О неопределенных квадратичных формах

Г. Ф. Вороной

(Начата 26 февраля 1908 г., г. Новочеркасск)

26 февраля 1908 г.

Долго я мучился над разысканием алгорифма, с помощью которого можно было бы исследовать квадратичные формы с четырьмя переменными, приводящиеся к виду

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2.$$

В настоящее время мне кажется, что я попал на правильную дорогу. Пытаюсь осветить путь примерами.

Останавливаюсь на форме

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 3t^2,$$

которая не обращается в нуль при целых значениях переменных.

Исследую плоскости двух измерений, параллельные плоскости

$$P_0) \quad z=0, \quad t=0.$$

Все такие плоскости, определяемые точками с целыми координатами, будут

$$P) \qquad z=p, \quad t=q,$$

где p и q произвольные целые числа.

Плоскость P пересекает конус

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 3t^2 = 0$$

по кругу

$$x^2 + y^2 = 3(p^2 + q^2).$$

Внутри круга находятся точки с целыми координатами, удовлетворяющие условию

$$x^2 + y^2 \leqq 3(p^2 + q^2).$$

Если исключить $p=0$, $q=0$, т. е. плоскость P_0, то получается всегда внутри круга несколько точек, которые огибаются многоугольником.

Этот многоугольник находится на плоскости трех измерений

$$z = pu, \quad t = qu.$$

где u произвольное число. Можем предполагать, что p и q не имеют общего делителя, и тогда внутри призмы с вершиной (0) и основанием, образованным многоугольником, не будет ни одной точки с целыми координатами.

Поэтому рассматриваем неравенство

$$x^2+y^2 \leqq 3(p^2+q^2)$$

только при условии, что p и q целые числа, не имеющие общего делителя. Исследуем соответствующие многоугольники при различных значениях p и q, удовлетворяющих условию

$$p^2+q^2 \leqq 25.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(p)	1	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	4
(q)	0	1	1	2	1	3	1	3	2	4	1	4	3
p^2+q^2	1	1	2	5	5	10	10	13	13	17	17	25	25

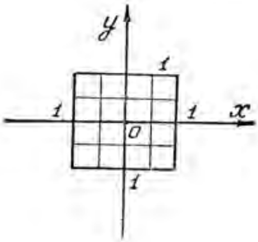

Рис. 1.

1-й случай $(p)=1,\ (q)=0 \quad x^2+y^2 \leqq 3$

$$-1<x<1$$
$$-1<y<1$$

2-й случай $(p)=0,\ (q)=1 \quad x^2+y^2 \leqq 3$

$$-1<x<1$$
$$-1<y<1$$

3-й случай $(p)=1, \quad (q)=1 \quad x^2+y^2 \leqq 6$

$$-2<x<2$$
$$-2<y<2$$
$$-3<x+y<3$$
$$-3<x-y<3$$

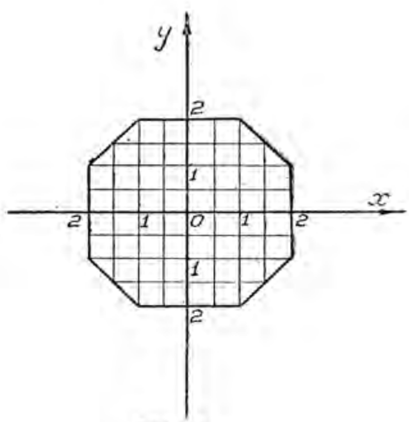

Рис. 2.

4-й случай $\quad (p)=1, \quad (q)=2 \quad x^2+y^2 \leqq 15$

$$-3<x<3$$
$$-3<y<3$$
$$-5<x+y<5$$
$$-5<x-y<5$$

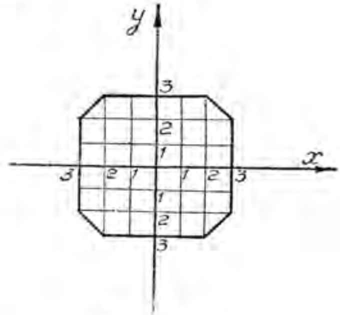

Рис. 3.

