Фундаментальные решения системы диференциальных уравнений эллиптического типа

Я. Б. Лопатинский

В работе [1] были построены фундаментальные решения системы диференциальных уравнений эллиптического типа. При изучении таких систем особую важность имеют фундаментальные решения, обладающие следующим свойством: сопряженная матрица фундаментальной матрицы $\varphi(x, y)$[1]) в точке y является фундаментальной матрицей в точке x сопряженной системы уравнений.

Такие фундаментальные решения были построены И. Н. Векуа и его учениками для случая двух аргументов для систем уравнений (с аналитическими коэфициентами) специального вида [2]).

В настоящей работе будет дано построение таких фундаментальных решений для случая произвольного количества аргументов и без предположения аналитичности коэфициентов, но также для систем специального вида.

Будет проведено также исследование аналитического характера решений таких систем.

1. Рассматривается матрица

$$A = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_{kl=1}^{p},$$

где

$$A_{kl} = A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j_1 \dots j_n} f_{kl}^{j_1 \dots j_n} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \qquad (k, l = 1, \dots, p)$$

суть линейные диференциальные операторы порядка s_{kl}; $\sigma = \max_{kl} s_{k,l}$.

Коэфициенты $f_{k,l}^{j_1 \dots j_n}$ предполагаются непрерывно диференцируемыми в D $j_1 + \dots + j_n$ раз комплексными функциями действительных аргументов $x_1, \dots, x_n$, определенными в области D. Пусть

$$A_{kl}^{0}(x, \alpha) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = \sigma} f_{k,l}^{j_1 \dots j_n} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$$

---

1) Определение в [1], п. 1.

2) См. [2].

(при $\sigma > s_{k,l}$, $A^0_{kl}(x, \alpha) = 0$); $A^0 = A^0(x, \alpha)$ матрица, элементами которой являются $A^0_{k,l}(x, \alpha)$, $f_{kl}(x, \alpha)$ — алгебраическое дополнение элемента $A^0_{kl}(x, \alpha)$ в этой матрице. Будут рассматриваться только такие матрицы эллиптического типа в области D (в дальнейшем называемые матрицами эллиптического типа без оговорки), для которых $\det A^0(x, \alpha) = f(x, \alpha)$ отличен от нуля для каждой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ и каждой действительной не нулевой точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда степень формы $f(x, \alpha)$ относительно $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ равна, очевидно, σp и обозначается в дальнейшем через s; степень форм $f_{kl}(x, \alpha)$ равна $\sigma(p-1) = s - \sigma$ (или форма равна нулю). Очевидно, сопряженная матрице эллиптического типа матрица будет также эллиптического типа.

В дальнейшем матрица, полученная транспонированием функциональной матрицы F будет обозначаться через F' (сопряженная матрица); если элементы матрицы A являются линейными диференциальными операторами, то через A' (сопряженная матрица) будет обозначаться матрица, полученная из A транспонированием и заменой каждого оператора сопряженным оператором.

Пусть $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть матрица, сопряженная матрице эллиптического типа $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$; очевидно, $A'^0(x, \alpha) = A^{0\prime}(x, -\alpha)$,

$$\det A'^0(x, \alpha) = f(x, -\alpha).$$

Пусть $\varphi(x-y, z)$ есть фундаментальная функция (в точке $y \in D$) оператора $f\left(z, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$; как показано в [1], эту функцию можно представить формулами (2), (3), (4), (5) из (1), п. 2.

$\psi^0_{kl}(x, y)$ будет обозначать $f_{kl}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y)$; $\psi^0(x, y) = (\psi^0_{kl}(x, y))^p_{k,l=1}$.

