ОТ РЕДАКЦИИ. В последнее время начата разработка и изучение рукописей выдающегося математика Г. Ф. Вороного (1868—1908), переданных Государственной Публичной библиотеке УССР его семьей. В связи с этим были обнаружены неопубликованные материалы, представляющие весьма значительный научный интерес. Редакция „Украинского математического журнала" считает целесообразным опубликование части научного дневника Г. Ф. Вороного — „Заметки о неопределенных квадратичных формах" и „О неопределенных квадратичных формах". Первая из указанных статей упоминалась в обзорах научного творчества Г. Ф. Вороного, но до настоящего времени считалась утерянной. Значительная часть научного дневника Вороного будет включена в третий том полного собрания его сочинений, к изданию которого приступила Академия наук Украинской ССР.

Публикуемые здесь рукописи подготовлены к печати проф. Б. А. Венковым, написавшим также сопроводительную статью. Редакция журнала выражает проф. Б. А. Венкову глубокую благодарность.

Заметки о неопределенных квадратичных формах

Г. Ф. Вороной

Новочеркасск.
20 февраля 1908 г.

Давно я размышляю над вопросами, относящимися к арифметической теории неопределенных квадратичных форм. Я пришел к некоторым выводам, которые пытаюсь привести в порядок.

Предположим, что рассматривается квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

с действительными коэфициентами и определителем

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

не равным нулю.

Форма $\Sigma a_{ij} x_i x$ может быть представлена в виде

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{\mu} u_k^2 - \sum_{h=1}^{n-\mu} v_h^2,$$

где

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i \qquad k=1, 2, \ldots, \mu$$

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ih} x_i \qquad h=1, 2, \ldots, n-\mu$$

линейные формы с действительными коэфициентами.

Обозначим $n-\mu=\nu$. Если числа μ и ν не равны нулю, форма $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ называется неопределенной. Известно, что никакими действительными линейными преобразованиями числа μ и ν не могут быть изменены.

Введем в рассмотрение μ систем $(p_{1k}, \ldots, p_{nk})$, $k=1, 2, \ldots, \mu$ чисел, удовлетворяющих уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ih} p_{ik} = 0 \quad k=1, 2, \ldots, \quad \mu, \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Будем предполагать, что системы $(p_{1k}, \ldots, p_{nk})$, $k=1, 2, \ldots, \mu$ независимые.

Обозначим

$$x_i = \sum_{k=1}^{\mu} p_{ik} \varrho_k \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ преобразуется в квадратичную форму с μ переменными

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k^2 = \varphi(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu),$$

где

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \sum_{h=1}^{\mu} p_{ih} \varrho_h \qquad k=1, 2, \ldots, \mu.$$

Определитель квадратичной формы $\varphi(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu)$ не равен нулю.

Допуская противное, мы нашли бы систему значений $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu$, не равных нулю одновременно, удовлетворяющих условию

$$\lambda_k = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu.$$

Но тогда мы имели бы систему значений $x_1, \ldots, x_n$, не равных нулю одновременно, удовлетворяющих условиям

$$u_k = 0 \quad k=1, 2, \ldots, \mu \text{ и } v_h = 0 \quad h=1, 2, \ldots, \nu,$$

что невозможно, так как определитель этих линейных форм равен $\pm\sqrt{D}$.

Прихожу к следующему результату:

Квадратичная форма $\varphi(\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu)$ положительная.

Подобным же образом нахожу системы $(q_{1h}, \ldots, q_{nh})$, $h=1, 2, \ldots, \nu$ по уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} q_{ih} = 0 \quad k=1, 2, \ldots, \mu, \quad h=1, 2, \ldots, \nu$$

и, полагая

$$x_i = \sum_{h=1}^{\nu} q_{ih} \varrho_h,$$

получу квадратичную форму

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{h=1}^{\nu} \lambda_h^2 = \psi(\varrho_1, \ldots, \varrho_\nu)$$

отрицательную.

Системы $(p_{1k}, \ldots, p_{nk})$ $k=1, 2, \ldots, \mu$ мы можем заменять им эквивалентными, полагая

$$p'_{ik} = \sum_{r=1}^{\mu} p_{ir} \delta_r^{(k)} \qquad k=1, 2, \ldots, \mu$$

при одном условии, чтобы определитель $|\delta_r^{(k)}|$ не был равен нулю.

При этом условии можно высказать следующее предложение.

Системе $(p_{1k}, \ldots, p_{nk})$ $k=1, 2, \ldots, \mu$ соответствует вполне определенная система $(q_{1h}, \ldots, q_{nh})$ $h=1, 2, \ldots, \nu$ и наоборот.

В самом деле, если не считать различными системы функций $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$, которые получаются линейным преобразованием, то можно сказать, что каждая система функций $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ определяет системы $(q_{1h}, \ldots, q_{nh})$, $h=1, \ldots, \nu$ по уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} q_{ih} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu; \quad h=1, 2, \ldots, \nu$$

и обратно. То же самое относится и к функциям $v_1, \ldots, v_\nu$ и системам $(p_{1k}, \ldots, p_{nk})$, $k=1, 2, \ldots, \mu$, связанным уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ih} p_{ik} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu; \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Заметим теперь, что в этом смысле функции $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ вполне определяют функции $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$.

Из предыдущего следует, что каждая система функций $u_1, \ldots, u_\mu$ определяет системы $(q_{1h}, \ldots, q_{nh})$, $h=1, 2, \ldots, \nu$, причем соответствующая форма $\psi(\varrho_1, \ldots, \varrho_\nu)$ отрицательная. Обратное замечание также справедливо. Пусть $(q_{1h}, \ldots, q_{nh})$, $h=1, 2, \ldots, \nu$ какие-нибудь системы, удовлетворяющие условию, что, полагая

$$x_i = \sum_{h=1}^{\nu} q_{ih} \varrho_h,$$

получим $f(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\varrho_1, \ldots, \varrho_\nu)$ и форма $\psi(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ будет отрицательная.

Определим функции $u_1, \ldots, u_\mu$ по условиям

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} q_{ih} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu; \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

При этом не считаем различными системы функций $u'_1, \ldots, u'_\mu$ эквивалентные, т. е. если

$$u'_k = \sum_{h=1}^{\mu} u_h \delta_h^{(k)} \qquad k=1, 2, \ldots, \mu,$$

где определитель $|\delta_h^{(k)}|$ не нуль.

В этом смысле предыдущие равенства определяют одну систему функций.

С помощью данной системы (q_{ih}) $h=1, 2, \ldots, \nu$ определяем какую-нибудь систему (p_{ik}) $k=1, 2, \ldots, \mu$ так, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} p_{11} \cdots p_{1\mu} q_{11} \cdots q_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{n\mu} q_{n1} \cdots q_{n\nu} \end{vmatrix}$$

не был нулем и преобразуем форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой

$$x_i = \sum_{k=1}^{\mu} p_{ik} x'_k + \sum_{h=1}^{\nu} q_{ih} y'_h.$$

Получим форму

$$f'(x'_1, \ldots, x'_\mu, y'_1, \ldots, y'_\nu).$$

Здесь по условию

$$f'(0, \ldots, 0, y'_1, \ldots, y'_\nu) = \psi(y'_1, \ldots, y'_\nu)$$

отрицательная квадратичная форма.

Известным способом определяем линейные функции:

$$\eta_h = y'_h + \sum_{k=1}^{\mu} \varepsilon_{kh} x'_k \qquad h=1, 2, \ldots, \nu$$

так, чтобы

$$f'(x'_1, \ldots, x'_\mu, y'_1, \ldots, y'_\nu) = \psi(\eta_1, \ldots, \eta_\nu) + \varphi(x'_1, \ldots, x'_\mu);$$

форма $\varphi(x'_1, \ldots, x'_\mu)$ непременно будет положительной.

Возвращаясь обратно, получим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) + \psi(v_1, \ldots, v_\nu).$$

Здесь функции $u_1, \ldots, u_\mu$ удовлетворяют условиям, что

$$\sum a_{ik} q_{ih} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Заметим, что, когда даны функции $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$, то в предыдущем равенстве функция $\varphi(u_1, \ldots, u_\mu)$ имеет вполне определенные коэфициенты.

Рассматриваю вопрос вообще. Предположим, что даны μ линейных функций

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i \qquad k=1, 2, \ldots, \mu,$$

удовлетворяющих условию, что уравнения

$$u_k = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu$$

определяют плоскость $n-\mu=\nu$ измерений.

Определим коэфициенты квадратичной формы $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)$ таким образом, чтобы разность

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)$$

представляла квадратичную форму $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ некоторых линейных функций $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$. Обозначаем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\mu) + \psi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu).$$

Берем диференциалы по переменным независимым $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}du_k + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\frac{\partial \psi}{\partial v_h}dv_h.$$

Предполагая, что переменным $x_1, \ldots, x_n$ даны значения, обращающие в нуль $v_1, \ldots, v_\nu$, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial v_h} = 0 \qquad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Поэтому,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}du_k;$$

но

$$du_k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}dx_i$$

и поэтому

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\alpha_{ik}dx_i.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\alpha_{ik} \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Функции $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ непременно образуют независимую систему, так как уравнения

$$v_1=0, \quad v_2=0, \ldots, v_\nu=0$$

определяют плоскость μ измерений, причем определитель n систем

$$u_1, \ldots, u_\mu \ \text{ и } \ v_1, \ldots, v_\nu$$

не равен нулю. Поэтому, при условии $v_1=0,\ldots,v_\nu=0$ можем положить

$$x_i=\sum_{k=1}^{\mu}\lambda_{ik}u_k.$$

Обозначим

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum a_{ij}x_ix_j,$$

$$\varphi(u_1,\ldots,u_\mu)=\sum p_{rs}u_ru_s.$$

Получаем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\sum_{r=1}^{\mu}\lambda_{ir}u_r=\sum_{r=1}^{\mu}u_r\sum_{s=1}^{\mu}\alpha_{ks}p_{rs},\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\lambda_{ir}=\sum_{s=1}^{\mu}p_{rs}\alpha_{ks}\qquad k=1,2,\ldots,n;\quad r=1,2,\ldots,\mu.$$

Подставляя выражения x_i в формулы для u_r, получим

$$u_r=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ir}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{\mu}\alpha_{ir}\lambda_{is}u_s.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ir}\lambda_{is}=\sigma\left(\frac{r}{s}\right);\qquad r=1,2,\ldots,\mu;\quad s=1,2,\ldots,\mu$$

где $\sigma\left(\frac{r}{s}\right)=0$, если $r\neq s$ и $\sigma\left(\frac{r}{s}\right)=1$, если $r=s$.

Из полученных уравнений без труда определяем функцию $\varphi(u_1,\ldots,u_\mu)$ при некоторых ограничениях для функций $u_1,u_2,\ldots,u_\mu$. Обозначим через $A_{ij}=A_{ji}$ числа, определяемые по условиям

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ih}=\sigma\left(\frac{k}{h}\right)\qquad k=1,2,\ldots,n;\quad h=1,2,\ldots,n.$$

Тогда из уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\lambda_{ir}=\sum_{s=1}^{\mu}p_{rs}\alpha_{ks}$$

следует

$$\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\lambda_{ir}=\sum_{s=1}^{\mu}p_{rs}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ks}A_{kj}=\lambda_{jr}\qquad \begin{matrix}j=1,2,\ldots,n\\ r=1,2,\ldots,\mu\end{matrix}$$

Умножая на α_{jh}, складываем

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jh}\lambda_{jr}=\sum_{s=1}^{\mu}p_{rs}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{kj}\alpha_{ks}\alpha_{jh}=\sigma\left(\frac{h}{r}\right)\qquad \begin{matrix}r=1,2,\ldots,\mu\\ h=1,2,\ldots,\mu\end{matrix}$$

Обозначим

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} A_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jh} = P_{kh} \qquad k=1,2,\ldots,\mu; \quad h=1,2,\ldots,\mu.$$

Очевидно

$$P_{kh} = P_{hk}.$$

Предположим, что определитель квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{\mu} P_{kh} u_k u_h$$

не равен нулю, тогда p_{kh} представляют коэфициенты формы сопряженной.

Если определитель формы $\Sigma P_{kh} u_k u_h$ нуль, задача невозможна.

Таким путем я пришел к определению полярных плоскостей измерений μ и $n-\mu$.

Пусть попрежнему $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ данная система функций, определяющих уравнениями

$$P) \quad u_k = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu$$

плоскость P, $n-\mu=\nu$ измерений.

Определим числа β_{ih} по уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} \beta_{ih} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu; \quad h=1, 2, \ldots, \nu,$$

где

$$p_{ik} = \sum_{h=1}^{n} A_{ih} \alpha_{hk} \qquad i=1,2,\ldots,n; \quad k=1, 2, \ldots, \mu.$$

Обозначая

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ih} x_i \qquad h=1, 2, \ldots, \nu,$$

получим функции, которые определяют уравнениями

$$Q) \quad v_h = 0 \qquad h=1, 2, \ldots, \nu$$

плоскость Q, μ измерений.

Плоскости P и Q я называю взаимно полярными или сопряженными.

Найдем полярную плоскость, соответствующую плоскости Q. Сначала определим значения

$$q_{ih} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \beta_{kh} \qquad h=1, 2, \ldots, \nu; \quad i=1, 2, \ldots, n$$

и определяем числа α'_{ik}, $k=1, 2, \ldots, \mu$ по уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ih} \alpha'_{ik} = 0 \qquad k=1, 2, \ldots, \mu; \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Я утверждаю, что система (α_{ik}) им удовлетворяет. В самом деле

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ih}\alpha_{ir} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\beta_{kh}\alpha_{ir} = \sum_{k=1}^{n}\beta_{kh}p_{kr} = 0.$$

В тех случаях, когда определитель пары сопряженных плоскостей P и Q не равен нулю, имеет место равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) + \psi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu).$$

Вводим в рассмотрение квадратичную форму с μ переменными, получаемую из f подстановкой

$$x_i = \sum_{k=1}^{\mu} p_{ik}\varrho_k.$$

Получим форму с коэфициентами

$$P_{rs} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_{ir}p_{js} \qquad r=1, 2, \ldots, \mu; \quad s=1, 2, \ldots, \mu.$$

Из равенств

$$p_{ir} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{jr}$$

следует

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_{ir} = \alpha_{jr} \quad \text{и} \quad P_{rs} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}p_{js} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ir}\alpha_{is}.$$

Поэтому форма $\Sigma\Sigma P_{kh}\varrho_k\varrho_h$ сопряженная с формой $\varphi(u_1, \ldots, u_\mu)$.

Если определитель формы $\Sigma\Sigma P_{kh}\varrho_k\varrho_h$ не равен нулю, то и формы φ также.

Если форма $\Sigma\Sigma P_{kh}\varrho_k\varrho_h$ определенная, то и форма $\varphi(u_1, \ldots, u_\mu)$ будет также определенной.

Из предыдущего я вывожу следующее заключение. Предположим, что

$$u_k = \sum_{h=1}^{\mu}\delta_{kh}u'_h$$

и

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) = \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu).$$

На основании предыдущего

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) = \psi(v_1, \ldots, v_\nu).$$

Следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) = \psi(v_1, \ldots, v_\nu).$$

Поэтому, применяя к функциям $u'_1, \ldots, u'_\mu$ вышеизложенный способ, мы получили бы функцию $\varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu)$, удовлетворяющую равенству

$$\varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu).$$

Обозначим

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \psi(v_1, \ldots, v_\nu) = \sum \beta_{ij} x_i x_j.$$

Мы получаем разложение формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ на сумму двух квадратичных форм, которые определяются вполне плоскостью

$$P) \quad u_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \mu$$

или сопряженною с ней плоскостью

$$Q) \quad v_h = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Предположим, что подстановка S преобразует форму f в себя самое и плоскость P тоже в себя самое. В этом случае, система функций $u_1, \ldots, u_\mu$ подстановкой S будет преобразована в систему функций $u'_1, \ldots, u'_\mu$, связанных с $u_1, \ldots, u_\mu$ линейной зависимостью.

Если плоскость P преобразуется подстановкой S в себя самое, то и сопряженная с ней плоскость Q преобразуется в себя самое и, следовательно, функции $v_1, \ldots, v_\nu$ в функции $v'_1, \ldots, v'_\nu$, линейно с ними связанные.

Таким образом, прихожу к равенству

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) = \varphi_1(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_\mu^0), \quad \psi(v_1, \ldots, v_\nu) = \psi_1(v_1^0, \ldots, v_\nu^0),$$

где $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_\mu^0$ обозначают функции $u_1, \ldots, u_\mu$ после замены $x_1, \ldots, x_n$ на $x'_1, \ldots, x'_n$.

По условию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x'_1, \ldots, x'_n)$$

и поэтому

$$f(x'_1, \ldots, x'_n) = \varphi_1(u_1^0, \ldots, u_\mu^0) + \psi_1(v_1^0, \ldots, v_\nu^0)$$

или иначе

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(u_1, \ldots, u_\mu) + \psi_1(v_1, \ldots, v_\nu).$$

На основании предыдущего формы φ_1 и ψ_1 должны совпадать с φ и ψ.

Прихожу к следующему важному результату.

Если подстановка S не изменяет f и плоскости P, то подстановка S равносильна двум подстановкам

$$u_k = \sum_{h=1}^{\mu} \alpha_{kh} u'_h \quad k = 1, 2, \ldots, \mu; \quad v_h = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_{hk} v'_k \quad h = 1, 2, \ldots, \nu \tag{1}$$

которые не изменяют форм $\varphi(u_1, \ldots, u_\mu)$ и $\psi(v_1, \ldots, v_\nu)$.

Применим этот результат к форме с целыми коэфициентами. Пусть коэфициенты функций $u_1, \ldots, u_\mu$ целые числа. Можно предполагать, что $v_1, \ldots, v_\nu$ также будут с целыми коэфициентами.

По условию подстановка S с целыми коэфициентами. Поэтому можно функциям $u'_1, \ldots, u'_\mu$ дать произвольные целые значения и функции $u_1, \ldots, u_\mu$ получат также целые значения и наоборот. Следовательно, коэфициенты подстановки (1) числа целые и определитель равен ± 1. Отсюда следует, что эти подстановки не изменяют форм φ и ψ. Но формы φ и ψ тоже с рациональными коэфициентами и если эти формы определенные, то число таких подстановок конечное.

Если подстановка S не изменяет формы f и плоскости P, которой соответствует определенная форма, то подстановка S принадлежит конечному числу подстановок[1]. Отсюда следует, что

$$S^m = 1,$$

где m конечное целое число.

Введем в рассмотрение совокупность (P) плоскостей μ измерений, которым соответствуют положительные формы.

Предполагая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\mu} u_k^2 - \sum_{h=1}^{\nu} v_h^2,$$

можем утверждать, что плоскостям, сопряженным Q, ν измерений будут соответствовать отрицательные формы. Эти плоскости Q пусть образуют совокупность (Q).

Теорема. *Плоскости P и Q, произвольно выбранные в совокупностях (P) и (Q), имеют только одну общую точку (O) в аналитическом пространстве n измерений.*

Согласно предыдущему рассматриваем функции u_k и v'_h для плоскости P и сопряженной с ней Q'; u'_k и v_h для плоскости P' и сопряженной с ней Q

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) + \psi_1(v'_1, \ldots, v'_\nu),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) + \psi(v_1, \ldots, v_\nu).$$

Формы φ и φ_1 положительные, ψ и ψ_1 отрицательные.

Допустим, что существует система значений $x_1^0, \ldots, x_n^0$, при которой

$$u_k = 0 \text{ и } v_h = 0;$$

тогда

$$f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \psi(v'_1, \ldots, v'_\nu) < 0,$$

$$f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) > 0,$$

что невозможно.

Основная теорема. *Предположим, что P произвольно выбранная плоскость в совокупности (P). Введем в рассмотрение плоскости совокупности (Q), определяемые функциями с целыми коэфициентами. Определитель, соответствующий плоскостям P и Q, не может быть по численному значению меньшим некоторого предела, который зависит от выбора плоскости P.*

---

[1] То есть некоторой конечной группе подстановок. (*Б. В.*).

Сохраняю прежние обозначения

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) + \psi_1(v'_1, \ldots, v'_\nu),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) + \psi(v_1, \ldots, v_\nu).$$

Отсюда следует

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) - \psi(v_1, \ldots, v_\nu) = \varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) - \psi_1(v'_1, \ldots, v'_\nu).$$

Получаю положительные формы $\varphi - \psi$ и $\varphi_1 - \psi_1$.

Обозначим определитель формы φ через d и формы ψ через δ.

Пусть ω определитель системы функций $u_1, \ldots, u_\mu$ и $v_1, \ldots, v_\nu$. Определитель формы

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) - \psi(v_1, \ldots, v_\nu)$$

равен $d\delta\omega^2$. Давая переменным $x_1, \ldots, x_n$ целые значения, обращающие в минимум эту форму, получим

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) - \psi(v_1, \ldots, v_\nu) < \sqrt[n]{\lambda d\delta\omega^2}.$$

Поэтому

$$\varphi_1(u'_1, \ldots, u'_\mu) - \psi_1(v'_1, \ldots, v'_\nu) < \sqrt[n]{\lambda d\delta\omega^2}$$

и, следовательно, получаем

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) < \sqrt[n]{\lambda d\delta\omega^2}, \qquad \psi_1(v'_1, \ldots, v'_\nu) < \sqrt[n]{\lambda d\delta\omega^2},$$

$$\psi(v_1, \ldots, v_\nu) < \sqrt[n]{\lambda d\delta\omega^2}.$$

Но минимум формы $\psi(v_1, \ldots, v_\nu)$ при произвольных целых значениях... [1]).

Тут я запутался в неравенствах.

23 февраля

Много новых мыслей у меня явилось за это время по разбираемому вопросу. Прежде всего, я заметил, что предыдущие теоремы могут быть высказаны в более общем виде.

Условимся обозначать через (P) совокупность плоскостей μ измерений, удовлетворяющих следующему условию. *Если P какая-нибудь плоскость, принадлежащая к совокупности (P), определяемая уравнениями*

$$v_h = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu$$

или равенствами

$$x_i = \sum_{k=1}^{\mu} p_{ik}\varrho_k,$$

то при всех значениях параметров $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ значение формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0.$$

---

[1]) Текст обрывается.

Если неравенство это обращается в равенство только при $x_i = 0$ $i=1, 2, \ldots, n$, то будем говорить, что плоскость P внутри совокупности (P).

Подобным же образом определяю другую совокупность (Q) плоскостей ν измерений, определяемых уравнениями

$$u_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \mu$$

или равенствами

$$x_i = \sum_{h=1}^{\nu} q_{ih} \varrho_h$$

по условию

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqq 0.$$

Теорема. *Если плоскость P находится внутри совокупности (P), а Q какая-нибудь плоскость, принадлежащая совокупности (Q), то определитель*

$$\omega = \begin{vmatrix} p_{11} \ldots p_{1\mu}, & q_{11}, \ldots, q_{1\nu} \\ \cdots & \cdots \\ p_{n1} \ldots p_{n\mu}, & q_{n1}, \ldots, q_{n\nu} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Допустим противное. Тогда существуют значения $x_1^0, \ldots, x_n^0$, обращающие в нуль одновременно функции $v_1, \ldots, v_\nu$ и $u_1, \ldots, u_\mu$, определяющие плоскости P и Q. По условию $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(u_1', \ldots, u_\mu') + \psi(v_1, \ldots, v_\nu)$, так как P внутри совокупности (P).

Поэтому

$$f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \varphi_1(u_1', \ldots, u_\mu') > 0.$$

С другой стороны, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ представляется в форме

$$x_i^0 = \sum_{k=1}^{\nu} q_{ik} \varrho_k$$

и, следовательно,

$$f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \leqslant 0,$$

что противоречит предыдущему.

В дальнейшем основную роль играют плоскости совокупностей (P) и (Q), которые определяются находящимися на них точками с целыми координатами.

Теорема. *Если плоскость P находится внутри совокупности (P), а Q — какая-нибудь плоскость совокупности (Q), определяемая находящимися на ней точками с целыми координатами, то численное значение определителя*

$$\omega = \pm \begin{vmatrix} p_{11}, \ldots, p_{1\mu}, & q_{11}, \ldots, q_{1\nu} \\ \cdots & \cdots \\ p_{n1}, \ldots, p_{n\mu}, & q_{n1}, \ldots, q_{n\nu} \end{vmatrix}$$

не меньше некоторого предела.

Я не сомневаюсь в этой теореме, но общего доказательства пока еще не имею и постепенно подвигаюсь вперед.

10 часов вечера. Кажется, я нашел доказательство.

С помощью плоскости P разложим форму f на сумму

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\varphi(u_1,\ldots,u_\mu)-\psi(v_1,\ldots,v_\nu),$$

где $\varphi(u_1,\ldots,u_\mu)$ и $\psi(v_1,\ldots,v_\nu)$ положительные формы.

Плоскость P определяется уравнениями

$$v_h=0,\qquad h=1,2,\ldots,\nu,$$

где

$$v_h=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ih}x_i,\qquad h=1,2,\ldots,\nu$$

или равенствами

$$x_i=\sum_{k=1}^{\mu}p_{ik}\sigma_k.$$

Пусть теперь плоскость Q определяется равенствами

$$x_i=\sum_{k=1}^{\nu}q_{ik}\varrho_k,$$

где q_{ih} числа целые и образуют основание. Поэтому все целые точки плоскости Q получаем при целых значениях $\varrho_1,\ldots,\varrho_\nu$.

Исследуем значения $v_1,\ldots,v_\nu$. На основании сделанных предположений получаем

$$v_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{\nu}\beta_{ih}q_{ik}\varrho_k;$$

обозначим

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{ih}q_{ik}=\lambda_{hk};\quad k,h=1,2,\ldots,\nu,$$

тогда

$$v_h=\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_{hk}\varrho_k,\qquad h=1,2,\ldots,\nu. \tag{1}$$

Известно, что целые числа $\varrho_1,\ldots,\varrho_\nu$ можно так подобрать, что численные значения $v_1,\ldots,v_\nu$ не будут превосходить предела

$$|v_h|<\lambda\sqrt[\nu]{\Delta},\qquad h=1,2,\ldots,\nu,$$

где Δ определитель системы (1) и λ — число, не зависящее от Δ.

По условию при этих значениях $\varrho_1,\ldots,\varrho_\nu$ соответствующие значения $x_1,\ldots,x_n$ будут целыми и, кроме того,

$$f(x_1,\ldots,x_n)\leqq 0.$$

Из формулы $f=\varphi-\psi$ следует

$$\varphi(u_1,\ldots,u_\mu)\leqq\psi(v_1,\ldots,v_\nu).$$

Вследствие условия

$$|v_h| < \lambda \sqrt[\nu]{\Delta}, \qquad h=1, 2, \ldots, \nu$$

прихожу к заключению, что существует такое положительное число ε, что имеют место неравенства

$$|u_k| < \varepsilon \sqrt[\nu]{\Delta} \quad k=1, 2, \ldots, \mu, \qquad |v_h| < \varepsilon \sqrt[\nu]{\Delta} \quad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Так как определитель системы функций $u_1, \ldots, u_\mu$, $v_1, \ldots, v_\nu$ не равен нулю, то предыдущие неравенства возможны только при условии, что существует положительное число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\Delta > \delta.$$

Коэфициенты функций $v_1, \ldots, v_\nu$ могли быть так выбраны, чтобы определители-миноры порядка ν, составленные из β_{ih} $(i=1, 2, \ldots, n;\ h=1, \ldots, \nu)$, были соответственно равны определителям-минорам порядка μ, составленным из p_{ik} $(i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, \mu)$.