5-й случай $\quad (p)=2, \quad (q)=1 \quad x^2+y^2 \leqq 15$

$$-3<x<+3$$
$$-3<y<3$$
$$-5<x+y<5$$
$$-5<x-y<5$$

6-й случай $\quad (p)=1, \quad (q)=3 \quad x^2+y^2 \leqq 30$

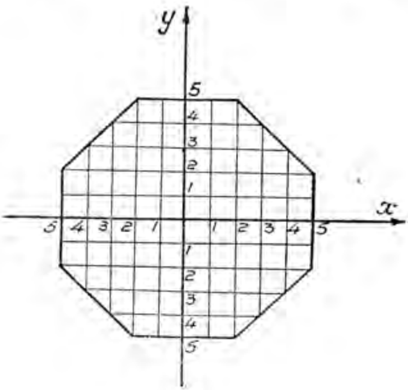

Рис. 4.

$$-5<x<5$$
$$-5<y<5$$
$$-7<x+y<7$$
$$-7<x-y<7$$

7-й случай $\quad (p)=3, \quad (q)=1 \quad x^2+y^2 \leqq 30$

$$-5<x<5$$
$$-5<y<5$$
$$-7<x+y<7$$
$$-7<x-y<7$$

8-й случай $\quad (p)=2, \quad (q)=3 \quad x^2+y^2 \leqq 39$

$$-6<x<6$$
$$-6<y<6$$
$$-8<x+y<8$$
$$-8<x-y<8$$
$$-13<x+2y<13$$
$$-13<2x+y<13$$
$$-13<2x-y<13$$
$$-13<x-2y<13$$

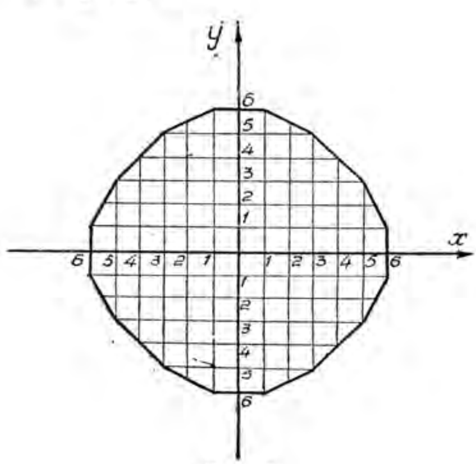

Рис. 5.

9-й случай $(p)=3,\quad (q)=2\quad x^2+y^2\leqq 39$

$$-6<x<6 \qquad -13<x+2y<13$$
$$-6<y<6 \qquad -13<2x+y<13$$
$$-8<x+y<8 \qquad -13<2x-y<13$$
$$-8<x-y<8 \qquad -13<x-2y<13$$

10-й случай $(p)=1,\quad (q)=4\quad x^2+y^2\leqq 51$

$$-7<x<7$$
$$-7<y<7$$
$$-15<2x+y<15$$
$$-15<x+2y<15$$
$$-15<2x-y<15$$
$$-15<x-2y<15$$

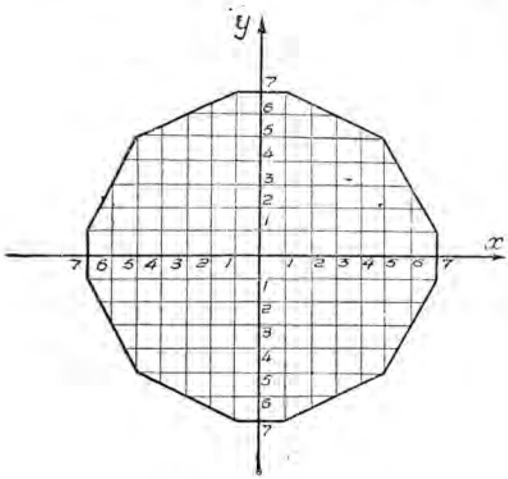

Рис. 6.

11-й случай $(p)=4,\quad (q)=1$
$x^2+y^2\leqq 51$

$$-7<x<7$$
$$-7<y<7$$
$$-15<2x+y<15$$
$$-15<x+2y<15$$
$$-15<2x-y<15$$
$$-15<x-2y<15$$

12-й случай $(p)=3,\quad (q)=4\quad x^2+y^2\leqq 75$

$$-8<x<8$$
$$-8<y<8$$
$$-12<x+y<12$$
$$-12<x-y<12$$
$$-19<2x+y<19$$
$$-19<x+2y<19$$
$$-19<x-2y<19$$
$$-19<2x-y<19$$

13-й случай $(p)=4,\ (q)=3$
$x^2+y^2\leqq 75$

$$-8<x<8$$
$$-8<y<8$$
$$-12<x+y<12$$
$$-12<x-y<12$$
$$-19<2x+y<19$$
$$-19<x+2y<19$$
$$-19<2x-y<19$$
$$-19<x-2y<19$$