Далее используются следующие обозначения: V — конечная область, замыкание которой содержится в D, V_1 — подобласть V, $K^x_m(V_1)$, $K^y_m(V_1)$, $K^{xy}_m(V_1)$ будут обозначать классы функциональных матриц, элементы которых обладают свойствами: при $x \in V_1$, $y \in V$, или при $x \in V$ $y \in V_1$; или при $x, y \in V_1$, соответственно, $x \neq y$, $K(x, y)$ непрерывна по совокупности точек x, y; $K(x, y)\,|x-y|^m$ [1] (при $m > 0$), $\frac{K(x, y)}{\lg(x, y)}$ (при $m = 0$), $K(x, y)$ (при $m < 0$) ограничены.

$$K^x_{m-0}(V_1) = \bigcup_{q<m} K^x_q(V_1), \quad K^y_{m-0}(V_1) = \bigcup_{q<m} K^y_q(V_1),$$
$$K^{xy}_{m-0}(V_1) = \bigcup_{q<m} K^{xy}_q(V_1), \quad K^x_m = \bigcup_{\overline{V}_1 \subset V} K(V_1),$$
$$K^y_m = \bigcup_{\overline{V}_1 \subset V} K^y_m(V_1), \qquad K_m = K^x_m(V) = K^y_m(V) = K^{xy}_m(V).$$

---

[1]) Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ то $|x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$.

Пусть A, A' — сопряженные операторные матрицы, u, v — (достаточно гладкие) функциональные матрицы. Тогда можно известным образом подобрать такие матрицы $a^j(u, v)$, элементы которых суть билинейные диференциальные формы u, v, что

$$uAv-(A'u')'v=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}a^j(u, v).$$

Если далее B, B' также сопряженные операторные матрицы и AB, $(AB)'$ определены, то, полагая

$$uBv-(B'u')'v=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}b^j(u, v),$$

получают

$$uABv-((AB)'u')'v=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a^j(u, Bv)+b^j((A'u')', v)).$$

Таким образом, билинейные формы, соответствующие оператору AB, можно полагать равными

$$a^j(u, Bv)+b^j((A'u')', v) \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{1,1}$$

2. Здесь будут сделаны некоторые дополнения к результатам [1], п. 8.

Лемма 1. *Пусть*

$$F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k_1,\ldots,k_n}F_{k_1,\ldots,k_n}(x)\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

есть линейный диференциальный оператор порядка r; $F^0(x, \alpha)$ *есть форма относительно* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, *составленная из старших членов* $F(x, \alpha)$.

1. *Если старшие коэфициенты операторов* $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *непрерывно диференцируемы* t *раз в* D, *каждый коэфициент* $F_{k_1\ldots k_n}(x)$ *непрерывно диференцируем в* $D \max\{t, t-s+1+k_1+\ldots+k_n\}$ *раз и старшие коэфициенты* $F_{k_1,\ldots,k_n}(x)$ *непрерывно диференцируемы в* $D\max\{t, t-s+1+r\}+1$ *раз, то имеют место представления:*

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial y_1^{j_1}\ldots\partial y_n^{j_n}}F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y)=$$
$$=\sum_{0\leqslant k_1+\ldots+k_n\leqslant\max\{0, j_1+\ldots+j_n+r-s+1\}}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}M_{j_1\ldots j_n}^{k_1\ldots k_n}(x, y);\ (j_1+\ldots+j_n\leqslant t). \tag{2,1}$$

При этом, если $F^0(x, \alpha)$ *кратна* $f(x, \alpha)$, *то суммирование производится в пределах* $0\leqslant k_1+\ldots+k_n\leqslant j_1+\ldots+j_n+r-s$.

Имеют далее место соотношения:

$$\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}M_{j_1\ldots j_n}^{k_1\ldots k_n}(x, y)\in K_{n-1+l_1+\ldots+l_n}$$

при

$$0\leqslant l_1+\ldots+l_n+j_1+\ldots+j_n\leqslant t \tag{2,2}$$

и, например,

$$M^{k_1 \dots k_n}_{j_1+1, j_2 \dots j_n}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_1} M^{k_1 \dots k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_1} M^{k_1 \dots k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y) - M^{k_1-1, k_2 \dots k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y)^{1)}. \tag{2,3}$$

2. Если старшие коэфициенты операторов $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *непрерывно диференцируемы* $t+\max\{0, r-s+1\}$ *раз, то, при прежних предположениях относительно коэфициентов оператора* $F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, *имеют место представления:*

