1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О научном дневнике Г. Ф. Вороного

Б. А. Венков

§ 1. Публикуемая в настоящее время рукопись Вороного: „Заметки о неопределенных квадратичных формах“ (и дополнение „О неопределенных квадратичных формах“) представляет последний по времени написания отрывок из материалов научного дневника Вороного, относящихся к неопределенным квадратичным формам[1]). Этот отрывок заканчивается записью от 7.X 1908 г., сделанною примерно за месяц до кончины Г. Ф. Вороного. Документ этот представляет большой интерес как с точки зрения характеристики научного творчества Вороного, так и с чисто научной стороны. Читатель, следящий за спокойным и ясным изложением мыслей в печатных трудах Вороного, уже чувствует, какая огромная работа скрывается за этими строками; эта работа предстает перед нами в наглядном виде при изучении материалов дневника. В этом отношении ознакомление с научным дневником Вороного является весьма поучительным.

§ 2. Арифметической теорией форм (однородных многочленов какой-либо степени от нескольких переменных) мы называем совокупность тех свойств, которые связаны с предположением либо целости коэфициентов, либо целых значений переменных формы. Старые математики Гаусс и Лагранж закончили в основном арифметическую теорию двойничных квадратичных форм. Эрмит ввел в теорию форм новую идею — применение непрерывных параметров. Идея Эрмита в общих чертах заключается в том, что он вводит в коэфициенты формы некоторые параметры и рассматривает изменение арифметических свойств формы (например, ее минимума при целых значениях переменных) при непрерывном изменении этих параметров. Идея Эрмита развивалась в работах последующих математиков: Е. И. Золотарева (1869), Зеллинга (Selling, 1873), Шарва (Charve, 1880), Минковского (H. Minkovski, 1896). Несмотря на ряд важных результатов, полученных указанными учеными, применение принципа непрерывных параметров в их работах носит случайный, так сказать, хаотический, характер отчасти вследствие того, что тогда еще не было вполне ясно, какие задачи можно решать этим

[1]) Остальные части дневника будут напечатаны в III томе полного собрания сочинений Вороного.

принципом, отчасти вследствие того, что некоторые из этих авторов (Эрмит, Золотарев) не пользовались геометрией, наконец, иногда в силу громоздкой, неудачно выбранной конструкции (Зеллинг).

Основная заслуга Вороного заключается в том, что он четко определил характер тех задач в арифметической теории форм, которые можно решать принципом непрерывных параметров и дал, на основе систематического употребления геометрии, применение этого принципа к ряду больших, даже можно сказать грандиозных (по тому времени) задач.

Первая работа Вороного, посвященная непрерывным параметрам, есть его докторская диссертация 1896 г. [1]. В этой работе он дает алгорифмическое решение вопросов, нужных для кубического поля (определение основных единиц и установление полной системы неэквивалентных идеалов), — таким образом, занимается случаем разложимой кубической тройничной формы. В дальнейшем он переходит к простейшему случаю неразложимой формы, — к квадратичной форме от нескольких переменных. Им задуман обширный труд под заглавием: „Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм“ [2], который должен был состоять из нескольких больших статей. В предисловии к этому труду читаем: „Я предполагаю опубликовать ряд мемуаров, в которых изложу новые применения принципа Эрмита к различным проблемам арифметической теории определенных и неопределенных квадратичных форм“ (**Je me propose de publier une série de Mémoires dans lesquels je vais exposer de nouvelles applications du principe d'Hermite aux différents problèmes de la théorie arithmétique des formes quadratiques définies et indéfinies, [2], I Mém.,** p. 98). Из этих мемуаров успели появиться только два: о совершенных формах и о параллелоэдрах, оба посвященные положительным формам; печатание их закончилось уже после смерти Вороного. В научном дневнике мы имеем первый опыт систематического изложения мыслей Вороного, относящихся к неопределенным формам. Мы говорим „первый опыт“, так как дневник представляет лишь изложение некоторых материалов в первоначальном виде и от них еще далеко до совершенства и законченности тех теорий, которые мы имеем в печатных трудах Вороного. Однако содержание дневника все же важно потому, что оно определяет направление дальнейших исследований по теории неопределенных квадратичных форм.

Вороной не указывает точно ближайшей цели своей работы. В записи от 27.II 1908 г. читаем: „Вчера я в первый раз получил отчетливую идею об алгорифме, который должен разрешить все вопросы рассматриваемой теории форм...“ „Не знаю, удастся ли мне мои мысли приложить для всех форм, но для форм с четырьмя переменными, кажется, я перешел ту преграду, которая меня все время останавливала“. В дальнейшем я попытаюсь указать главнейшие работы в теории неопределенных квадратичных форм и те задачи, которыми занимается эта теория (и которые большей частью далеки от окончательного решения), после чего и можно будет сделать более или менее вероятное предположение о том, что хотел найти Вороной.

§ 3. Возьмем неопределенную квадратичную форму с действительными коэфициентами

$$f(X)=f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\quad a_{ij}=a_{ji}, \tag{1}$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n)$ точка числового n-мерного пространства $\mathfrak{R}$. Определитель формы

$$d=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

будем считать не равным 0. Разложим f на квадраты

$$f(X)=-y_1^2-\ldots-y_\nu^2+y_{\nu+1}^2+\ldots+y_n^2, \tag{3}$$

причем y_i действительные линейные формы переменных x_i. Пару чисел (ν,μ) $(\mu=n-\nu)$ будем называть характеристикой формы f. Мы будем рассматривать линейные подстановки

$$x_i=s_{i1}x_1'+\ldots+s_{in}x_n,\qquad i=1,2,\ldots,n \tag{4}$$

с целыми коэфициентами s_{ij} определителя ±1, и группу этих подстановок обозначим через Γ. Две формы, переходящие одна в другую подстановкой группы Γ, назовем эквивалентными. Две точки (или вообще две фигуры в $\mathfrak{R}$), переходящие одна в другую подстановкой $s\in\Gamma$, будем также называть эквивалентными; если s принадлежит к какой-нибудь более узкой, чем Γ, группе (подгруппе Γ), то будем указывать, эквивалентность по какой группе имеется в виду. Эквивалентные формы, точки, фигуры будем объединять в один класс. Точку $\mathfrak{R}$ с целыми координатами будем называть просто целой точкой. Мы будем пользоваться обыкновенными векторными обозначениями: если

$$X=(x_1,\ldots,x_n),\quad X'=(x_1',\ldots,x_n')$$

точки и t — число, то

$$tX=(tx_1,\ldots,tx_n),\quad X+X'=(x_1+x_1',\ldots,x_n+x_n').$$

В арифметической теории квадратичных форм ставятся различные задачи. Одни из них решаются чисто арифметическим путем или с помощью анализа бесконечно малых; другие требуют привлечения геометрии. Из этих последних наиболее важными являются следующие (здесь предполагается, что коэфициенты формы f целые):

а) *Пусть m — данное целое число; найти*[1]) *все решения уравнения*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=m$$

в целых числах x_i.

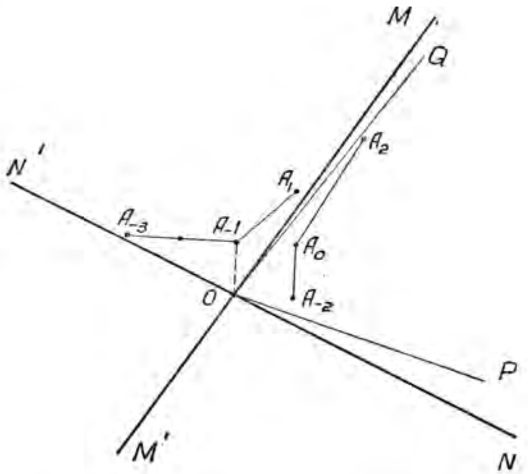
---

[1]) Под словами „найти", „узнать" мы подразумеваем нахождение алгорифма, удобного для практического решения задачи; обычно это сопровождается нахождением конструкций, имеющих чисто теоретический интерес.

б) *Даны две формы; узнать, эквивалентны они или нет, и в первом случае найти подстановку группы Γ, переводящую одну форму в другую.*

в) *Изучить свойства группы Γ_f подстановок (4) с целыми s_{ij} и определителем ± 1, переводящих форму f в себя.*

Существуют другие задачи, в которых коэфициенты f можно считать любыми действительными числами; примером их является задача Маркова:



г) *Определить, какой величины достигает минимум квадратичной формы при целых значениях переменных, не равных одновременно 0; выделить те формы, для которых этот минимум наибольший при некоторых данных условиях (например, при данном определителе формы).*

Может, конечно, случиться, что форма f представляет нуль, т. е. что $f(X_0)=0$ для целой точки $X_0 \neq 0$, или что f не достигает своего минимума при целых x_i. Тогда рассматриваем точную нижнюю границу множества чисел $|f(X)|$ для целых точек $X \neq X_0$.

§ 4. Остановимся сначала на случае $n=2$, когда

$$f(X)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2, \quad X=(x_1,\ x_2)$$

есть двойничная форма. Уравнение $f(X)=0$ изображает две прямые (см. рис.), пересекающиеся в начале 0 и не проходящие через другие целые точки (считаем, что f не представляет 0). Эти прямые делят плоскость $\mathfrak{R}$ на четыре угла; возьмем один из этих углов MON. Рассмотрим бесконечную ломаную $..A_{-2}A_0A_2...$ с вершинами в целых точках и такую, что между нею и сторонами угла MON нет целых точек. Эту ломаную будем обозначать через $\Pi(f)$. Такие же ломаные можно построить и в остальных углах, причем очевидно, что ломаная в угле $M'ON'$

будет симметрична с MON относительно начала. Ломаная $\Pi'(f)$ в угле MON' связана с $\Pi(f)$ таким взаимно однозначным соответствием: вектор, идущий из 0 в вершину $\Pi'(f)$ (например, OA_{-1}) будет параллелен некоторой стороне $\Pi(f)$ $(A_{-2}A_0)$, сторона $\Pi'(f)$ (например $A_{-1}A_1$) параллельна такому же вектору $\Pi(f)$ (OA_0). Это правило, представляющее не что иное, как геометрическое истолкование алгорифма непрерывных дробей, позволяет с удобством вычислять ломаную $\Pi(f)$, переходя от стороны $A_{-2}A_0$ к смежной стороне A_0A_2, затем опять к смежной и т. д. Указанные ломаные называются иногда полигоном Клейна ввиду того, что Клейн впервые употребил их для геометризации теории неопределенных двойничных форм [3]. Пусть B_1, B_2 две соседние целые точки на ломаной $\Pi(f)$ (на этой ломаной могут лежать и другие целые точки, кроме вершин $...A_{-2}, A_0, A_2...$). Так как треугольник OB_1B_2 пустой (т. е. не содержит целых точек, кроме вершин), то определитель, составленный из координат точек B_1, B_2, равен ± 1. Возьмем квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2)=f(x_1B_1+x_2B_2).$$

Предположим теперь, что коэфициенты f числа целые. Тогда с помощью теоремы о выпуклом теле (или непосредственно) легко доказать, что коэфициенты φ по абсолютной величине не превосходят некоторого предела, зависящего только от f; а так как φ тоже имеет целые коэфициенты, то таких форм φ может быть лишь конечное число. Но ломаная $\Pi(f)$ бесконечна, значит на ней найдутся две пары соседних целых точек B_1, B_2 и B'_1, B'_2 таких, что будем иметь тождество

$$f(x_1B_1+x_2B_2)=f(x_1B'_1+x_2B'_2).$$

Отсюда легко видеть, что существует целочисленная подстановка s, переводящая в себя форму f и точки B_1, B_2 в точки B'_1, B'_2; если при этом отрезки B_1B_2, $B'_1B'_2$ имеют одинаковое направление вдоль ломаной, то определитель s будет равен $+1$. Мы и будем для простоты рассматривать группу Γ'_f целочисленных подстановок определителя $+1$, переводящих f в себя и угол MON в себя (очевидно, что Γ'_f будет подгруппой Γ_f индекса 2 или 4). Подстановки группы Γ'_f передвигают ломаную $\Pi(f)$ саму по себе в направлении от N к M или в противоположном. Допустим, что мы вычисляем последовательно стороны $\Pi(f)$: A_0A_2, $A_2A_4...$ и A_kA_{k+2} — первая из полученных сторон, связанная с A_0A_2 подстановкой s группы Γ'_f. Очевидно, что дальнейшие стороны ломаной $\Pi(f)$ будут повторяться периодически (в смысле эквивалентности по группе Γ'_f) и что все подстановки Γ'_f суть положительные или отрицательные степени подстановки s. Таким образом, мы получаем решение задачи в): группа Γ'_f есть бесконечная циклическая группа, производящую подстановку которой мы можем вычислить. Задача б) также решается следующим образом: пусть даны две формы f, f' одинакового определителя; вычисляем полную систему неэквивалентных сторон $\Pi(f)$: $A_0A_2, \ldots, A_{k-2}A_k$ и по одной стороне ломаной для f' в двух смежных углах $f'=0$: $A'_0A'_2$ и $A'_1A'_3$. Если существует целочисленная подстановка, переводящая один из отрезков $A'_0A'_2$, $A'_1A'_3$ в один из отрезков $A_0A_2, \ldots, A_{k-2}A_k$ и одновременно f' в f, то формы f, f' эквивалентны (и только в этом случае).

Чтобы найти решение задачи а), построим внутри угла MON другой угол POQ, содержащий один полный период сторон ломаной $\Pi(f)$ (можно в качестве лучей OP, OQ взять, например, лучи OA_0, OA_k). Полученный угол POQ будет *фундаментальной областью* группы Γ'_f в угле MON, т. е. 1) всякая внутренняя точка угла MON эквивалентна (по группе Γ'_f) внутренней или граничной точке POQ; 2) две различные внутренние точки POQ не эквивалентны по Γ'_f.

Пусть данное целое число m в уравнении

$$f(x_1, x_2) = m \tag{5}$$

имеет знак функции f в угле MON; так как углы MON, $M'ON'$ симметричны относительно начала, то достаточно искать решения уравнения (5), соответствующие целым точкам $(x_1, x_2)=X$ угла MON. Очевидно, что если точка X дает решение уравнения (5), то и всякая эквивалентная X точка (по группе Γ'_f) дает решение этого уравнения, так что все решения (5) разделяются на классы эквивалентных по Γ'_f решений. Фундаментальная область POQ содержит по одному решению из каждого класса, и таких классов будет конечное число, так как внутри угла POQ содержится конечный кусок гиперболы (5). Зная одно решение X_0, мы напишем все решения соответствующего класса, так как нам известна производящая подстановка группы Γ'_f. Так решается задача а).

По поводу задачи г) для двойничных форм нужно отметить важную работу академика А. А. Маркова [4]. Пусть $M(f)$ есть точная нижняя граница множества чисел $|f(X)|$ для целых точек $X \neq 0$. Заметим, что отношение

$$\mu(f) = \frac{M(f)}{\sqrt{|d|}},$$

очевидно, не меняется при умножении f на постоянной множитель и при переходе от f к эквивалентной форме. Целью работы Маркова является определение всех форм f, для которых

$$\mu(f) > \frac{2}{3}.$$

Оказывается, что формы f, удовлетворяющие этому условию, образуют дискретный ряд; первые члены этого ряда (расположенного в порядке убывания $\mu(f)$) будут

$$f_1 = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2, \quad f_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2, \quad f_3 = x_1^2 - \frac{11}{5}x_1x_2 - x_2^2, \ldots$$

со значениями

$$\mu(f_1) = \sqrt{\frac{4}{5}}, \quad \mu(f_2) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \mu(f_3) = \sqrt{\frac{100}{221}}, \ldots$$