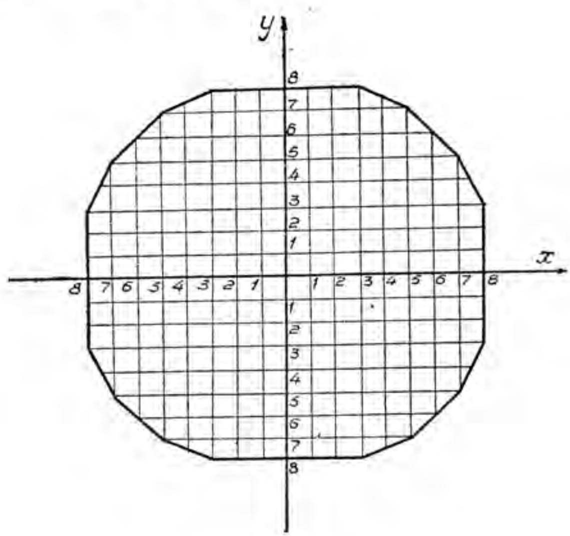

Рис. 7.

Рассматриваю теперь плоскость двух измерений

$$x=\alpha z+\beta t, \qquad y=\gamma z+\delta t.$$

Она пересекается с плоскостью P в точке

$$x=\alpha p+\beta q, \qquad y=\gamma p+\delta q, \quad z=p, \quad t=q.$$

Обозначая дальше через p и q положительные или равные нулю числа, положим

$$\begin{aligned} &x=k\alpha p+h\beta q, && y=k\gamma p+h\delta q,\\ &z=kp, \quad t=hq && k=\pm 1, \quad h=\pm 1.\end{aligned}$$

Поставим условием, чтобы полученная точка находилась внутри найденного многоугольника.

1-й случай $x=k\alpha$, $y=k\gamma$. Поэтому

1) $-1<\alpha<1$, $\qquad -1<\gamma<1$

2-й случай $x=h\beta$, $y=h\delta$

2) $-1<\beta<1$, $\qquad -1<\delta<1$

3-й случай $x=k\alpha+h\beta \qquad y=k\gamma+h\delta$

3) $-2<\alpha+\beta<2$, $\quad -2<\alpha-\beta<2$, $\quad -2<\gamma+\delta<2$, $\quad -2<\gamma-\delta<2$,
$-3<\alpha+\beta+\gamma+\delta<3$, $\quad -3<\alpha+\gamma-\beta-\delta<3$, $\quad -3<\alpha-\gamma+\beta-\delta<3$,
$-3<\alpha-\gamma-\beta+\delta<3$

4-й случай $x=k\alpha+2h\beta \quad y=k\gamma+2h\delta$

4) $-3<\alpha+2\beta<3$, $\quad -3<\alpha-2\beta<3$, $\quad -3<\gamma+2\delta<3$, $\quad -3<\gamma-2\delta<3$,
$-5<\alpha+\gamma+2\beta+2\delta<5$, $\quad -5<\alpha+\gamma-2\beta-2\delta<5$,
$-5<\alpha-\gamma+2\beta-2\delta<5$, $\quad -5<\alpha-\gamma-2\beta+2\delta<5$

5-й случай $x=2k\alpha+h\beta \qquad y=2k\gamma+h\delta$

5)
$$\begin{aligned} &-3<2\alpha+\beta<3 && -5<2\alpha+2\gamma+\beta+\delta<5\\ &-3<2\alpha-\beta<3 && -5<2\alpha+2\gamma-\beta-\delta<5\\ &-3<2\gamma+\delta<3 && -5<2\alpha-2\gamma+\beta-\delta<5\\ &-3<2\gamma-\delta<3 && -5<2\alpha-2\gamma-\beta+\delta<5\end{aligned}$$

6-й случай $x=k\alpha+3h\beta \qquad y=k\gamma+3h\delta$

6)
$$\begin{aligned} &-5<\alpha+3\beta<5 && -7<\alpha+\gamma+3\beta+3\delta<7\\ &-5<\gamma+3\delta<5 && -7<\alpha+\gamma-3\beta-3\delta<7\\ &-5<\alpha-3\beta<5 && -7<\alpha-\gamma+3\beta-3\delta<7\\ &-5<\gamma-3\delta<5 && -7<\alpha-\gamma-3\beta+3\delta<7\end{aligned}$$

7-й случай $x=3k\alpha+h\beta \qquad y=3k\gamma+h\delta$

7)
$$\begin{aligned} &-5<3\alpha+\beta<5 && -7<3\alpha+3\gamma+\beta+\delta<7\\ &-5<3\alpha-\beta<5 && -7<3\alpha-3\gamma+\beta-\delta<7\\ &-5<3\gamma+\delta<5 && -7<3\alpha-3\gamma-\beta+\delta<7\\ &-5<3\gamma-\delta<5 && -7<3\alpha+3\gamma-\beta-\delta<7\end{aligned}$$

8-й случай $x=2k\alpha+3h\beta \qquad y=2k\gamma+3h\delta$

$$-6<2\alpha+3\beta<6 \qquad -8<2\alpha+2\gamma+3\beta+3\delta<8$$
$$-6<2\alpha-3\beta<6 \qquad -8<2\alpha+2\gamma-3\beta-3\delta<8$$
$$-6<2\gamma+3\delta<6 \qquad -8<2\alpha-2\gamma+3\beta-3\delta<8$$
$$-6<2\gamma-3\delta<6 \qquad -8<2\alpha-2\gamma-3\beta+3\delta<8$$

$$-13<2\alpha+4\gamma+3\beta+6\delta<13 \qquad -13<4\alpha+2\gamma+6\beta+3\delta<13$$
$$-13<2\alpha+4\gamma-3\beta-6\delta<13 \qquad -13<4\alpha+2\gamma-6\beta-3\delta<13$$
$$-13<2\alpha-4\gamma+3\beta-6\delta<13 \qquad -13<4\alpha-2\gamma+6\beta-3\delta<13$$
$$-13<2\alpha-4\gamma-3\beta+6\delta<13 \qquad -13<4\alpha-2\gamma-6\beta+3\delta<13$$

9-й случай $x=3k\alpha+2h\beta \qquad y=3k\gamma+2h\delta$

$$-6<3\alpha+2\beta<6 \qquad -8<3\alpha+3\gamma+2\beta+2\delta<8$$
$$-6<3\alpha-2\beta<6 \qquad -8<3\alpha+3\gamma-2\beta-2\delta<8$$
$$-6<3\gamma+2\delta<6 \qquad -8<3\alpha-3\gamma+2\beta-2\delta<8$$
$$-6<3\gamma-2\delta<6 \qquad -8<3\alpha-3\gamma-2\beta+2\delta<8$$

$$-13<3\alpha+6\gamma+2\beta+4\delta<13$$
$$-13<3\alpha+6\gamma-2\beta-4\delta<13$$
$$-13<3\alpha-6\gamma+2\beta-4\delta<13$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

10-й случай $x=k\alpha+4h\beta \qquad y=k\gamma+4h\delta$

$$-7<\alpha+4\beta<7 \qquad -15<2\alpha+\gamma+8\beta+4\delta<15$$
$$-7<\gamma+4\delta<7 \qquad -15<\alpha+2\gamma+4\beta+8\delta<15$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

11-й случай $x=4k\alpha+h\beta \qquad y=4k\gamma+h\delta$

$$-7<4\alpha+\beta<7 \qquad -15<8\alpha+4\gamma+2\beta+\delta<15$$
$$-7<4\gamma+\delta<7 \qquad -15<4\alpha+8\gamma+\beta+2\delta<15$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

12-й случай $x=3k\alpha+4h\beta \qquad y=3k\gamma+4h\delta$

$$-8<3\alpha+4\beta<8$$
$$-8<3\gamma+4\delta<8$$
$$-12<3\alpha+3\gamma+4\beta+4\delta<12\ldots$$
$$-19<6\alpha+3\gamma+8\beta+4\delta<19\ldots$$
$$-19<3\alpha+6\gamma+4\beta+8\delta<19\ldots$$

13-й случай $\quad x=4k\alpha+3h\beta \quad y=4k\gamma+3h\delta$

$$-8<4\alpha+3\beta<8$$

$$-8<4\gamma+3\delta<8$$

$$-12<4\alpha+4\gamma+3\beta+3\delta<12\ldots$$

$$-19<8\alpha+6\beta+4\gamma+3\delta<19\ldots$$

$$-19<4\alpha+3\beta+8\gamma+6\delta<19\ldots$$

Из всех неравенств независимыми оказываются только следующие:

$$-1<\alpha<1 \qquad -3<\alpha+\beta+\gamma+\delta<3$$

$$-1<\beta<1 \qquad -3<\alpha+\beta-\gamma-\delta<3$$

$$-1<\gamma<1 \qquad -3<\alpha-\beta+\gamma-\delta<3$$

$$-1<\delta<1 \qquad -3<\alpha-\beta-\gamma+\delta<3$$