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-y, y) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant k_1+\dots+k_n \leqslant \max\{0, j_1+\dots+j_n+r-s+1\}} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} N^{k_1 \dots k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y), \ (j_1+\dots+j_n \leqslant t). \tag{2,4}$$

Если $F^0(x, \alpha)$ *кратно* $f(x, \alpha)$, *то суммирование в этой формуле производится только в интервале* $0 \leqslant k_1+\dots+k_n \leqslant \max\{0, j_1+\dots+j_n+r-s\}$. *Наконец, для* $N^{k_1 \dots k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y)$ *имеют место соотношения, подобные* (2,2), (2,3).

Доказательство. Прежде всего будет рассмотрен класс функций $g(x, y)$, — C_q ($q \geqslant 0$), обладающих свойством:

$$\left.\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n+l_1+\dots+l_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial z_1^{l_1} \dots \partial z_n^{l_n}} g(x-y+z, z)\right|_{z=y} \in K_{n-1+k_1+\dots+k_n}$$

при $k_1+\dots k_n+l_1+\dots+l_n \leqslant q$.

Если $g(x, y), g_1(x, y) \in C_q$ и $h(x, y)$ непрерывно диференцируема в D q раз, то, очевидно, $h(x, y) g(x, y) \in C_q$, $g(x, y)+g_1(x, y) \in C_q$; далее, при $q > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(x, y) + \frac{\partial}{\partial y_j} g(x, y) \in C_{q-1}.$$

В [1], п. 2 дано представление функции $\varphi(x-y, y)$ в виде

$$\varphi(x-y, y) = \int \dots (n) \dots \int_{S(x-y)} \frac{\Phi(x-y, \alpha)}{f(y, \alpha)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

$$\Phi(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{s-1}}{2(2\pi i)^{n+1}(s-n)!} \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k \alpha_k\right)^{s-n} \lg\left[-\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^n x_k \alpha_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k^2}\right] & (s \geqslant n) \\ \dfrac{(-1)^n (n-s-1)!}{(2\pi i)^{n+1}} \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k \alpha_k\right)^{s-n} & (s < n). \end{cases}$$

---

1) Здесь полагают $M^{k_1+\dots+k_n}_{j_1 \dots j_n}(x, y) = 0$ при отрицательных значениях индексов или при $k_1+\dots+k_n > j_1+\dots+j_n+r-s+1$.

Там же описана область интегрирования $S(x-y)$. В [1], п. 3 исследованы свойства интегралов указанного вида: именно было показано, что диференцируемость таких интегралов и оценка величины таких интегралов и их производных (как функции x, y) возможна способом, вытекающим из элементарных соображений.

Отсюда легко видеть, что при непрерывной диференцируемости в D t раз старших коэфициентов операторов $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и функции $h(x, y)$,

$$h(x, y) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \varphi(x-y, y) \in C_t, \quad (k_1+\ldots+k_n<s); \tag{2,5}$$

если $h(x)$ непрерывно диференцируема в D $t+1$ раз, то

$$[h(x)-h(y)] \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \varphi(x-y, y) \in C_t \qquad (k_1+\ldots+k_n<s).$$

Если каждый коэфициент $F_{k_1\ldots k_n}(x)$ оператора $F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно диференцируем в D $\max\{t, t-s+1+k_1+\ldots+k_n\}$ раз, то имеет место очевидное представление:

$$F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{0\leqslant l_1+\ldots+l_n\leqslant r-s+1} \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{l_1\ldots l_n}(x) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} + \\ + \sum_{0\leqslant l_1+\ldots+l_n<s-1} F_{l_1\ldots l_n}(x) \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}},$$

где $g_{r_1\ldots r_n}^{l_1\ldots l_n}(x)$ непрерывно диференцируема в D $l_1+\ldots+l_n+t$ раз (суммы с противоречивой индексацией опускаются). Полагая:

$$M_{0\ldots0}^{k_1\ldots k_n}(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_n}(y) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x-y, y) \\ \hfill (k_1+\ldots+k_n=r-s+1), \\ \displaystyle\sum_{r_1+\ldots+r_n=-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{[g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_j+1\ldots k_n}(x) - \\ \quad - g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_j+1\ldots k_n}(y)] \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x-y, y)\Big\} + \\ \quad + g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_n}(x) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x-y, y) \quad (k_1+\ldots+k_n=r-s, \\ \hfill k_1=\ldots=k_{j-1}=0,\ k_{j+1}\neq 0), \\ \displaystyle\sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_n}(x) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x-y, y); \\ \hfill (r-s>k_1+\ldots+k_n>0), \\ \displaystyle\sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{0\,0\ldots0}(x) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x-y, y) + \\ \quad + \displaystyle\sum_{0\leqslant l_1+\ldots+l_n<s-1} F_{l_1\ldots l_n}(x) \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \varphi(x-y, y) \\ \hfill (k_1+\ldots+k_n=0) \end{cases}$$

получают

$$F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y) = \sum_{0 \le k_1+\ldots+k_n \le \max\{0, r-s+1\}} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} M_{0\ldots0}^{k_1\ldots k_n}(x, y) \quad (2,6)$$

и, на основании сделанных замечаний,

$$M_{0\ldots0}^{k_1\ldots k_n}(x, y) \in C_t.$$

Далее, очевидно, что

$$F^0(x, \alpha) = \sum_{l_1+\ldots+l_n=r-s+1} \sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{l_1\ldots l_n}(x)\, \alpha_1^{r_1+l_1}\ldots\alpha_n^{r_n+l_n}. \quad (2,7)$$

Поэтому, при $r \geqslant s-1$

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n=r-s+1} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} M_{0\ldots0}^{k_1\ldots k_n}(x, y) =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n=r-s+1} \sum_{r_1+\ldots+r_n=s-1} g_{r_1\ldots r_n}^{k_1\ldots k_n}(y) \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n+l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{r_1+l_1}\ldots\partial x_n^{r_n+l_n}} \varphi(x-y, y) =$$

$$= F^0\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y).$$

Отсюда следует, что если форма $F^0(x,\alpha)$ кратна $f(x,\alpha)$, то в формуле (2,6) суммирование можно распространить на интервал $0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant \leqslant r-s$.

Определяя последовательно $M_{\xi_1\ldots\xi_n}^{k_1\ldots k_n}(x, y)$ по формулам (2,3), тогда непосредственно получают справедливость первой половины леммы.

Для доказательства второй части прежде всего приводят формулу (2,6) к виду:

$$F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y) = \sum_{0 \le k_1+\ldots+k_n \le \max\{0, r-s+1\}} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\ldots\partial y_n^{k_n}} N_{0\ldots0}^{k_1\ldots k_n}(x,y).$$

Такое преобразование возможно путем последовательного перевода диференцирований по $x_1,\ldots, x_n$ в диференцирования $y_1,\ldots, y_n$ на основании соотношений (2,5).

Дальнейшее доказательство проводится так же, как и в первом случае.

Из соотношения (7) легко следует следующий результат:

Лемма 2. *В предположениях первой части леммы* 1, *при*

$$j_1 + \ldots + j_n \leqslant t$$

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}} F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y) -$$

$$-(-1)^{j_1+\ldots+j_n} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial y_1^{j_1}\ldots\partial y_n^{j_n}} F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-y, y) \in K_{n-s+r+j_1+\ldots+j_n-1}.$$

Следующие результаты являются небольшим видоизменением результатов п. 8 [1].

Лемма 3 *Пусть* $g(x, y)$ *есть функциональная матрица класса* K_{n-1}, *непрерывно диференцируемая по* $x_1, \ldots, x_n$ *при* $x \neq y$.

Пусть $\sigma = \max\limits_{k,l} s_{kl}$; *старшие коэфициенты* $A'_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *непрерывно диференцируемы в* D $\sigma+1$ *раз и прочие коэфициенты непрерывно диференцируемы.*

Тогда

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int\limits_V \psi^0(x, z)\, g(z, y)\, dz =$$

$$= \int\limits_V A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi^0(x, z)\, g(z, y)\, dz + g(x, y).$$

Доказательство. Пусть

$$f_j(x, \alpha) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} f(x, -\alpha);$$

тогда, обозначая диагональную матрицу порядка p вида $\begin{pmatrix} \lambda \cdot & 0 \\ 0 & \cdot \lambda \end{pmatrix}$ через λ, заключают, что матрица

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} f_{11}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots f_{1p}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{p1}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots f_{pp}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

содержит только операторы порядка не выше $s-1$. Пусть V_x есть шар с центром x и радиусом r, лежащий вместе с границей Γ_x в V и не содержащий точки y; x' точка этого шара, j координата которой равна x'_j, а остальные совпадают с соответствующими координатами точки x Тогда

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int\limits_V \psi^0(x, z)\, g(z, y) =$$

$$= A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} f_{11}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots f_{1p}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ f_{p1}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots f_{pp}\left(x, -\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \int\limits_V \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, dz =$$

$$= \int\limits_{V-V_x} A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi^0(x, z)\, g(z, y)\, dz + \int\limits_{V_x} A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, dz +$$

$$+ \sum_{i=1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{V_x} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, dz.$$

По лемме 2,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z) + \frac{\partial}{\partial z_j} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z) = M_j(x, z) \in K_{n-1}$$

и, следовательно,

$$f_j\left(x', \frac{\partial}{\partial x'}\right) \varphi(x'-z, z) = -\frac{\partial}{\partial z_j} \int_{x_j}^{x_j'} f_j\left(x', \frac{\partial}{\partial x'}\right) \varphi(x'-z, z)\, dx_j' +$$

$$+ \int_{x_j}^{x_j'} M_j(x', z)\, dx_j' + f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z);$$

$$\int_{V_x} f_j\left(x', \frac{\partial}{\partial x'}\right) \varphi(x'-z, z)\, g(z, y)\, dz = \int_{V_x} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, dz +$$

$$+ \int_{x_j}^{x_j'} dx_j' \left\{ \int_{V_x} f_j\left(x_1', \frac{\partial}{\partial x'}\right) \varphi(x'-z, z) \frac{\partial}{\partial z_j} g(z, y)\, dz - \right.$$

$$\left. - \int_{\Gamma_x} \frac{z_j - x_j}{r} f_j\left(x', \frac{\partial}{\partial x'}\right) \varphi(x'-z, z)\, g(z, y)\, d_z\Gamma + \int_{V_x} M_j(x', z)\, g(z, y)\, dz \right\}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{V_x} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, dz = \int_{V_x} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z) \frac{\partial}{\partial z_j} g(z, y)\, dz -$$

$$- \int_{\Gamma_x} \frac{z_j - x_j}{r} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, d_z\Gamma + \int_{V_x} M_j(x, z)\, g(z, y)\, dz.$$

При $r \to 0$, замечая на основании формулы (5) из (1), п. 5, что

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_x} \frac{z_j - x_j}{r} f_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x-z, z)\, g(z, y)\, d_z\Gamma \to -g(x, y)$$

получают утверждение леммы.

На основании этой леммы, повторяя рассуждения п. 8 [1] получается следующий более общий результат (формулируемый для удобства не для матрицы A', а для матрицы A).

Теорема 1. *Пусть старшие коэфициенты операторов* $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, *составляющих матрицу* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *эллиптического типа, непрерывно диференцируемы в* $D \max\limits_{k,l} s_{kl} + 1$ *раз и коэфициенты при производных порядка* j *непрерывно диференцируемы* $\max\{j, 1\}$ *раз. Тогда* *в каждой конечной области V такой, что $\bar{V} \subset D$, существует фундаментальная матрица $\varphi(x, y)$ в каждой точке $y \in V$.*

Для дальнейшего полезно указать еще следующую лемму.

Лемма 4. *Если, в предположениях теоремы 1, $f(x)$ непрерывно диференцируемый в D функциональный столбец, то уравнение*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x)$$

имеет в области V решение $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$, причем $u_j(x)$ для каждого j непрерывна и ограничена в V вместе со своими производными до порядка $\max\limits_k s_{kl}$. Искомое решение ищется в форме

$$u = \int\limits_V \psi^0(x, y) g(y) dy + h(x),$$

где слагаемое $h(x)$ подбирается так, чтобы получаемое на основании леммы 3 интегральное уравнение для определения $g(x)$ было разрешимо, — прием подробно разобранный в п. 8 [1].

3. Здесь будет дано построение фундаментальной матрицы $\varphi(x, y)$ эллиптической системы уравнений, транспонированная для которой (с перестановкой точек x, y) матрица является фундаментальной для сопряженной системы.

Прежде всего будет проведено построение фундаментальной матрицы, более удобной для исследования.

Пусть, как и ранее, V есть конечная область,

$$L(x, y) = (L_{kl}(x, y))_{k, l=1}^p$$

есть матрица класса K_{n-1}.

Пусть матрица $L^m(x, y)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ определяется индуктивно формулами

$$L^1(x, y) = L(x, y),$$

$$L^{m+1}(x, y) = \int\limits_V L(x, z) L^m(x, y) dz.$$

Как известно, при $m > n$ элементы матрицы $L^m(x, y)$ являются непрерывными (и ограниченными) функциями при $x, y \in V$.

Опираясь на свойства функций Фредгольма для каждого $m > n$, легко получается существование матрицы $\Gamma(x, y)$ того же типа, что и $L^m(x, y)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$\begin{gathered} \int\limits_V \Gamma(x, z) L^m(z, y) dz = \Gamma(x, y) - L^m(x, y) + \Phi(x) P(y), \\ \int\limits_V L^m(x, z) \Gamma(z, y) dz = \Gamma(x, y) - L^m(x, y) + Q(x) \Psi(y). \end{gathered} \tag{3,1}$$

Здесь $P(y)$, $Q(x)$ являются матрицами с элементами вида $L^m_{kl}(\xi, y)$, $L^m_{kl}(x, \eta)$, $L^m_{kl}(x, y)$ обозначает элемент k строки и l столбца матрицы $L^m(x, y)$; ξ, η некоторые точки из V, не зависящие от x, y; $\Phi(x)$, $\Psi(y)$ собственные матрицы:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_V L^m(x, z)\,\Phi(z)\,dz, \\ \Psi(y) &= \int_V \Psi(z)\,L^m(z, y)\,dz. \end{aligned} \tag{3,2}$$

Для полноты далее приводится вывод формул (3,1).

Пусть $a_k\,(k=1, \ldots, p)$ суть точки n-мерного действительного пространства такие, что для всех $x, y \in V$ и $k, l=1, \ldots, p$, $k \neq l$, имеет место условие $x-y \neq a_k-a_l$.

Пусть V_k есть множество точек вида a_k+x, $x \in V$, $\hat{V}=\bigcup\limits_k V_k$.

Каждой матрице вида

$$K(x, y)=(K_{kl}(x, y))^p_{kl=j},\ f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix},\ g(y)=(g_1(y), \ldots, g_p(y))$$

сопоставляется функция, определяемая соответственно условиями:

$$\hat{K}(x, y)=K_{kl}(x-a_k,\ y-a_l)\quad (x \in V_k,\ y \in V_l;\ k, l=1, \ldots, p),$$

$$\hat{f}(x)=f_k(x-a_k)\qquad (x \in V_k;\ k=1, \ldots, p),$$

$$\hat{g}(y)=g_l(y-a_l)\qquad (y \in V_l;\ l=1, \ldots, p).$$

Легко проверяются соотношения: если обозначить

$$K_1 \times K_2(x, y)=\int_V K_1(x, z)\,K_2(z, y)\,dz,$$

$$K \times f(x)=\int_V K(x, z)\,f(z)\,dz,$$

$$g \times K(y)=\int_V g(z)\,K(z, y)\,dz,$$

то

$$(K_1 \hat{\times} K_2)(x, y)=\int_{\hat{V}} \hat{K}(x, z)\,\hat{K}_2(z, y)\,dz,$$

$$(K \hat{\times} f)(x)=\int_{\hat{V}} (x, z)\,\hat{f}(z)\,dz,$$

$$(g \hat{\times} K)(y)=\int_{\hat{V}} \hat{g}(z)\,\hat{K}(z, y)\,dz.$$

Таким образом, например:

$$(\hat{L}^m)(x, y) = (\hat{L})^m (x, y);$$

$(\hat{L})^m (x, y)$ обозначает m-итерацию ядра $\hat{L}(x, y)$.

Если обозначить, как обычно, символом $D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_j \\ y_1 \ldots y_j \end{pmatrix}$ $(j=0, 1, \ldots)$ функцию Фредгольма, соответствующую ядру $\hat{L}^m(x, y)$ и области $\hat{V}$, то в предположении, что $D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_t \\ y_1 \ldots y_t \end{pmatrix}$ $(0 \leqslant t)$ есть первая ненулевая функция Фредгольма и $D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} \neq 0$, как известно, получают:

$$D\begin{pmatrix} x\xi_1 \ldots \xi_t \\ y\eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} = \hat{L}^m(x, y)\, D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{t} \hat{L}^m(x, \eta_j) \times$$

$$\times D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_j \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots y \ldots \eta_t \end{pmatrix} + \int\limits_{\hat{V}} \hat{L}^m(x, z)\, D\begin{pmatrix} z\xi_1 \ldots \xi_t \\ y\eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} dz;$$

$$D\begin{pmatrix} x\xi_1 \ldots \xi_t \\ y\eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} = \hat{L}^m(x, y)\, D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{t} \hat{L}^m(\xi_j, y)\, D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots x \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_j \ldots \eta_t \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_{\hat{V}} D\begin{pmatrix} x\xi_1 \ldots \xi_t \\ z\eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix} \hat{L}^m(z, y)\, dz;$$

$$D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots x \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_j \ldots \eta_t \end{pmatrix} = \int\limits_{\hat{V}} \hat{L}^m(x, z)\, D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots z \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_j \ldots \eta_t \end{pmatrix} dz;$$

$$D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_j \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots y \ldots \eta_t \end{pmatrix} = \int\limits_{\hat{V}} D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_j \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots z \ldots \eta_t \end{pmatrix} \hat{L}^m(z, y)\, dz.$$

При $t=0$ последние две формулы отпадают, а первые очевидным образом упрощаются.

Полагая теперь

$$\hat{\Gamma}(x, y) = \frac{D\begin{pmatrix} x\xi_1 \ldots \xi_t \\ y\eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_t \\ \eta_1 \ldots \eta_t \end{pmatrix}};$$

$$\Gamma_{kl}(x, y) = \hat{\Gamma}(x + a_k,\ y + a_l) \quad (x, y \in v;\ k, l = 1, \ldots, p);$$

$$\Gamma(x, y) = (\Gamma_{kl}(x, y))_{k, l=1}^{p},$$

получают формулы (3,1), (7,2).

В предположениях теоремы 1 фундаментальная матрица $\varphi(x, y)$

в точке y матрицы эллиптического типа $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ подбирается, как и в п. 8 [1], в виде

$$\psi(x, y)=\psi^0(x, y)+\int\limits_V \psi^0(x, z) g(z, y) dz+h(x, y), \tag{3,3}$$

где $g(x, y)$, $h(x, y)$ подлежат определению из условия

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y)=A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^0(x, y)+$$
$$+\int\limits_V A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^0(x, z) g(z, y) dz+$$
$$+g(x, y)+A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)h(x, y)=0.$$

Следуя формулам (3,1) $\left(\text{при } L(x, y)=-A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_0(x, y)\right)$, можно положить

$$g(x, y)=\Gamma(x, y)+\sum_{j=1}^{m-1} L^j(x, y)+\int\limits_V \sum_{j=1}^{m-1} L^j(x, z)\Gamma(z, y) dz, \tag{3,4}$$

$$h(x, y)=R(x)\psi(y),$$

где $R(x)$ достаточно гладкая матрица, удовлетворяющая условию

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)R(x)=Q(x); \tag{3,5}$$

по лемме 4, такая матрица $R(x)$ существует.

Обозначая для краткости $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^0(x, y)=-L(x, y)$, фундаментальную матрицу $\psi(x, y)$ можно на основании формул (3,3), (3,1), (3,2) представить в виде:

$$\begin{aligned}\psi(x, y)=\psi^0(x, y)+R(x)\psi(y)+\int\limits_V \psi^0(x, z)\sum_{j=1}^{3m} L^j(z, y) dz-\\
-\int\limits_V\left[\psi^0(x, z)+\int\limits_V \sum_{j=1}^{m}\psi_0(x, z')L^j(z', z) dz\right]Q(z) dz\cdot\psi(y)-\\
-\int\limits_V\int\limits_V \sum_{j=m+1}^{2m}\psi^0(x, z')L^j(z', z)P(z) dz\, dz' P(y)+\\
+\int\limits_V\int\limits_V\int\limits_V \psi^0(x, z')\sum_{j=m+1}^{2m} L^j(z', z'')\Gamma(z'', z)L^m(z, y) dz\, dz'\, dz''.\end{aligned} \tag{3,6}$$

Теперь будет изучена диференцируемость интегралов, встречающихся в формуле (3,6).

Лемма 1. *Пусть функциональная матрица* $M(x, y)$ *допускает представление:*

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}M(x,y)=\sum_{0\leqslant l_1+\dots+l_n\leqslant \max\{j_1+\dots+j_n-\mu+1,0\}}\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial y_1^{l_1}\dots\partial y_n^{l_n}}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,y)$$
$$(j_1+\dots+j_n\leqslant t),$$

где μ — *некоторое положительное число, причем*

$$M^{l_1\dots l_n}_{j_1+1,j_2\dots j_n}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x_1}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,y)+\frac{\partial}{\partial y_1}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,y)-M^{l_1-1,l_2\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,y);$$

подобные же формулы имеют место для каждого индекса $j_1,\dots j_n$.

Пусть далее

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}M(x,y)\in K^{x}_{n-\mu+j_1+\dots+j_n}\quad(j_1+\dots+j_n\leqslant t),\tag{3,7}$$

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,y)\in K^{x,y}_{n-1+k_1+\dots+k_n}\quad(k_1+\dots+k_n\leqslant t-j_1-\dots-j_n+l_1+\dots+l_n).$$

Тогда, если $N(x, y)$ *есть функциональная матрица со свойствами:*

$$N(x,y)\in K^{y}_{n-\nu},\quad \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}N(x,y)\in K^{x,y}_{n-\nu+j_1+\dots+j_n}\,(K^{x}_{n-\nu+j_1+\dots+j_n})$$
$$(\nu>0,\quad j_1+\dots+j_n\leqslant\max\{0,t-\mu+1\},\tag{3,8}$$

то

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V M(x,z)N(z,y)\,dz\in K^{xy}_{n-\mu-\nu+j_1+\dots+j_n}\,(K^{x}_{n-\mu-\nu+j_1+\dots+j_n})$$
$$(j_1+\dots+j_n\leqslant t).\tag{3,9}$$

При этом имеет место представление

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V M(x,z)N(z,y)\,dz=\int\limits_{V-V_x}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}M(x,z)N(z,y)\,dz+$$
$$+\sum_{0\leqslant l_1+\dots+l_n\leqslant\max\{0,j_1+\dots+j_n-\mu+1\}}(-1)^{l_1+\dots+l_n}\int\limits_{V_x}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,z)\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\dots\partial z_n^{l_n}}N(z,y)\,dz-$$
$$-\sum_{0<l_1+\dots+l_n\leqslant j_1+\dots+j_n-\mu+1}(-1)^{l_1+\dots+l_n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_x}\frac{z_j-x_j}{r}B^{j}_{l_1\dots l_n}(M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(x,z),N(z,y))\,d_z\Gamma^{1)}.\tag{3,10}$$

Здесь V_x *есть шар с центром* x *и радиусом* r, *не содержащий точки* y *и лежащий вместе со своей границей* