau| \le T} \|G_0(\tau, \varphi, z_n) - G_0(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} = 0,$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t| \le a} \|z_n(t) - z(t)\|_X = 0 \tag{9}$$

для всіх $a > 0$.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{G}_z$ відіграватиме важливу роль у з'ясуванні існування X-обмежених інваріантних множин у системі диференціальних рівнянь (1). Наведемо одну властивість цього оператора.

4. c-Неперервність оператора $\mathcal{G}_z$. Будемо говорити, що послідовність $(z_n)_{n\ge1}$ елементів простору $C^0(Y, Z)$ *локально збігається* до $z \in C^0(Y, Z)$, і позначатимемо

$$z_n \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(Y,Z)} z \text{ при } n \to \infty, \tag{10}$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного числа $p > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{\|y\|_Y \le p} \|z_n(y) - z(y)\|_Z = 0.$$

Аналогічно визначаються локально збіжні послідовності елементів простору $\mathfrak{M}(Y, Z)$.

Оператор $B\colon E_1 \to E_2$ (E_1 і E_2 — банахові простори, кожен з яких збігається з одним із просторів $C^0(Y_1, Z_1)$, $C^0(Y_2, Z_2)$, $\mathfrak{M}(Y_1, Z_1)$ і $\mathfrak{M}(Y_2, Z_2)$, де $Y_1,\ Y_2,\ Z_1$ і Z_2 — також банахові простори) називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in E_1$ і $x_n \in E_1,\ n \ge 1$, для яких

$$x_n \xrightarrow{\text{loc.},\ E_1} x \text{ при } n \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$Bx_n \xrightarrow{\text{loc.},\ E_2} Bx \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо для c-неперервного оператора $B\colon C^0(Y_1, Z_1) \to C^0(Y_2, Z_2)$ у випадку $\dim Z_2 < \infty$ для кожної обмеженої множини $M \subset C^0(Y_1, Z_1)$ функції з множини BM є рівностепенево неперервними на кожному відрізку $[-\gamma, \gamma]$, $\gamma > 0$, то цей оператор називається *c-цілком неперервним*.

Поняття c-неперервного і c-цілком неперервного оператора увів до розгляду (на мові „$\varepsilon,\ \delta$") Е. Мухамадієв [5, 6]; його вивчення було продовжено в багатьох працях (див., наприклад, [7 – 12]). Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, запропонував один із авторів статті (див., наприклад, [13 – 15]).

Зазначимо, що c-неперервний оператор може не бути неперервним і в умовах А і Ґ співвідношення (3) і (9) за допомогою (10) можна записати у вигляді

$$z_n \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\mathbb{R},X)} z \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 1. *Нехай* $a\colon \Phi \to \Phi$, $b\colon \Phi \times X \to \Phi$ *і* $P\colon \Phi \to L(X,X)$ — *неперервні відображення і виконуються умови* А, Б *і* Г.

Тоді множина значень $R(\mathcal{G}_z)$ *оператора* $\mathcal{G}_z$ *для кожного* $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ *є підмножиною простору* $C^0(\Phi, X)$ *і цей оператор є лінійним, обмеженим та c-неперервним.*

Доведення. Зафіксуємо довільну функцію $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$. Розглянемо довільні функції $u_n \in C^0(\Phi, X)$, $n \geq 0$, для яких

$$u_n \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\Phi,X)} u_0 \text{ при } n \to \infty. \tag{11}$$

Покажемо, що

$$\mathcal{G}_z u_n \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathfrak{M}(\Phi,X)} \mathcal{G}_z u_0 \text{ при } n \to \infty. \tag{12}$$

Зафіксуємо довільні числа $R > 0$ і $\varepsilon > 0$. Завдяки (11) існує таке число $c > 0$, що

$$\sup_{n \geq 0} \|u_n\|_{C^0(\Phi,X)} \leq c. \tag{13}$$

Виберемо таке додатне число a, щоб

$$\frac{4Nc}{\nu}\, e^{-\nu a} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Запишемо $(\mathcal{G}_z u_n)(\varphi) - (\mathcal{G}_z u_0)(\varphi)$ у вигляді

$$(\mathcal{G}_z u_n)(\varphi) - (\mathcal{G}_z u_0)(\varphi) = I_1(n,\varphi) + I_2(n,\varphi),$$

де

$$I_1(n,\varphi) = \int\limits_{-a}^{a} G_0(\tau,\varphi,z)(u_n(\varphi_\tau(\varphi,z)) - u_0(\varphi_\tau(\varphi,z)))d\tau$$

і

$$I_2(n,\varphi) = \int\limits_{|\tau| \geq a} G_0(\tau,\varphi,z)(u_n(\varphi_\tau(\varphi,z)) - u_0(\varphi_\tau(\varphi,z)))d\tau.$$

На підставі (13), (14) і оцінки (8) норми функції Гріна – Самойленка (тут використано умову Г) отримуємо

$$\sup_{n \geq 1,\ \varphi \in \Phi} \|I_1(n,\varphi)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Покажемо, що при досить великих n

$$\sup_{\|\varphi\|_\Phi \leq R} \|I_2(n,\varphi)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Використаємо умову А. Завдяки неперервності $\varphi_t(\varphi,z)$ по (t,φ) на множині $K = [-a,a] \times \times B_\Phi[0,R]$ (ця множина компактна, оскільки простір Φ скінченновимірний) функція $\|\varphi_t(\varphi,z)\|_\Phi$ обмежена на K деяким числом γ. Виберемо такий номер n_0, щоб

$$\sup_{n\geq n_0,\ \|\varphi\|_\Phi\leq\gamma}\|u_n(\varphi)-u_0(\varphi)\|_\Phi<\frac{\nu\varepsilon}{2N}. \tag{17}$$

Такий номер існує на підставі (11). Тоді завдяки (17)

$$\sup_{n\geq n_0,\ |\tau|\leq a,\ \|\varphi\|_\Phi\leq R}\|u_n(\varphi_\tau(\varphi,z))-u_0(\varphi_\tau(\varphi,z))\|_X<\frac{\nu\varepsilon}{2N}.$$

Звідси та з (8) випливає (16).

Із (15) і (16) отримуємо

$$\sup_{n\geq n_0,\ \|\varphi\|_\Phi\leq R}\|(\mathcal{G}_z u_n)(\varphi)-(\mathcal{G}_z u_0)(\varphi)\|_X<\varepsilon.$$

Отже, на підставі довільності числа ε виконується співвідношення (12), що означає c-неперервність оператора $\mathcal{G}_z$.

Тепер покажемо, що

$$R(\mathcal{G}_z)\subset C^0(\Phi,X). \tag{18}$$

Зафіксуємо довільну функцію $v\in C^0(\Phi,X)$. Покажемо, що $\mathcal{G}_z v\in C^0(\Phi,X)$.

Розглянемо вектори $\varphi_n\in\Phi,\ n\geq 1$, для яких

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_\Phi=0, \tag{19}$$

і послідовність $v_n=v(\varphi+\varphi_n),\ n\geq 1$, елементів простору $C^0(\Phi,X)$. Завдяки (19) і скінченній розмірності простору Φ

$$v_n\xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\Phi,X)} v \text{ при } n\to\infty. \tag{20}$$

Покажемо, що

$$\mathcal{G}_z v_n\xrightarrow{\text{loc.},\ \mathfrak{M}(\Phi,X)}\mathcal{G}_z v \text{ при } n\to\infty,$$

тобто для кожного числа $r>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|\varphi\|_\Phi\leq r}\|(\mathcal{G}_z v)(\varphi+\varphi_n)-(\mathcal{G}_z v)(\varphi)\|_X=0. \tag{21}$$

Звідси випливатиме неперервність $(\mathcal{G}_z v)(\varphi)$ в кожній точці $\varphi\in\Phi$, тобто включення (18).

Запишемо $(\mathcal{G}_v)(\varphi+\varphi_n)-(\mathcal{G}_z v)(\varphi)$ у вигляді

$$(\mathcal{G}_z v)(\varphi+\varphi_n)-(\mathcal{G}_z v)(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_0(\tau,\varphi+\varphi_n,z)v(\varphi_\tau(\varphi+\varphi_n,z))d\tau-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_0(\tau,\varphi,z)v(\varphi_\tau(\varphi,z))d\tau=A_n(\varphi)+B_n(\varphi),$$

де

$$A_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi, z)(v(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n, z)) - v(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau$$

і

$$B_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (G_0(\tau, \varphi + \varphi_n, z) - G_0(\tau, \varphi, z))v(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n, z))d\tau.$$

На підставі (8) і (20)

$$A_n \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathfrak{M}(\Phi, X)} 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{22}$$

Покажемо, що також

$$B_n \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathfrak{M}(\Phi, X)} 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{23}$$

Використаємо умови А і Б. Завдяки цим умовам та неперервності відображення $P\colon \Phi \to \to L(X, X)$ для кожного числа $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le r,\ \|\varphi\|_\Phi \le r} \|P(\varphi_t(\varphi + \varphi_n, z)) - P(\varphi_t(\varphi, z))\|_{L(X,X)} = 0.$$

Тому внаслідок неперервної залежності розв'язків лінійного рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi, z))X(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

від початкових умов [16, 17] для кожного числа $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le r,\ \|\varphi\|_\Phi \le r} \|\Omega_\tau^0(\varphi + \varphi_n, z) - \Omega_\tau^0(\varphi, z)\|_{L(X,X)} = 0$$

і, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le r,\ \|\varphi\|_\Phi \le r} \|G_0(\tau, \varphi + \varphi_n, z) - G_0(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} = 0 \tag{24}$$

для всіх $r > 0$. Оскільки

$$\|B_n(\varphi)\|_X = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (G_0(\tau, \varphi + \varphi_n, z) - G_0(\tau, \varphi, z))v(\varphi_\tau(\varphi + \varphi_n, z))d\tau \right\|_{L(X,X)} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_0(\tau, \varphi + \varphi_n, z) - G_0(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} d\tau\, \|v\|_{C^0(\Phi,X)},$$

то на підставі (8) і (24)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_\Phi \le r} \|B_n(\varphi)\|_X = 0.$$

Отже, співвідношення (23) виконується. Із (22) і (23) випливає (21).

Лінійність і обмеженість оператора $\mathcal{G}_z$ випливають з означення цього оператора.

Теорему 1 доведено.

5. Оператор $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$. Розглянемо оператор $\mathcal{F}\colon C^0(\Phi, X) \to C^0(\Phi, X)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{F}v)(\varphi) = F(\varphi, v(\varphi)),$$

де $F\colon \Phi \times X \to X$ — те саме відображення, що й у системах рівнянь (1), (2). Внаслідок неперервності F та виконання умови В оператор $\mathcal{F}$ є c-неперервним. Однак цей оператор може не бути неперервним, якщо для деякого додатного числа ρ для функції $F(\varphi, x)$ не виконується умова рівномірної неперервності на множині $\Phi \times B_X[0, \rho]$. Прикладом такого оператора є оператор $\mathcal{F}_1 : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{F}_1 v)(\varphi) = \sin\left(\varphi^3 v(\varphi)\right).$$

При з'ясуванні умов існування X-обмежених інваріантних множин систем рівнянь (1), (2) важливою для подальшого є композиція $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$ операторів $\mathcal{F}$ і Гріна – Самойленка $\mathcal{G}_z$, що завдяки включенню $R(\mathcal{F}) \subset C^0(\Phi, X)$ та теоремі 1 діє в просторі $C^0(\Phi, X)$ і є c-неперервною.

Композицію $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$ можна записати у вигляді

$$((\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v)(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), v(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau. \tag{25}$$

Зауважимо, що завдяки умові В оператор $\mathcal{F}$ є обмеженим, тобто для кожного числа $\rho > 0$ множина $\mathcal{F}\, B_{C^0(\Phi,X)}[0, \rho]$ є обмеженою підмножиною простору $C^0(\Phi, X)$. Тому обмеженим є й оператор $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$.

Будемо вважати, що виконується така умова.

Умова Д. Справджується співвідношення

$$\frac{2N\omega}{\nu} \le r, \tag{26}$$

де N і ν — сталі, що використовуються в умові Г, і

$$\omega = \sup_{v \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]} \|\mathcal{F}v\|_{C^0(\Phi,X)}.$$

Позначимо через $\mathrm{Fix}\,(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})$ множину всіх нерухомих точок оператора $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$.

На підставі (25), (26) та умови Г замкнена куля $B_{C^0(\Phi,X)}[0, r]$ є інваріантною щодо оператора $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$. Тому при виконанні певних умов (див. п. 7)

$$\mathrm{Fix}\,(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}) \neq \varnothing. \tag{27}$$

У подальшому з використанням умови Г ми покажемо існування X-обмежених інваріантних множин системи рівнянь (1).

6. Зв'язок між точками множини $\mathrm{Fix}\,(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})$ і X-обмеженими інваріантними множинами системи рівнянь (2). Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $a\colon \Phi \to \Phi$, $b\colon \Phi \times X \to \Phi$, $P\colon \Phi \to L(X, X)$ *і* $F\colon \Phi \times X \to X$ — *неперервні відображення і виконуються умови* А, Б, В *і* Г.

Тоді кожною точкою $u_z \in \mathrm{Fix}\,(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})$, *де* $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$, *визначається* X*-обмежена інваріантна множина*

$$\mathcal{M}_{u_z} = \{(\varphi, x) \in \Phi \times X : x = u_z(\varphi),\ \varphi \in \Phi\}$$

системи рівнянь (2).

Доведення. Нехай неперервна функція $u_z(\varphi)$ є нерухомою точкою оператора $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$, тобто

$$u_z(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau \tag{28}$$

для всіх $\varphi \in \Phi$. Завдяки умовам В і Г ця функція є елементом простору $C^0(\Phi, X)$.

Покажемо, що функція $u_z(\varphi_t(\varphi, z))$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi, z))x(t) + F(\varphi_t(\varphi, z), x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Використаємо функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi, z)$ (див. (7)), функцію

$$G_t(\tau, \varphi, z) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi, z) P_-(\tau, \varphi, z), & \text{якщо} \quad \tau \le t, \\ -\Omega_\tau^t(\varphi, z) P_+(\tau, \varphi, z), & \text{якщо} \quad \tau > t, \end{cases} \tag{30}$$

для якої на підставі умови Г

$$\|G_t(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} \le N e^{-\nu|t-\tau|}, \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r], \tag{31}$$

а також допоміжні співвідношення

$$\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi, z), z) = \varphi_{\tau+t}(\varphi, z), \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r], \tag{32}$$

$$G_0(\tau, \varphi_t(\varphi, z), z) = G_t(\tau + t, \varphi, z), \quad \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r], \tag{33}$$

$$G_t(t - 0, \varphi, z) - G_t(t + 0, \varphi, z) = I, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r], \tag{34}$$

і

$$\frac{dG_t(\tau, \varphi, z)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi, z))G_t(\tau, \varphi, z), \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad t \ne \tau, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]. \tag{35}$$

Ці співвідношення випливають із властивостей розв'язків диференціальних рівнянь (див. [16]) та означення функції $G_t(\tau, \varphi, z)$.

Завдяки співвідношенням (28), (32) і (33)

$$u_z(\varphi_t(\varphi, z)) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi, z), z) F(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi, z), z), u_z(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi, z))))d\tau \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau + t, \varphi, z) F(\varphi_{\tau+t}(\varphi, z), u_z(\varphi_{\tau+t}(\varphi, z)))d\tau \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau.$$

Тому

$$u_z(\varphi_t(\varphi, z)) \equiv \int\limits_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau. \tag{36}$$

Диференціюючи обидві частини цієї тотожності по t і враховуючи співвідношення (34), (35), отримуємо

$$\frac{du_z(\varphi_t(\varphi, z))}{dt} \equiv G_t(t-0, \varphi, z) F(\varphi_t(\varphi, z), u_z(\varphi_t(\varphi, z)))+$$
$$+P(\varphi_t(\varphi, z)) \int\limits_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau -$$
$$-G_t(t+0, \varphi, z) F(\varphi_t(\varphi, z), u_z(\varphi_t(\varphi, z)))+$$
$$+P(\varphi_t(\varphi, z)) \int\limits_{t}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), u_z(\varphi_\tau(\varphi, z)))d\tau \equiv$$
$$\equiv P(\varphi_t(\varphi, z)) u_z(\varphi_t(\varphi, z)) + F(\varphi_t(\varphi, z), u(\varphi_t(\varphi, z))).$$

Операцію диференціювання можна застосовувати до правої частини тотожності (36) на підставі (31), (35), умов А, Б і неперервності відображення $P\colon \Phi \to L(X, X)$.

Отже, функція $x = u_z(\varphi_t(\varphi, z))$ є розв'язком диференціального рівняння (29).

Далі виберемо довільну точку $(\varphi_0, x_0) \in \mathcal{M}_{u_z}$. З означення множини $\mathcal{M}_{u_z}$ випливає, що $x_0 = u_z(\varphi_0)$. Тоді $\varphi = \varphi_t(\varphi_0, z)$, $x = u_z(\varphi_t(\varphi_0, z))$ — розв'язок системи (2), для якого $\varphi(0) = \varphi_0$, $x(0) = x_0$ і $(\varphi_t(\varphi_0, z), u_z(\varphi_t(\varphi_0, z))) \in \mathcal{M}_{u_z}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Звідси з урахуванням включення $u_z \in C^0(\Phi, X)$ випливає, що $\mathcal{M}_{u_z}$ — X-обмежена інваріантна множина системи диференціальних рівнянь (2).

Теорему 2 доведено.

7. Умови виконання співвідношення (27). Спочатку наведемо твердження про нерухомі точки c-цілком неперервних операторів.

Оператор $\mathcal{A}\colon C^0(\Phi, X) \to C^0(\Phi, X)$ називається *c-цілком неперервним*, якщо цей оператор c-неперервний і для кожних чисел $R > 0$ і $a > 0$ всі функції $z \in \mathcal{A}B_{C^0(\Phi,X)}[0, a]$ рівностепенево неперервні [18] на кулі $B_\Phi[0, R]$.

Важливим для подальшого є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай оператор $\mathcal{A}\colon C^0(\Phi, X) \to C^0(\Phi, X)$ c-цілком неперервний і замкнена куля $B_{C^0(\Phi,X)}[0, \rho]$ інваріантна по відношенню до цього оператора.*

Тоді оператор $\mathcal{A}$ має хоча б одну нерухому точку $z^* \in B_{C^0(\Phi,X)}[0, \rho]$.

Доведення. Використаємо неперервний оператор P_R, що діє в просторі $C^0(\Phi, X)$ і визначається рівністю

$$(P_Rx)(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi), & \text{якщо} \quad \|\varphi\|_\Phi < R, \\ \left(2 - \dfrac{\|\varphi\|_\Phi}{R}\right) x(\varphi), & \text{якщо} \quad R \le \|\varphi\|_\Phi \le 2R, \\ 0, & \text{якщо} \quad \|\varphi\|_\Phi > 2R, \end{cases}$$

де R — довільне додатне число.

Розглянемо оператор $P_R\mathcal{A}\colon B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho] \to B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho]$. Оскільки оператор $\mathcal{A}$ c-цілком неперервний, то оператор $P_R\mathcal{A}$ неперервний і цілком неперервний. Куля $B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho]$ є інваріантною по відношенню до цього оператора. Тому для кожного $R > 0$ за теоремою Шаудера про нерухому точку [19]

$$\operatorname{Fix}(P_R\mathcal{A}) \bigcap B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho] \ne \varnothing.$$

Розглянемо додатні числа $R_n > 0$, $n \ge 1$, для яких $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$. Нехай z_n^* — нерухома точка оператора $P_{R_n}\mathcal{A}$, тобто

$$P_{R_n}\mathcal{A}z_n^* = z_n^*, \tag{37}$$

і

$$\|z_n^*\|_{C^0(\Phi,X)} \le \rho.$$

Оскільки оператор $\mathcal{A}$ c-цілком неперервний і простір Φ скінченновимірний, то існують функція $z^* \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho]$ і зростаюча послідовність $(n_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел, для яких

$$z_{n_k}^* \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} z^* \text{ при } k \to \infty. \tag{38}$$

Покажемо, що

$$\mathcal{A}z^* = z^*. \tag{39}$$

Згідно з (37)

$$\mathcal{A}z^* - z^* = \left(\mathcal{A}z^* - \mathcal{A}z_{n_k}^*\right) + \left(\mathcal{A}z_{n_k}^* - P_{R_{n_k}}\mathcal{A}z_{n_k}^*\right) + \left(z_{n_k}^* - z^*\right), \quad k \ge 1.$$

Оскільки

$$\mathcal{A}z^* - \mathcal{A}z_{n_k}^* \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$\mathcal{A}z_{n_k}^* - P_{R_{n_k}}\mathcal{A}z_{n_k}^* \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} 0 \text{ при } k \to \infty$$

і

$$z_{n_k}^* - z^* \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} 0 \text{ при } k \to \infty$$

(тут враховано (38), c-неперервність оператора $\mathcal{A}$ та означення оператора P_R), то справджується рівність (39).

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що у випадку $\dim\Phi = 1$ твердження, аналогічні теоремі 3, було розглянуто в [14, 20, 21].

Далі наведемо одне важливе твердження, що отримується за допомогою теореми 3. Будемо вважати, що виконується така умова.

Умова Е. Для кожного числа $\theta > 0$ існують такі числа $\mu \in (0,1)$ і $K > 0$, що для довільних функцій $v \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]$ і $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ справджується співвідношення

$$\|((\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v)(\varphi) - ((\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v)(\tilde{\varphi})\|_\Phi \leq K \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\Phi^\mu$$

для всіх $\varphi, \tilde{\varphi} \in B_\Phi[0,\theta]$, для яких $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\Phi \leq 1$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* А, Б, В, Г, Д *і* Е.

Тоді для кожної функції $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$

$$\mathrm{Fix}\,(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}) \bigcap B_{C^0(\Phi,X)}[0,r] \neq \varnothing. \tag{40}$$

Доведення. Завдяки умові Е для кожної функції $z \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ всі елементи множини $\{(\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v \in C^0(\Phi,X) : v \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\}$ рівностепенево неперервні на Φ. Тому c-неперервний оператор $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$ (на підставі теореми 1, в якій використано умови А, Б, Г, та c-неперервності оператора $\mathcal{F}$ (див. п. 5, де використано умову В)) є неперервним і c-цілком неперервним. Замкнена куля $B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]$ інваріантна по відношенню до оператора $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$ (завдяки умові Д). Тому за теоремою 3 справджується співвідношення (40).

Теорему 4 доведено.

Зауважимо, що функція $u_z \in C^0(\Phi,X)$ як нерухома точка оператора $\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F}$ може не бути диференційовною за змінною φ навіть у випадку аналітичних $a,\ b,\ P$ і F. Такою властивістю наділено систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\sin\varphi, \\ \frac{dx}{dt} &= -x + \sin\varphi, \end{aligned} \tag{41}$$

досліджену в [22] (див. також [1, с. 125; 23]). Однак складна функція $u_z(\varphi_t(\varphi,z))$ завжди є неперервно диференційовною за змінною t. Умова Е у випадку системи (41) виконується.

8. Умови існування інваріантної $\boldsymbol{X}$-обмеженої множини системи рівнянь (1). Будемо вважати, що виконуються умови А, Б, В, Г, Ґ, Д і Е. Ці умови завдяки попереднім твердженням дадуть змогу розглянути і дослідити оператор

$$\mathfrak{A} : B_{C^0(\Phi,X)}[0,r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r] \to B_{C^0(\Phi,X)}[0,r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r],$$

що визначається рівністю

$$(\mathfrak{A}(v,z))(\varphi,t) = ((\mathfrak{A}_1(v,z))(\varphi), (\mathfrak{A}_2(v,z))(t)), \tag{42}$$

де з урахуванням результатів п. 6

$$\begin{gathered} (\mathfrak{A}_1(v,z))(\varphi) = ((\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v)(\varphi) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi,z) F(\varphi_\tau(\varphi,z), v(\varphi_\tau(\varphi,z)))d\tau, \end{gathered} \tag{43}$$

$$(\mathfrak{A}_2(v,z))(t) = (\mathfrak{A}_1(v,z))(\varphi_t(\varphi,z)) = ((\mathcal{G}_z \circ \mathcal{F})v)(\varphi_t(\varphi,z)) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau,\varphi,z)F(\varphi_\tau(\varphi,z), v(\varphi_\tau(\varphi,z)))d\tau \tag{44}$$

і $(v,z) \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$.

На підставі теореми 2 задача знаходження інваріантної X-обмеженої множини системи рівнянь (1) зводиться до задачі знаходження нерухомих точок оператора $\mathfrak{A}$. Існування нерухомих точок цього оператора ми встановимо за допомогою наступного твердження, що аналогічне теоремі 3.

Теорема 5. *Нехай* $\mathfrak{B}\colon C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X) \to C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X)$ — *c-цілком неперервний оператор і множина* $B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,\rho]$ *інваріантна по відношенню до цього оператора.*

Тоді оператор $\mathfrak{B}$ *має хоча б одну нерухому точку* $(v^*,z^*) \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,\rho]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,\rho]$.

Обґрунтування цього твердження ми не наводимо, оскільки воно аналогічне доведенню теореми 3. Обмежимося лише наведенням означення c-цілком неперервності оператора $\mathfrak{B}$.

Оператор $\mathfrak{B}\colon C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X) \to C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X)$ c-цілком неперервний, якщо цей оператор c-неперервний і для кожних чисел $R>0$ і $a>0$ всі функції

$$(v,z) \in \mathfrak{B}(B_{C^0(\Phi,X)}[0,a]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,a])$$

рівностепенево неперервні на $B_\Phi[0,R]\times[-R,R]$.

Далі покажемо, що оператор $\mathfrak{A}$ має такі властивості:

1) замкнена опукла множина $B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$ інваріантна щодо $\mathfrak{A}$;

2) оператор $\mathfrak{A}$ c-цілком неперервний.

Справді, перша властивість оператора $\mathfrak{A}$ виконується завдяки умові Д.

Встановимо правильність другої властивості оператора $\mathfrak{A}$. Тут ми використаємо умови А, Б, В, Г, Ґ, Д і Е.

Спочатку покажемо c-неперервність оператора $\mathfrak{A}$. Згідно з рівностями (42)–(44) цей оператор c-неперервний тоді і лише тоді, коли аналогічну властивість мають оператори $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$.

Покажемо c-неперервність оператора $\mathfrak{A}_1$.

Розглянемо довільні $(v,z),(v_n,z_n) \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$, $n\geq 1$, для яких

$$v_n \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} v \text{ при } n\to\infty \tag{45}$$

і

$$z_n \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\mathbb{R},X)} z \text{ при } n\to\infty. \tag{46}$$

Покажемо, що

$$(\mathcal{G}_{z_n}\circ\mathcal{F})\,v_n \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\Phi,X)} (\mathcal{G}_z\circ\mathcal{F})\,v \text{ при } n\to\infty. \tag{47}$$

Згідно з (43)

$$((\mathcal{G}_{z_n}\circ\mathcal{F})v_n)(\varphi) - ((\mathcal{G}_z\circ\mathcal{F})v)(\varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi,z_n) F\left(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))\right) d\tau -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi,z) F\left(\varphi_\tau(\varphi,z), v(\varphi_\tau(\varphi,z))\right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(G_0(\tau,\varphi,z_n) - G_0(\tau,\varphi,z)\right) F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi,z) \left(F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))) - F(\varphi_\tau(\varphi,z), v(\varphi_\tau(\varphi,z)))\right) d\tau. \tag{48}$$

Оскільки $(v_n, z_n) \in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r],\ n \geq 1$, то на підставі умови Д

$$\sup_{n\geq 1,\ \varphi\in\Phi} \|F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n)))\|_X \leq \omega.$$

Тому

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (G_0(\tau,\varphi,z_n) - G_0(\tau,\varphi,z)) F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))) d\tau \right\|_X \leq$$

$$\leq \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_0(\tau,\varphi,z_n) - G_0(\tau,\varphi,z)\|_{L(X,X)}.$$

Звідси з урахуванням умови Ґ і співвідношень (8), (46) отримуємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (G_0(\tau,\varphi,z_n) - G_0(\tau,\varphi,z)) F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))) d\tau \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\Phi,X)} 0 \tag{49}$$

при $n \to \infty$.

Далі покажемо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi,z)(F(\varphi_\tau(\varphi,z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi,z_n))) -$$

$$- F(\varphi_\tau(\varphi,z), v(\varphi_\tau(\varphi,z)))) d\tau \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\Phi,X)} 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{50}$$

Зафіксуємо множину $[-T,T] \times B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]$, де T — довільне додатне число. На підставі (46) та умови А

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\leq T,\ \|\varphi\|_\Phi \leq r} \|\varphi_\tau(\varphi,z_n) - \varphi_\tau(\varphi,z)\|_\Phi = 0, \tag{51}$$

а на підставі (45) і (51)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le T,\ \|\varphi\|_\Phi\le r} \|v_n(\varphi_\tau(\varphi, z_n)) - v(\varphi_\tau(\varphi, z))\|_\Phi = 0.$$

Тому завдяки неперервності функції $F(\varphi, x)$ на $[-T, T] \times B_{C^0(\Phi,X)}[0, r]$, а отже і рівномірної неперервності функції $F(\varphi, x)$ на цій множині,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\tau|\le T,\ \|\varphi\|_\Phi\le r} \|F(\varphi_\tau(\varphi, z_n), v_n(\varphi_\tau(\varphi, z_n))) - F(\varphi_\tau(\varphi, z), v(\varphi_\tau(\varphi, z)))\|_\Phi = 0.$$

Звідси, з нерівності (8) і довільності вибору числа T випливає (50). На підставі (48)–(50) отримуємо (47).

Отже, оператор $\mathfrak{A}_1$ є c-неперервним.

Оператор $\mathfrak{A}_2$ також є c-неперервним.

Звернемо увагу на те, що співвідношення (43) і (44), що визначають оператори $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$, відрізняються лише операторними множниками $G_0(\tau, \varphi, z)$ і $G_t(\tau, \varphi, z)$ в невласних інтегралах. Тому обґрунтування c-неперервності оператора $\mathfrak{A}_2$ аналогічне обґрунтуванню c-неперервності оператора $\mathfrak{A}_1$. Потрібно лише замість умови Ґ використати аналогічну умову виконання співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le T,\ |\tau|\le T,\ \|\varphi\|_\Phi\le\theta} \|G_t(\tau, \varphi, z_n) - G_t(\tau, \varphi, z)\|_{L(X,X)} = 0 \tag{52}$$

при довільних $\theta > 0$ і $T > 0$ у випадку

$$z_n \xrightarrow{\text{loc., } C^0(\mathbb{R},X)} z \text{ при } n \to \infty,$$

а також нерівність (31). Співвідношення (52) випливає з умови Ґ та означення функції $G_t(\tau, \varphi, z)$ (див. (30)).

Згідно з цим зауваженням обґрунтування c-неперервності оператора $\mathfrak{A}_2$ ми не наводимо.

Із c-неперервності операторів $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ випливає c-неперервність оператора $\mathfrak{A}$.

Покажемо, що оператор $\mathfrak{A}$ c-цілком неперервний. Очевидно, що цей оператор c-цілком неперервний тоді й лише тоді, коли аналогічну властивість мають оператори $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$.

Оператор $\mathfrak{A}_1$ c-цілком неперервний завдяки умові Е.

Оператор $\mathfrak{A}_2$ також c-цілком неперервний. Справді, для кожної пари функцій $(v, z) \in$ $\in B_{C^0(\Phi,X)}[0, r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$ диференційовна по t функція

$$V_{v,z}(t) = (\mathfrak{A}_2(v, z))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi, z) F(\varphi_\tau(\varphi, z), v(\varphi_\tau(\varphi, z))) d\tau,$$

яка на підставі першої властивості оператора $\mathfrak{A}$ є елементом кулі $B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$, згідно з наведеними в п. 6 міркуваннями задовольняє співвідношення

$$\frac{dV_{v,z}(t)}{dt} \equiv P(\varphi_t(\varphi, z)) V_{v,z}(t) + F(\varphi_t(\varphi, z), v(\varphi_t(\varphi, z))). \tag{53}$$

Оскільки $V_{v,z} \in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$ для всіх $(v, z) \in B_{C^0(\Phi,X)}[0, r] \times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0, r]$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ (v,z)\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]} \|F(\varphi_t(\varphi,z),v(\varphi_t(\varphi,z)))\|_X < +\infty$$

на підставі умови В і

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ z\in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]} \|P(\varphi_t(\varphi,z))\|_{L(X,X)} < +\infty$$

на підставі умови Б, то для правої частини тотожності (53) маємо

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ (v,z)\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]} \|P(\varphi_t(\varphi,z))V_{v,z}(t)+$$

$$+F(\varphi_t(\varphi,z),v(\varphi_t(\varphi,z)))\|_X < +\infty.$$

Тому

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ (v,z)\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]} \left\|\frac{dV_{v,z}(t)}{dt}\right\|_X < +\infty. \tag{54}$$

Отже, всі функції з множини

$$\left\{(\mathfrak{A}_2(v,z))(t) : (v,z)\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]\right\}$$

не лише рівномірно обмежені на $\mathbb{R}$ за першою властивістю оператора $\mathfrak{A}$, а і рівностепенево неперервні на $\mathbb{R}$ завдяки (54). Це означає, що оператор $\mathfrak{A}_2$ c-цілком неперервний.

Отже, друга властивість оператора $\mathfrak{A}$ також є правильною.

Зауважимо, що при дослідженні властивостей оператора $\mathfrak{A}$ також використано умову Г (неявно), що підтверджується використанням функції Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi,z)$.

На підставі теореми 5 і наведених властивостей оператора $\mathfrak{A}$ справджується така теорема.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* А, Б, В, Г, Ґ, Д *і* Е.

Тоді оператор $\mathfrak{A}\colon C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X)\to C^0(\Phi,X)\times C^0(\mathbb{R},X)$ *має хоча б одну нерухому точку* $\left(v^*,z^*\right)\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]\times B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$.

Із цієї теореми випливає, що є хоча б одна пара функцій $v^*\in B_{C^0(\Phi,X)}[0,r]$ і $z^*\in$ $\in B_{C^0(\mathbb{R},X)}[0,r]$, для яких

$$\left(\mathcal{G}_{z^*}\circ\mathcal{F}\right)v^* = v^*,$$

$$\left(\left(\mathcal{G}_{z^*}\circ\mathcal{F}\right)v^*\right)\left(\varphi_t\left(\varphi,z^*\right)\right)\equiv z^*(t)$$

і, отже,

$$v^*\left(\varphi_t\left(\varphi,z^*\right)\right)\equiv z^*(t).$$

Це означає, що

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)+b\left(\varphi,z^*\right),$$

$$\frac{dz^*}{dt} = P(\varphi)z^* + F\left(\varphi,z^*\right), \quad t\in\mathbb{R},$$

а згідно з теоремою 2 множина

$$\mathcal{M}_{v^*_{z^*}} = \{(\varphi,x)\in\Phi\times X : x = v^*_{z^*}(\varphi),\ \varphi\in\Phi\}$$

є інваріантною X-обмеженою множиною системи рівнянь (1).

Література

1. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, Москва (1987).
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва (1972).
3. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
4. М. О. Перестюк, В. Ю. Слюсарчук, *Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **61**, № 7, 948 – 957 (2009).
5. Э. Мухамадиев, *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*, Мат. заметки, **11**, № 3, 269 – 274 (1972).
6. Э. Мухамадиев, *Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений*, Мат. заметки, **30**, № 3, 443 – 460 (1981).
7. В. Е. Слюсарчук, *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов*, Мат. сб., **116**, № 4, 483 – 501 (1981).
8. В. Е. Слюсарчук, *Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 8, 34 – 37 (1981).
9. В. Е. Слюсарчук, *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов*, Мат. сб., **130**, № 1, 86 – 104 (1986).
10. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов*, Мат. заметки, **42**, № 2, 262 – 267 (1987).
11. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов*, Укр. мат. журн., **41**, № 2, 201 – 205 (1989).
12. В. Г. Курбатов, *Линейные дифференциально-разностные уравнения*, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж (1990).
13. В. Е. Слюсарчук, *Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем*, Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе, 102 – 103 (1987).
14. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений*, Укр. мат. журн., **39**, № 5, 660 – 662 (1987).
15. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2006).
16. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк, *Диференціальні рівняння*, Либідь, Київ (2003).
17. В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва (1971).
18. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
19. Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, Москва (1977).
20. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения импульсных систем*, Мат. физика и нелиней. механика, вып. 15, 32 – 35 (1991).
21. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **61**, № 11, 1541 – 1556 (2009).
22. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследование линейных систем дифференциальных уравнений с помощью квадратичных форм*, Препринт, ИМ АН УССР, Киев, № 82.10 (1982).
23. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).

Одержано 23.12.20