При этом условии

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1\nu} \\ \ldots\ldots \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} \ldots p_{1\mu}, & q_{11} \ldots q_{1\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} \ldots p_{n\mu}, & q_{n1} \ldots q_{n\nu} \end{vmatrix}$$

и теорема доказана.

24 февраля

Основная теорема. *Если плоскость P находится внутри совокупности (P) и ε какое-нибудь произвольно заданное положительное число, то существует конечное число плоскостей в совокупности (Q), определяемых уравнениями с целыми коэфициентами и удовлетворяющих условию, что численное значение определителя*

$$\begin{vmatrix} p_{11} \ldots p_{1\mu}, & q_{11} \ldots q_{1\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & \end{vmatrix}$$

не превосходит ε.

Сохраняя прежние обозначения, рассмотрим линейные функции

$$v_h = \sum_{h=1}^{\nu} \lambda_{hk} \varrho_k \qquad h=1, 2, \ldots, \nu.$$

Обращаясь к равенству

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_\mu) - \psi(v_1, \ldots, v_\nu),$$

заметим, что согласно предположению при всех целых значениях $\varrho_1, \ldots, \varrho_\nu$ имеет место неравенство

$$\varphi(u_1, \ldots, u_\mu) \leqq \psi(v_1, \ldots, v_\nu). \tag{1}$$

Поэтому существует такое положительное число δ, что неравенство

$$\psi(v_1, \ldots, v_\nu) > \delta$$

имеет место при всех целых значениях $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$ за исключением $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0, \ldots, \varrho_\nu = 0$.

Рассмотрим значения формы

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu), \quad \text{где } v_h = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_{hk} \varrho_k.$$

Предположим, что ν последовательных минимумов формы ψ дают значения форм

$$v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_\nu^{(k)} \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Обозначим через d определитель формы ψ, а через $\varDelta$ определитель системы $|\lambda_{kh}|$. Будем иметь нам известное неравенство

$$\prod_{k=1}^{\nu} \psi(v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_\nu^{(k)} \leqq \tau d \varDelta^2,$$

где τ — некоторое число, зависящее только от ν.

По условию

$$\psi(v_1^{(1)}, \ldots, v_\nu^{(1)}) \leqq \psi(v_1^{(2)}, \ldots, v_\nu^{(2)}) \leqq \ldots \leqq \psi(v_1^{(\nu)}, \ldots, v_\nu^{(\nu)}).$$

Поэтому из предыдущего неравенства следует

$$\prod_{r=1}^{k-1} \psi(v_1^{(r)}, \ldots, v_\nu^{(r)}) \, [\psi(v_1^{(k)}, \ldots, v_\nu^{(k)})]^{\nu-k+1} \leqq \tau d \varDelta^2.$$

И так как

$$\psi(v_1^{(r)}, \ldots, v_\nu^{(r)}) > \delta,$$

то

$$[\psi(v_1^{(k)}, \ldots, v_\nu^{(k)})]^{\nu-k+1} < \frac{\tau d \varDelta^2}{\delta^{k-1}}$$

и, следовательно,

$$\psi(v_1^{(k)}, \ldots, v_\nu^{(k)}) < \left[\frac{\tau d \varDelta^2}{\delta^{k-1}}\right]^{\frac{1}{\nu-k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Из этих неравенств следует, что существует такое конечное число A, что имеют место неравенства

$$|v_h^{(r)}| < A \qquad r = 1, 2, \ldots, \nu; \quad h = 1, 2, \ldots, \nu.$$

На основании (1) получим

$$|u_k^{(r)}| < B \qquad r = 1, 2, \ldots, \nu; \quad k = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Из этих неравенств следует, что соответствующие целые значения $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_{ik}| < \eta \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{2}$$

Полученные ν точек x_{ih} $(h=1, 2, \ldots, \nu)$ находятся на плоскости Q и эту плоскость вполне определяют.

Так как неравенствам (2) удовлетворяет конечное число точек, то существует конечное число плоскостей Q, удовлетворяющих условиям теоремы и определяемых точками с целыми координатами.

Я перешел к изучению определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратичной формы и, останавливаясь на случае $n=5$, $\mu=3$, $\nu=2$, вывел следующую интересную формулу

$$\begin{gathered}
\Delta = a_{11}(a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34})^2 + a_{22}(a_{34}a_{15}-a_{35}a_{14})^2 + a_{33}(a_{14}a_{25}-a_{15}a_{24})^2 + \\
+ 2a_{12}(a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34})(a_{34}a_{15}-a_{35}a_{14}) + \\
+ 2a_{13}(a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34})\cdot(a_{14}a_{25}-a_{15}a_{24}) + 2a_{23}(a_{34}a_{15}-a_{35}a_{14})(a_{14}a_{25}-a_{15}a_{24}) + \\
+ (a_{22}a_{33}-a_{23}^2)[-a_{44}a_{15}^2-a_{55}a_{14}^2+2a_{45}a_{15}a_{14}] + (a_{33}a_{11}-a_{13}^2)[-a_{44}a_{25}^2 - \\
- a_{55}a_{24}^2+2a_{45}a_{25}a_{24}] + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)[-a_{44}a_{35}^2-a_{55}a_{34}^2+2a_{45}a_{35}a_{34}] + \\
+ 2(a_{23}a_{13}-a_{33}a_{12})[-a_{44}a_{15}a_{25}-a_{55}a_{14}a_{24}+a_{45}(a_{15}a_{24}+a_{14}a_{25})] + \\
+ 2(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})[-a_{44}a_{35}a_{15}-a_{55}a_{34}a_{14}+a_{45}(a_{34}a_{15}+a_{35}a_{14})] + \\
+ 2(a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23})[-a_{44}a_{25}a_{35}-a_{55}a_{24}a_{34}+a_{45}(a_{25}a_{34}+a_{35}a_{24})] + \\
+ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44}a_{45} \\ a_{54}a_{55} \end{vmatrix}.
\end{gathered}$$

25 февраля

Приведенная формула открывает мне некоторые перспективы для дальнейшего, но предварительно я пытаюсь эту формулу обобщить.

Обозначаю

$$a_{\mu+i,\,\mu+j} = b_{ij}, \quad \text{так что } b_{ij} = b_{ji},$$
$$a_{i,\,\mu+j} = p_{ij}, \quad a_{\mu+i,\,i} = p_{ij}, \quad p_{ij} = p_{ji}.$$

Определитель Δ представим в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\mu}\; p_{11} \ldots p_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu1} \ldots a_{\mu\mu}\; p_{\mu1} \ldots p_{\mu\nu} \\ p_{11} \ldots p_{1\mu}\; b_{11} \ldots b_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{\nu1} \ldots p_{\nu\mu}\; b_{\nu1} \ldots b_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Прежде всего разлагаю определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

на определители-миноры.

Обозначим символом

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_s \\ k_1, k_2, \dots, k_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_s, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_s$$

определитель

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} a_{i_1k_2} \dots a_{i_1k_s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i_sk_1} a_{i_sk_2} \dots a_{i_sk_s} \end{vmatrix}.$$

Вычеркивая из ряда чисел $1, 2, \dots, n$ числа $i_1, i_2, \dots, i_s$, получим $n-s=\sigma$ чисел, которые обозначим $j_1 < j_2 < \dots < j_\sigma$, а вычеркивая из ряда $1, 2, \dots, n$ числа $k_1, k_2, \dots, k_s$, получим числа $h_1 < h_2 < \dots < h_\sigma$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} j_1 \dots j_\sigma \\ h_1 \dots h_\sigma \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ k_1 k_2 \dots k_s \end{Bmatrix}.$$

Без труда вывожу следующую формулу

$$\Delta = (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_s} \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_s} \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ k_1 k_2 \dots k_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ k_1 k_2 \dots k_s \end{Bmatrix},$$

где сумма распространена на все системы целых чисел $i_1, i_2, \dots, i_s$ из ряда $1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие условию $i_1 < i_2 < \dots < i_s$.

Полагая $k_1=1$, $k_2=2, \dots$, $k_s=\mu$ и $s=\mu$, нахожу

$$\Delta = (-1)^{\frac{\mu^2+\mu}{2}} \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_\mu} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_\mu \\ 1, 2, \dots, \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} i_1, i_2, \dots, i_\mu \\ 1, 2, \dots, \mu \end{Bmatrix}.$$

27 февраля

Я делаю большие успехи в разбираемом вопросе, но в то же время здоровье мое все ухудшается и ухудшается. Вчера я в первый раз получил отчетливую идею об алгорифме, который должен разрешить все вопросы рассматриваемой теории форм, и вчера же я имел сильный припадок желчной колики, который мне помешал заниматься вечером и не дал возможности заснуть почти всю ночь.

Я так боюсь, чтобы результаты моих долгих усилий, с таким трудом добываемые, не погибли вместе со мной, а между тем их привести в порядок так трудно. Многое я только угадываю, каким-то чутьем, которое как раз теперь, во время болезни, у меня изощрилось.

Не знаю, удастся ли мне мои мысли приложить для всех форм, но для форм с четырьмя переменными, кажется, я перешел ту преграду, которая меня все время останавливала. Прежде всего отмечу, что вышеприведенная формула для определителя Δ указывает на замечательные свойства неопределенных квадратичных форм.

Теорема. *Если форма $f(x_1,\dots,x_n)$ с целыми коэфициентами удовлетворяет условию, что при $x_k=0$ $(k=\mu+1,\dots,n)$ получается положительная форма $\varphi(x_1, x_2,\dots, x_\mu)$, а при $x_k=0$ $(k=1, 2,\dots, \mu)$ получается форма $-\psi(x_{\mu+1},\dots,x_n)$, которая не имеет положительных значений и если обе формы φ и ψ приведенные, то из формулы для определителя Δ следует, что все коэфициенты формы $f(x_1,\dots,x_n)$ не превосходят некоторого предела, зависящего только от n и от Δ.*

Из этой теоремы следует, что существует конечное число форм $f(x_1,\dots,x_n)$ определителя Δ, удовлетворяющих условиям теоремы.

Вопрос о приведении неопределенных форм таким образом сводится к разысканию определителя

$$\omega=\begin{vmatrix} p_{11}\cdots p_{1\mu} & q_{11}\cdots q_{1\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{n1}\cdots p_{n\mu} & q_{n1}\cdots q_{n\nu}\end{vmatrix},$$

численно равного единице и удовлетворяющего условию, что, полагая

$$x_i=\sum_{k=1}^{\mu} p_{ik}\varrho_k,$$

получим форму $f(x_1,\dots,x_n)=\varphi(\varrho_1,\dots,\varrho_\mu)$ положительную, а, полагая

$$x_i=\sum_{h=1}^{\nu} q_{ih}\varrho_h,$$

получим форму $f(x_1,\dots,x_n)=-\psi(\varrho_1,\dots,\varrho_\nu)$, не имеющую положительных значений. Другими словами, форма $\psi(\varrho_1,\dots,\varrho_\nu)$ или положительна или представляет предел положительной формы.

Я сомневаюсь, чтобы мне удалось доказать существование таких определителей, да это и не необходимо: *для теории приведения неопределенных форм достаточно, чтобы определитель ω не превосходил конечного предела, зависящего только от Δ и n.*

Для неопределенных тройничных форм мне удалось это доказать, для других я еще и не пробовал доказывать, так как этот [вопрос] теснейшим образом связан с алгорифмом для преобразования форм.

Для форм тройничных этот алгорифм я давно твердо установил и рассмотрел много примеров его приложения. Получаются прекрасные результаты. Применение к форме $ac-b^2$ дает теорию приведения положительных и неопределенных бинарных форм, совпадающую со способом Зеллинга для первых и со способом Гаусса для вторых.

Вопрос для тройничных форм я ставлю таким образом. Обозначая $\mu=2$ и $\nu=1$, мы имеем собрание (P) плоскостей двух измерений и собрание (Q) векторов.

Выбирая произвольно плоскость P внутри (P), определенную уравнением

$$px+qy+rz=0,$$

я рассматриваю вектор (l, m, n) с целыми коэфициентами, принадлежащий к (Q).

Как известно из предыдущего, определитель

$$\omega=pl+qm+rn$$

в совокупности (Q) имеет минимум, если l, m и n числа целые.

Существуют плоскости P, которые вполне определяются представлениями своего минимума; их-то я исключительно и рассматриваю. Всегда можно предположить, что p, q и r для таких плоскостей целые числа, не имеющие общего делителя. Для этих плоскостей минимум

$$\omega=pl+qm+rn$$

не превосходит некоторого предела, зависящего от Δ.

Эта теорема решает вопрос о приведении неопределенных тройничных форм.

Рассматривая уравнение

$$px+qy+rz=\omega,$$

мы получим плоскость, пересекающую конус $f(x,y,z)=0$ по эллипсу.

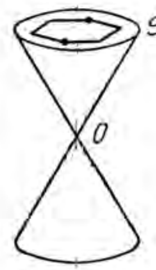

Рис. 1.

Внутри этого эллипса будет несколько (не менее трех) точек с целыми координатами, которые огибаются многоугольником (рис. 1).

Вращая плоскость P вокруг каждой из сторон этого многоугольника в некотором определенном направлении, мы получим плоскость P_1, которую я называю смежной с P (рис. 2).

Рис. 2.

Плоскость P имеет столько смежных с ней плоскостей, сколько сторон в многоугольнике, соответствующем P.

Легко вывести алгорифм для получения плоскости P_1, смежной с P. Так как плоскости P и P_1 пересекаются по стороне g многоугольника, то уравнение плоскости P_1 можно представить в виде

$$px+qy+rz-\omega-\varrho(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0,$$

где α, β и γ целые числа, определяемые известным способом. Можно предполагать, что $\varrho>0$. Изменяя ϱ непрерывно от нуля, мы будем получать ряд плоскостей, которые при достаточно малых значениях ϱ будут иметь только точки прямой g с целыми координатами, удовлетворяющими условию:

$$f(x, y, z)\leqq 0.$$

Увеличивая ϱ достаточно, получим такое значение ϱ, при котором на плоскость попадет по крайней мере еще одна точка, удовлетворяющая предыдущему неравенству. Это значение ϱ определит искомую плоскость. Другими словами, значение ϱ представляет минимум функции

$$\varrho=\frac{px+qy+rz-\omega}{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

в области

$$f(x,\ y,\ z)\leqq 0$$

и при условии $\alpha x+\beta y+\gamma z>0$.

Каждой плоскости соответствует приведенная форма, эквивалентная данной, которую мы получаем с помощью подстановки

$$px+qy+rz=x'.$$

Остальные коэфициенты подстановки

$$\begin{aligned} x&=\alpha x'+\beta y'+\gamma z',\\ y&=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z',\\ z&=\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z' \end{aligned}$$

определяются из условия, чтобы в полученной форме

$$f_1(x',\ y',\ z')=a_1x'^2+a_1'y'^2+a_1''z'^2+2b_1y'z'+2b_1'z'x'+2b_1''x'y'$$

форма $(a_1',\ b_1,\ a_1'')$ была приведенной, и коэфициент a_1' по возможности мал.

При этих условиях все коэфициенты полученной формы не будут превосходить конечного предела. Эти формы я называю приведенными.

Вычисляя приведенные формы, соответствующие различным смежным плоскостям, мы получим алгорифм, который будет приводить к периодически встречающимся формам. Отсюда вытекает возможность получить основную систему подстановок, комбинацией которых получаются все подстановки, не изменяющие данной формы $f(x,\ y,\ z)$.

При этом попутно решается вопрос о представлении отрицательного или равного нулю (неположительной) числа m формой

$$f(x,\ y,\ z)=m, \qquad m\leqq 0.$$

Для этого я ввожу в рассмотрение комплекс векторов, соответствующий плоскости P, определяя этот комплекс как совокупность векторов, пересекающих плоскость P в точках, принадлежащих многоугольнику, соответствующему плоскости P.

Число неэквивалентных комплексов конечно, и поэтому разыскание решений уравнения $f(x,\ y,\ z)=m$ можно свести к разысканию вектора

$$x=\alpha t, \quad y=\beta t, \quad z=\gamma t,$$

где

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=m'\leqq 0,$$

принадлежащего данному комплексу. Легко видеть, что число таких векторов конечно. Можно было бы вывести ограничивающие условия для α, β, γ в зависимости от m. Можно найти число δ, не зависящее от m, удовлетворяющее условию, что

$$f(\alpha, \beta, \gamma)=m \quad \text{и} \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leqq \delta|m|,$$

если уравнение $f(x, y, z)=0$ невозможно (при целых x, y, z, не равных 0 одновременно).

Число δ определяется для каждого комплекса, и все они могут быть заменены одним. Поэтому получаю теорему:

Теорема. *Среди целых чисел, удовлетворяющих уравнению* $f(\alpha, \beta, \gamma)=m$ *при* $m<0$, *существует система, удовлетворяющая также неравенству*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leqq \delta|m|,$$

где δ *— число, не зависящее от* m, *а только от коэфициентов формы* $f(x, y, z)$ *и при условии, что уравнение* $f(x, y, z)=0$ *невозможно (при целых* x, y, z, *не равных* 0 *одновременно).*

Эти исследования можно развивать дальше, установив понятие о приведенной системе векторов, аналогичной совокупности приведенных форм (a, b, c) для формы $ac-b^2$.

До сих пор я говорил только об отрицательных значениях формы $f(x, y, z)$. Рассмотрение положительных значений $f(x, y, z)$ долго мне не удавалось, и только сравнительно недавно я установил окончательно для этого способ.

Я рассматриваю некоторый вектор (l, m, n) из совокупности (Q), причем

$$f(l, m, n)<0.$$

Через этот вектор провожу какую-нибудь плоскость

$$px+qy+rz=0,$$

где

$$pl+qm+rn=0.$$

Здесь p, q, r и l, m, n целые числа.

Пусть α, β, γ какие-нибудь целые числа, удовлетворяющие условию

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqq 0 \quad \text{и} \quad \beta n-\gamma m,\ \gamma l-\alpha n,\ \alpha m-\beta l$$

не имеют общего делителя. Давая параметру ϱ разные значения, мы будем получать положительные значения

$$f(\alpha+\varrho l,\ \beta+\varrho m,\ \gamma+\varrho n)$$

формы $f(x, y, z)$. В некоторых случаях оказывается, что, давая ϱ значения, удовлетворяющие условию

$$f(\alpha+\varrho l,\ \beta+\varrho m,\ \gamma+\varrho n) \geqq 0,$$

мы получим отрезок вектора

$$x=\alpha+\varrho l,\ y=\beta+\varrho m,\ z=\gamma+\varrho n,$$

который определяется целыми точками, на нем находящимися.

Если полученный вектор не всегда так определяется независимо от выбора чисел α, β, γ, я отбрасываю вектор (l, m, n).

Весьма важно доказать, что существуют векторы (l, m, n), которые указанным образом всегда определяют прямую

$$x=\alpha+\varrho l,\ y=\beta+\varrho m,\ z=\gamma+\varrho n, \quad f(\alpha+pl,\ \beta+\varrho m,\ \gamma+\varrho n) \geqq 0,$$

проходящую по крайней мере через две точки с целыми координатами.

Совокупность таких векторов (l, m, n) служит предметом дальнейших исследований.

28 **февраля**

При помощи конечного числа действий можно узнать, принадлежит ли данный вектор (l, m, n) к рассматриваемой совокупности.

Пусть l, m, n — взаимно простые числа, удовлетворяющие условию

$$f(l, m, n) < 0.$$

Беру целые числа α, β, γ, удовлетворяющие условию

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqq 0$$

и чтобы $\beta n-\gamma m$, $\gamma l-\alpha n$, $\alpha m-\beta l$ были взаимно простыми.

Рассматриваю вектор

$$x=\alpha+\varrho l, \quad y=\beta+\varrho m, \quad z=\gamma+\varrho n \tag{1}$$

при значениях ϱ, удовлетворяющих неравенству

$$f(\alpha+\varrho l,\ \beta+\varrho m,\ \gamma+\varrho n) \geqq 0.$$

Обозначим для краткости

$$f(\alpha, \beta, \gamma)=A, \quad \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial l}+\beta\frac{\partial f}{\partial m}+\gamma\frac{\partial f}{\partial n}\right)=B, \quad f(l, m, n)=C;$$

тогда

$$A+2B\varrho+C\varrho^2 \geqq 0, \text{ где } A \geqq 0,\ C<0;$$

поэтому

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{C} \leqq \varrho \leqq \frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{C}.$$

Так как $AC \leqq 0$, то

$$|B| \leqq \sqrt{B^2-AC}.$$

Чтобы вектор (1) принадлежал к рассматриваемой совокупности, необходимо и достаточно, чтобы один из корней

$$\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{|C|} \text{ или } \frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{|C|}$$

был числом не менее единицы. Допустим противное, что

$$\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{-C}<1, \quad \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{-C}<1,$$

так что

$$B+\sqrt{B^2-AC}<-C, \quad -B+\sqrt{B^2-AC}<-C; \tag{2}$$

отсюда следует

$$|B|<|C| \quad \text{и} \quad |\sqrt{B^2-AC}|<|C|.$$

Так как

$$-AC<B^2-AC<C^2,$$

то, следовательно,

$$A<|C|.$$

Имеем

$$f(\alpha, \beta, \gamma)<|f(l, m, n)| \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{2}\left[\alpha\frac{\partial f}{\partial l}+\beta\frac{\partial f}{\partial m}+\gamma\frac{\partial f}{\partial n}\right]\right|<|f(l, m, n)|.$$

Так как $f(l, m, n)<0$ и $f(\alpha, \beta, \gamma)\geqq 0$, то легко видеть, что существует конечное число систем целых чисел (α, β, γ), удовлетворяющих этим условиям. Исследованием этих чисел узнаем, принадлежит ли вектор (l, m, n) к рассматриваемой совокупности.

Заметим еще, что из неравенств (2) следует

$$A\pm 2B+C<0$$

и потому существует такое целое число ϱ, что, полагая

$$l'=l+\varrho\alpha, \quad m'=m+\varrho\beta, \quad n'=n+\varrho\gamma$$

мы будем иметь форму (A, B', C'), где

$$B'=\pm\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial l'}+\beta\frac{\partial f}{\partial m'}+\gamma\frac{\partial f}{\partial n'}\right) \text{ и } C'=f(l', m', n')$$

удовлетворяет условию $C'<0$, причем $|C'|<|C|$.

И один из корней уравнения $A+2B'\lambda+C'\lambda^2=0$ будет численно не менее единицы.

28 февраля

Я заметил, что предыдущее можно проще рассматривать.

В полученной форме (A, B, C) коэфициенты A и C удовлетворяют условиям

$$A\geqq 0 \text{ и } C<0.$$

Поэтому неравенства

$$\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{|C|} \text{ и } \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{|C|}<1$$

равносильны следующим

$$\sqrt{B^2-AC}<-C-B \quad \text{и} \quad \sqrt{B^2-AC}<B-C$$

и так как $|B|<-C$, то эти же неравенства равносильны

$$B^2-AC<(-C-B)^2, \quad B^2-AC<(B-C)^2;$$

отсюда следует

$$A \pm 2B + C < 0,$$

или иначе

$$f(\alpha \pm l,\ \beta \pm m,\ \gamma \pm n) < 0.$$

Трем неравенствам

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqq 0,\ f(\alpha+l,\ \beta+m,\ \gamma+n) < 0,\quad f(\alpha-l,\ \beta-m,\ \gamma-n) < 0$$

удовлетворяет конечное число систем целых чисел α, β и γ.

[Примечание автора, сделанное на полях:

Заметим, что и это сложно, и проще всего рассуждать так: имеем

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant 0.$$

Если $f(\alpha+l,\ \beta+m,\ \gamma+n) \geqslant 0$, или $f(\alpha-l,\ \beta-m,\ \gamma-n) \geqslant 0$, то вектор

$$x = \alpha + \varrho l,\ y = \beta + \varrho m,\ z = \gamma + \varrho n$$

принадлежит совокупности. Чтобы вектор не принадлежал к совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\alpha \pm l,\ \beta \pm m,\ \gamma \pm n) < 0$$

при условии

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant 0 \text{ и } f(l, m, n) < 0].$$

Заметим теперь, что мы пришли к следующей задаче:

Найти все векторы (λ, μ, ν), *удовлетворяющие условию, что всякий раз, как*

$$f(x+\lambda,\ y+\mu,\ z+\nu) \leqq 0 \text{ и } f(x-\lambda,\ y-\mu,\ z-\nu) \leqq 0, \text{ где } f(\lambda, \mu, \nu) < 0$$

и x, y, z *числа целые, имеет место также неравенство*

$$f(x,\ y,\ z) < 0.$$

Сейчас вывел очень важную формулу. *Если вектор* $(l,\ m,\ n)$ *с целыми коэфициентами принадлежит предыдущей совокупности, то*

$$|f(l,\ m,\ n)| < 4\sqrt[3]{\frac{\Delta}{3}},$$

где Δ — *численное значение определителя формы* f.

Из сделанных предположений следует

$$[f(l,\ m,\ n)]^2 < \left(\alpha\frac{\partial f}{\partial l} + \beta\frac{\partial f}{\partial m} + \gamma\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 - 4f(l,\ m,\ n)\,f(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Поэтому, обозначая

$$p = \beta n - \gamma m,\ q = \gamma l - \alpha n,\ r = \alpha m - \beta l,$$

получаем

$$|f(l,\ m,\ n)|^2 < 4F(p,\ q,\ r).$$

Здесь $F(x,\ y,\ z)$ — форма, сопряженная с $f(x,\ y,\ z)$, определяемая формулами

$$f(x,\ y,\ z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$
$$F(x,\ y,\ z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

где

$$A=b^2-a'a'',\ A'=b'^2-a''a,\ A''=b''^2-aa',$$
$$B=ab-b'b'',\ B'=a'b'-b''b,\ B''=a''b''-bb'.$$

Обе формы $f(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ имеют определители одного знака.

Так как

$$pl+qm+rn=0,$$

то, обозначая

$$l=\mu\nu'-\mu'\nu,\ m=\nu\lambda'-\nu'\lambda,\quad n=\lambda\mu'-\lambda'\mu,$$

где λ, μ, ν и λ', μ', ν' целые числа, получим

$$p=\lambda u+\lambda' v,\quad q=\mu u+\mu' v,\quad r=\nu u+\nu' v.$$

Здесь u и v целые числа и

$$F(p, q, r)=F(\lambda, \mu, \nu)\,u^2+uv\left(\lambda'\frac{\partial F}{\partial\lambda}+\mu'\frac{\partial F}{\partial\mu}+\nu'\frac{\partial F}{\partial\nu}\right)+v^2F(\lambda', \mu', \nu');$$

заметим, что определитель формы

$$\frac{1}{4}\left(\lambda'\frac{\partial F}{\partial\lambda}+\mu'\frac{\partial F}{\partial\mu}+\nu'\frac{\partial F}{\partial\nu}\right)^2-F(\lambda, \mu, \nu)\,F(\lambda', \mu', \nu')=\Delta f(l, m, n)<0,$$

так как $\Delta>0$ и $f(l, m, n)<0$.

Поэтому, предыдущая форма положительная и можно u и v так выбрать, чтобы имело место неравенство:

$$F^2(p, q, r)<\frac{4}{3}\Delta\,|f(l, m, n)|.$$

Присоединяя неравенство

$$(f(l, m, n))^2<4F(p, q, r),$$

нахожу

$$(f(l, m, n))^4<\frac{64}{3}\Delta\,|f(l, m, n)|,$$

или

$$|f(l, m, n)|<4\sqrt[3]{\frac{\Delta}{3}}.$$

29 февраля

Я только что заметил, что вектор (l, m, n) с целыми коэфициентами только тогда принадлежит к рассматриваемой совокупности, если неравенствам

$$f(x+l)<0,\ f(x-l)<0\quad \text{и}\quad \frac{1}{2}\left|x\frac{\partial f}{\partial l}+y\frac{\partial f}{\partial m}+z\frac{\partial f}{\partial n}\right|<|f(l, m, n)|$$

удовлетворяет только система целых чисел $x=0,\ y=0,\ z=0$.

Допустим, что целые числа α, β, γ, не имеющие общего делителя удовлетворяют неравенствам

$$f(\alpha \pm l,\ \beta \pm m,\ \gamma \pm n) < 0 \text{ и } \frac{1}{2}\left|\alpha\frac{\partial f}{\partial l} + \beta\frac{\partial f}{\partial m} + \gamma\frac{\partial f}{\partial n}\right| < |f(l, m, n)|.$$

На основании предыдущего

$$f(\alpha, \beta, \gamma) < 0;$$

сохраняя прежние обозначения, получим (текст обрывается).

Варшава.
4 сентября 1908 г.

Вопрос еще может быть упрощен.

Система (l, m, n) удовлетворяет условию:

Неравенства

$$\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial f}{\partial l} + y\frac{\partial f}{\partial m} + z\frac{\partial f}{\partial n}\right) - f(l, m, n) > 0$$

$$-\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial f}{\partial l} + y\frac{\partial f}{\partial m} + z\frac{\partial f}{\partial n}\right) - f(l, m, n) > 0$$

невозможны при целых x, y, z, если только исключена система $x=0$, $y=0$, $z=0$ и имеют место неравенства $f(x, y, z) \leq 0$.

Допустим, что этим неравенствам удовлетворяют числа x, y, z.

Предположим для большей определенности, что из двух систем, удовлетворяющих предыдущим неравенствам $\pm(x, y, z)$, выбрана система (x, y, z), удовлетворяющая условию

$$x\frac{\partial f}{\partial l} + y\frac{\partial f}{\partial m} + z\frac{\partial f}{\partial n} < 0.$$

Я утверждаю, что при всяком целом $|\delta| > 1$ будет иметь место неравенство

$$f(x+\delta l,\ \ y+\delta m,\ \ z+\delta n) < 0.$$

В самом деле

$$f(x+\delta l) = f(x) + \delta\left(x\frac{\partial f}{\partial l} + \ldots\right) + \delta^2 f(l, m, n) =$$

$$= f(x) + 2|\delta|\left(\pm\frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial l} \pm \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial m} \pm \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial n} + \frac{1}{2}|\delta| f(l, m, n)\right).$$

Если $|\delta| > 1$, то очевидно

$$f(x+\delta l,\ y+\delta m,\ z+\delta n) < 0.$$

Очевидно также, что $f(x+l,\ y+m,\ z+n) < 0$.

Следовательно, возможно только предположение

$$f(x-l,\ y-m,\ z-n) > 0.$$

Обозначая $x-l=\alpha$, $y-m=\beta$, $z-n=\gamma$, получим неравенства

$$f(\alpha, \beta, \gamma)>0, \ f(\alpha \pm l, \ \beta \pm m, \ \gamma \pm n) \leqq 0.$$

И, следовательно, в этом случае система (l, m, n) не принадлежит к исследуемой совокупности.

Если

$$f(x+\delta l, \ y+\delta m, \ z+\delta n) \leqq 0$$

при всех целых δ, то система l, m, n также не принадлежит совокупности.

Допустим теперь, что предложенные неравенства не имеют решений. В этом случае система (l, m, n) принадлежит к совокупности. Допускаем противное и пусть

$$f(\alpha, \beta, \gamma)>0, \quad f(\alpha \pm l, \ \beta \pm m, \ \gamma \pm n) \leqq 0.$$

Могу предполагать, что

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial l}+\beta \frac{\partial f}{\partial m}+\gamma \frac{\partial f}{\partial n}<0;$$

обозначая $x=\alpha-l$, $y=\beta-m$, $z=\gamma-n$, нахожу

$$\pm \frac{1}{2}\left(x \frac{\partial f}{\partial l}+y \frac{\partial f}{\partial m}+z \frac{\partial f}{\partial n}\right)-f(l, m, n)>0,$$

что противоречит предположению.

13 сентября 1908 г.

Мне только что пришла в голову одна мысль, которая, мне кажется, очень счастливой.

Предположим, что имеем плоскости ν измерений, параллельные плоскости P, определяемой уравнениями

$$u_1=0, \quad u_2=0, \ldots, u_\mu=0.$$

Они пересекают конус $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ по эллипсоидам.

[Примечание на полях: $f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ данная неопределенная квадратичная форма].

Все такие сечения получим, полагая

$$u_1=\varrho_1, \quad u_2=\varrho_2, \ldots, u_\mu=\varrho_\mu.$$

Пусть $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu$ произвольная система параметров, определяемая равенствами

$$\varrho_k=u_k(p_i) \qquad k=1, 2, \ldots, \mu,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ произвольные целые числа.

Мы можем определить положительное переменное t так, чтобы плоскость

$$u_1=\varrho_1 t, \ u_2=\varrho_2 t, \ldots, u_\mu=\varrho_\mu t$$

пересекала конус $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ по эллипсоиду, не имеющему ни внутри, ни на поверхности ни одной точки с целыми координатами.

Такие значения t имеют высшую границу τ.

Плоскость

$$u_1=\varrho_1\tau, \quad u_2=\varrho_2\tau, \ldots, \quad u_\mu=\varrho_\mu\tau$$

пересекает конус $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ по эллипсоиду, который заключает, по крайней мере, одну точку с целыми координатами.

Предположим для большей определенности, что такая точка существует только одна. Заметим, что если существует две точки, то коэфициенты функций $u_1, \ldots, u_\mu$ образуют приводимую систему. Для простоты предполагаю, что коэфициенты $u_1, \ldots, u_\mu$ образуют неприводимую систему.

Обозначим через $(l_1, \ldots, l_n)$ точку с целыми координатами, которая принадлежит эллипсоиду, получающемуся в сечении плоскостью, определяемой уравнениями $u_1=\varrho_1\tau, \ldots, u_\mu=\varrho_\mu\tau$, с конусом.

Различным системам $(\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu)$ могут отвечать различные точки с целыми координатами $(l_1, \ldots, l_n)$.

Множество соответствующих векторов $[l_i]$ я противопоставляю данной плоскости $P(u_1=0, \ldots, u_\mu=0)$.

5 октября

По отношению к формам с тремя переменными я достиг в изложении некоторого успеха.

Пусть $P)$ $px+qy+rz=0$ какая-нибудь плоскость, пересекающая конус $f(x, y, z)=0$ только в точке (0).

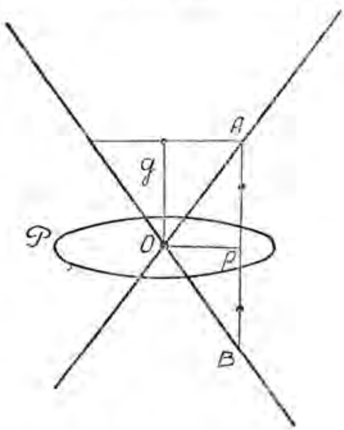

Рис. 3.

Я говорю, что плоскость P принадлежит к вектору (l, m, n) с целыми координатами l, m, n, если выполнены следующие условия: какую бы плоскость Q ни провели через вектор $g(l, m, n)$, передвигая в этой плоскости вектор (l, m, n), мы построим треугольник OAB на асимптотах OA и OB, лежащих в плоскости Q, и прямой AB, параллельной вектору. Треугольник OAB имеет только точки с целыми координатами на AB, причем плоскость Q с P пересекается по вектору Op, который хорду AB разделяет на две части Ap и pB, причем в каждой из этих частей содержится по крайней мере одна точка с целыми координатами (рис. 3).

Я доказываю, что для каждой плоскости P такой вектор (l, m, n) можно найти. Пусть (l, m, n) произвольный вектор и оказывается, что плоскость Q не удовлетворяет условию. Тогда, сейчас же определится прямая $A'B'$ (рис. 4), удовлетворяющая поставленному условию так, что треугольник $OA'B'$ содержит точки с целыми координатами только на $A'B'$ и притом pA' и pB' содержит по крайней мере по одной такой точке. Некоторый g', параллельный $A'B'$, обозначен через $g'(l', m', n')$.

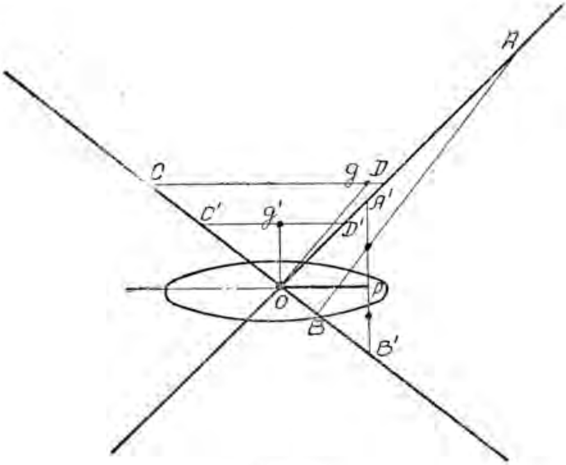

Рис. 4.

Провожу через конец вектора g прямую $CD \| Op$. Внутри треугольника OCD непременно будут находиться точки с целыми координатами, иначе хорда AB была бы искомая.

Внутри треугольника $OC'D'$ нет точек с целыми координатами, так как хорда $A'B'$ удовлетворяет поставленным требованиям. На основании вышеизложенного прихожу к заключению, что

$$|lp+mq+nr| > |l'p+m'q+n'r|.$$

Известно, что существует конечное число векторов (l, m, n), удовлетворяющих условию $f(l, m, n) < 0$ и неравенству

$$|lp+mq+nr| < A,$$

если A данное и для плоскости P, пересекающей конус только в точке 0.

Поэтому указанным способом найдем вектор (l, m, n), которому принадлежит плоскость P. Вектор (l, m, n) удовлетворяет условию $|lp+mq+nr| = \text{minimum}$.

7 октября

Отмечаю новый шаг вперед в исследуемом мною вопросе.

Рассматриваю неопределенную квадратичную форму

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\sum a_{ij} x_i x_j,$$

которая приводится к виду

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{X}_1^2 + \ldots + \overline{X}_\mu^2 - \overline{Y}_1^2 - \ldots - \overline{Y}_\nu^2, \qquad \mu + \nu = n,$$

где $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_\mu, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_\nu$ линейные функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с определителем не равным нулю.

Уравнения $\overline{Y}_1 = 0, \ldots, \overline{Y}_\nu = 0$ определяют плоскость $P(\mu)$ μ измерений, которая пересекает конус $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в точке (0), причем все точки плоскости $P(\mu)$, за исключением (0), удовлетворяют условию

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Обозначим через (P) совокупность таких плоскостей, которые существуют для данного конуса.

Подобным же образом уравнениями

$$\overline{X}_1 = 0, \ldots, \overline{X}_\mu = 0$$

определим плоскость $Q(\nu)$, ν измерений, которая пересекает конус в точке (0), причем все остальные точки плоскости $Q(\nu)$ удовлетворяют условию $f(x_1, \ldots, x_n) < 0$.

Обозначим через (Q) совокупность таких плоскостей, существующих для данного конуса.

Выбираю из совокупности (Q) произвольную плоскость $Q(\nu)$ и ищу среди плоскостей (P), определяемых точками с целыми координатами, плоскость, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1. *Пусть* $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *произвольная точка с целыми координатами, отличная от* (0), *удовлетворяющая условию*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \leqq 0.$$

Точка $(q_1, \ldots, q_n)$ *и плоскость* $P(\mu)$ *определяют плоскость* $R(\mu+1)$, $\mu+1$ *измерений. Поступательно перемещая плоскость* $P(\mu)$ *в этой плоскости* R, *мы достигнем того, что плоскость* $P(\mu)$ *коснется точки с целыми координатами в положении* $P_0(\mu)$. *Требуется, чтобы такая точка была не одна на плоскости* $P_0(\mu)$, *а существовала целая совокупность, которая огибается многогранником* $\mathfrak{f}$ μ *измерений.*

2. *Плоскость* $Q(\nu)$ *пересекается с* $P_0(\mu)$ *в одной точке. Требуется, чтобы эта точка принадлежала многограннику* $\mathfrak{f}$.

Я до сих пор не умею доказать, что такая плоскость $P(\mu)$ существует при произвольно заданной $Q(\nu)$.

Сейчас я заметил одно важное обстоятельство.

Выбираю $P(\mu)$ совершенно произвольно, только по условию, что $P(\mu)$ определяется точками с целыми координатами.

Преобразованием координат можно достигнуть того, что плоскость $P(\mu)$ будет определяться уравнениями

$$x_{\mu+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Плоскость $Q(\nu)$ я смогу определять уравнениями вида

$$x_k = \sum_{h=\mu+1}^{n} \varrho_{kh} x_h \qquad k = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Плоскость $P_0(\mu)$ может определяться условием

$$x_{\mu+1}=q_1,\ldots,x_n=q_\nu$$

и

$$f(x_1,\ldots,x_\mu,\ q_1,\ldots,q_\nu)\leqq 0.$$

Целые числа $q_1, q_2,\ldots,q_\nu$ должны быть так выбраны, чтобы этому неравенству удовлетворяли точки $(x_1,\ldots,x_\mu)$ с целыми координатами, огибаемые многогранником μ измерений. Заметим, что это условие может быть не выполнено только для конечного числа систем $(q_1,\ldots,q_\nu)$.

Кроме того, должно быть выполнено условие, что неравенство

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_\mu,\ \vartheta q_1,\ldots,\vartheta q_\nu)\leqq 0$$

невозможно в целых числах $x_1,\ldots,x_\mu$, если ϑ положительная правильная дробь. Можно определить безграничную совокупность систем $(q_1,\ldots,q_\nu)$, удовлетворяющих последнему требованию. Между ними конечное число может не удовлетворять требованию (о числе точек, образующих многогранник μ измерений).

Я утверждаю, что только конечное число таких многогранников не будет содержать точки пересечения плоскости $Q(\nu)$ с $P(\mu)$.

Эта точка определяется равенствами

$$\xi_k=\sum_{h=1}^{\nu}\varrho_{k,h+\mu}q_h \qquad k=1,2,\ldots,\mu,$$

$$\xi_{h+\mu}=q_h \qquad h=1,2,\ldots,\nu.$$

По условию

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_n)<0,$$

причем получается отрицательная квадратичная форма

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_n)=-\psi(q_1,\ldots,q_\nu)$$

переменных $q_1,\ldots,q_\nu$.

Мы можем определить параллелепипед с вершинами

$$(p_1,\ldots,p_\mu),\ (p_1+1,\ p_2,\ldots,p_\mu),\ldots,\ (p_1,\ldots,p_\mu+1),\ldots,\ (p_1+1,\ldots,\ p_\mu+1),$$

к которому принадлежит точка $(\xi_1,\ldots,\xi_\mu)$. Каждая из точек-вершин может быть представлена в виде

$$\xi_1+\varepsilon_1,\ldots,\xi_\mu+\varepsilon_\mu,\ \text{где}\ |\varepsilon_k|\leqq 1, \qquad k=1,2,\ldots,\mu.$$

Я утверждаю, что только при конечном числе систем $q_1,\ldots,q_\nu$ все вершины параллелепипеда не находятся внутри эллипсоида

$$f(x_1,\ldots,x_\mu,\ q_1,\ldots,q_\nu)\leqq 0.$$

В самом деле

$$f\,(\xi_1+\varepsilon_1,\ldots,\xi_\mu+\varepsilon_\mu,\ q_1,\ldots,q_\nu)=f(\xi_1,\ldots,\xi_\mu,\ q_1,\ldots,q_\nu)+$$

$$+f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\mu,\ 0,\ldots,0)+\sum_{k=1}^{\mu}\varepsilon_k\frac{\partial f}{\partial\xi_k};$$

правую часть представляем в виде

$$-\psi(q_1, \ldots, q_\nu) + \sum_{k=1}^{\nu} \delta_k q_k + \delta.$$

Здесь $\delta_1, \ldots, \delta_\nu$ и δ не превосходят конечного предела. Поэтому неравенство

$$-\psi(q_1, \ldots, q_\nu) + \sum_{k=1}^{\nu} \delta_k q_k + \delta > 0$$

возможно только при конечном числе целых систем $(q_1, \ldots, q_\nu)$.

Если вершины параллелепипеда находятся в эллипсоиде, то все они находятся внутри многогранника $\mathfrak{L}$, а потому и точка $(\xi_1, \ldots, \xi_\mu, q_1, \ldots, q_\nu)$ также находится внутри многогранника.

Из сказанного следует, что конечным числом действий можно узнать, будет ли выбранная плоскость $P(\mu)$ *по отношению к данной плоскости* $Q(\nu)$ *удовлетворять двум поставленным требованиям.*