Марков доказывает многие замечательные свойства форм f_k, например: 1) отношения коэфициентов f_k суть числа рациональные, так что $M(f_k)$ есть минимум $|f_k(X)|$ для целых точек $X \neq 0$; 2) форма f_k принимает как значение $+M(f_k)$, так и значение $-M(f_k)$ один раз на протяжении полного периода ломаной $\Pi(f_k)$; 3) формы f_k связаны с решениями в целых числах p, q, r неопределенного уравнения

$$p^2+q^2+r^2=3pqr,$$

4) $\mu(f_k) \to \frac{2}{3}$ при $k \to \infty$.

Марков проводит рассуждение чисто арифметическим путем, но по существу его работа есть детальное исследование ломаной $\Pi(f)$. Геометрический анализ работы Маркова можно найти в книге Б. Н. Делоне [5].

§ 5. Мы остановились подробно на случае $n=2$, чтобы показать, что решение задач а) — г) тесно связано с исследованием целых точек, лежащих вблизи поверхности $f=0$; но этот случай, ввиду одномерной протяженности ломаной $\Pi(f)$, не дает представления о трудностях, возникающих в этой теории для $n \geqq 3$.

Пусть (3) — неопределенная форма с любой характеристикой (ν, μ); положим

$$y_i = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где α_{ij} действительные числа. Первоначальная идея непрерывных параметров Эрмита (в применении к неопределенным квадратичным формам) заключалась в следующем. Так как тождество (3) (при данных коэфициентах f) равносильно $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнениям для α_{ij}, то можно сказать, что система n^2 чисел α_{ij} зависит от $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольных параметров. Форме f соответствует положительная форма

$$\overline{f}(X) = y_1^2 + \ldots + y_\nu^2 + y_{\nu+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

Эту форму $\overline{f}$ подстановкой $s \in \Gamma$ переводим в некоторую, особого вида, *приведенную* положительную форму (иными словами, точку $\overline{f}$ переводим в некоторую фундаментальную область (ср. § 4) в пространстве положительных форм). Эрмит предлагает изучать свойства этих подстановок s при меняющейся системе значений параметров α_{ij}. Эта идея Эрмита подробно проведена для $n=3$ в упомянутом уже мемуаре Зеллинга [6], и получившаяся теория оказалась весьма сложной. Отметим некоторые результаты, связанные с этой первоначальной идеей Эрмита. Эрмит высказал теорему (и наметил ее доказательство) о том, что группа Γ_f, которая в случае $n \geqq 3$ и целочисленной f бесконечна и некоммутативна, обладает конечным числом производящих подстановок. Штуф (Stouff) доказал, что существует конечное число классов целочисленных форм f данной характеристики и данного определителя d; более простое доказательство этой теоремы было дано Зигелем (Siegel [7]).

В одном из более ранних отрывков дневника (1905) Вороной рассматривает систему параметров, сходную с u_{ij}, но потом оставляет ее, видимо, как не удовлетворяющую требованиям простоты.

Простой и удовлетворительной геометрической теории форм с любой характеристикой до сих пор не существует; ее-то и пытался построить Вороной.

§ 6. Случай, когда форма $\pm f$ имеет характеристику $(n-1, 1)$, был исследован в моей работе [8]. В этом случае, при надлежащем выборе знака, мы имеем представление

$$\pm f(X) = -y_1^2 - \ldots - y_{n-1}^2 + y_n^2. \tag{6}$$

Заметим, что для рассматриваемого случая свойства конуса $f(X)=0$ хорошо изучены в проективной геометрии ввиду того, что гиперболоид $\pm f(X)=1$ употребляется как модель $(n-1)$-мерного пространства Лобачевского. Из уравнения (6) легко усмотреть, что существуют семейства параллельных плоскостей, пересекающих конус $f=0$ по $(n-1)$-мерным эллипсоидам (т. е. по фигурам конечных размеров). Внутренность и граница конуса $f(X)=0$ (т. е. множество тех точек, для которых $\pm f(X) \geqq 0$) распадается на два симметричных относительно начала куска (две полости). Каждая из этих полостей есть выпуклое тело; возьмем одну из них и обозначим ее через $\mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{M}$ множество целых точек, принадлежащих $\mathfrak{K}$. Выпуклая оболочка множества $\mathfrak{M}$ будет некоторый бесконечный многогранник, границу которого обозначим через $\Pi(f)$; исследование поверхности $\Pi(f)$ и дано в моей работе [8]. Доказывается, что через каждую вершину $\Pi(f)$ проходит конечное число $(n-1)$-мерных граней $\Pi(f)$; для случая целочисленной f все эти грани эквивалентны (по группе Γ_f) конечному числу из них. От каждой $(n-1)$-мерной грани $\Pi(f)$ можно перейти к смежной грани и поэтому, на основании общего принципа Вороного (см. [2], I Mém., стр. 140 и сл.) вычислить полную систему неэквивалентных граней $\Pi(f)$. После этого задачи а), б) решаются алгорифмически примерно в таком же простом плане, как мы излагали в § 4.

Относительно задачи г) заметим, что еще сам Марков начал ее рассмотрение для $n=3$ и $n=4$. В работе [9] и в одной из последующих работ он дает четыре первых члена экстремального ряда для тройничных форм. Метод, употребляемый в этой работе Марковым, носит частный характер и не пригоден к обобщению. В работе [10] я рассматриваю задачу г) для $n=3$ с помощью геометрии Вороного. В этой работе вводится некоторое новое понятие *внешней вершины* (для конуса $f=0$); при помощи свойств внешних вершин и детального исследования поверхности $\Pi(f)$ я получаю первые 11 членов ряда Маркова для $n=3$; полного решения этой задачи для $n=3$ еще не достигнуто.

Сделаем еще несколько замечаний относительно задачи б). Между решением этой задачи в случае $n=2$ и в случае $n \geqq 3$ имеется принципиальная разница. Именно, при $n=2$ не существует теоретических признаков того, эквивалентны ли две данные формы f, f' или нет и этот вопрос можно решать только алгорифмически. При $n \geqq 3$ существуют довольно общие случаи, в которых эквивалентность f, f' гарантируется совпадением некоторых простых арифметических инвариантов (родовых характеров). В этом направлении следует указать ряд важных работ Арнольда Мейера (A. Meyer, см., например, Бахманн [11]). Было бы желательно получить результаты А. Мейера геометрическим путем, но это до сих пор не сделано.

§ 7. Переходим к краткому обзору содержания печатаемого отрывка дневника Вороного. Пусть (3) неопределенная форма произвольной характеристики (ν, μ); будем называть k-мерной плоскостью k-мерное линейное подпространство в $\mathfrak{R}$. Из формулы (3) легко видеть, что существуют ν-мерные плоскости P, проходящие через начало такого рода, что для $X \in P$, $X \neq 0$ имеем $f(X) < 0$ (и не существует плоскостей большего, чем ν, числа измерений, обладающих этим свойством). Аналогично, обозначим через Q μ-мерную плоскость, проходящую через 0, для всех точек которой (кроме 0) $f(X) > 0$. Первые записи (20.II—27.II) содержат описание геометрии конуса $f(X)=0$ в пространстве $\mathfrak{R}$ путем исследования семейств этих плоскостей P, Q. Доказываются теоремы об ограничении сверху и снизу для объема параллелепипеда, построенного на ν независимых векторах из P и μ независимых векторах $Q_1, \ldots, Q_\mu$ из Q для случая, когда $Q_1, \ldots, Q_\mu$ суть целочисленные векторы (т. е. плоскость Q рациональна). Почти все дальнейшие записи относятся к тройничным формам ($n=3$), на которых Вороной проверяет свои соображения об общем случае. Все то, что высказывает Вороной о тройничных формах, легко вытекает из результатов моих работ [8, 10].

Отметим одно важное определение, которое вводит Вороной для общего случая (запись от 7.X). Пусть P — рациональная ν-мерная плоскость указанного выше типа. Проведем через P рациональную $(\nu+1)$-мерную плоскость $P_{\nu+1}$ и будем передвигать P параллельно самой себе в $P_{\nu+1}$; заметим, что при всяком положении P она пересекает область $f(X) \geqq 0$ по конечному куску — ν-мерному эллипсоиду $\mathcal{E}$. Пусть P_0 — то положение P, при котором она впервые наткнется на целую точку в области $f(X) \geqq 0$ (т. е. когда внутри или на границе $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0$ впервые появится целая точка). Нас интересуют (говорит Вороной) такие плоскости P, для которых при всякой $P_{\nu+1}$ эллипсоид $\mathcal{E}_0$ будет содержать ν-мерный комплекс целых точек, так что выпуклая оболочка этих точек будет ν-мерный многогранник $\mathfrak{g}$. При этом, если Q — любая μ-мерная плоскость (проходящая целиком в области $f(X) > 0$), то для нее существует плоскость P определенного нами вида такая, что точка пересечения Q и P_0 (эти плоскости, как легко видеть, пересекаются в единственной точке), принадлежит многограннику $\mathfrak{g}$. Справедливо ли это утверждение Вороного, или нет — пока неизвестно.

В дополнении „О неопределенных квадратичных формах" (от 26.II 1908) мы имеем примеры вычисления таких специальных многогранников $\mathfrak{g}$ для частного случая $f=x^2+y^2-3z^2-3t^2$ (форма с характеристикой (2,2)).

Относительно указанного общего определения Вороного прежде всего нужно заметить, что оно весьма целесообразно. Введенное в моей работе [10] понятие о внешней вершине конуса, о котором я упоминал выше и которое позволило продвинуть решение задачи Маркова, есть только частный случай этого общего определения. Далее, судя по этому определению, можно думать, что Вороной пытался построить с каждой стороны конуса $f=0$ систему многогранников (связный полиедральный комплекс в смысле комбинаторной топологии или, может быть, другое, более сложное образование), играющую роль поверхности $\Pi(f)$ в случае характеристики $(n-1,1)$. Этот комплекс должен быть ν-мерный со стороны $f(X)>0$ (т. е. наивысшая размерность клетки комплекса должна быть ν) и μ-мерный со стороны $f(X)<0$. Под словом „алгорифм" в цитированной выше (§ 2) фразе Вороного, надо полагать, подразумевается какое-нибудь правило перехода от клетки такого комплекса к смежной клетке. Переход от какого-нибудь геометрического объекта (вершины, грани, области) к смежному объекту играет вообще важную роль во всех алгорифмах Вороного.

В заключение следует сказать, что долгом советских арифметиков и геометров является продолжение изысканий нашего великого соотечественника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Вороной, Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей, Варшава, 1896, 203 стр.

2. G. Voronoï, Nouvelles applications des parametres continus à la théorie des formes quadratiques, I Mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, Crelle Journ., 133, 1908, p. 97—178; II Mémoire: Recherches sur les parallélloèdres primitifs, Crelle Journ., 134, 1908, p. 198—287, Crelle Journ., 136, 1909, p. 67—178.

3. F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (литогр.), I, Göttingen, 1896, 391 стр.

4. А. А. Марков, О бинарных квадратичных формах положительного определителя, СПб, 1880, см. также УМН, том III, вып. 5, стр. 7—51.

5. Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, 419 стр.

6. Selling, Über die binären und ternären quadratischen Formen, Crelle Journ., Bd. 76—77, 1873—1874, S. 143—229.

7. C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, II, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 37, No. 1, 1936, p. 230—263.

8. Б. А. Венков, Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы, ИАН СССР, 1937, стр. 139—170.

9. A. A. Markoff, Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies, Math. Annalen, 56, 1903.

10. Б. А. Венков, Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм, ИАН СССР, 9, 1945, стр. 429—494.

11. P. Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen, I Abtheilung, Leipzig, 1898, 668 стр.

Поступило 5.VI 1951 г.
Ленинград.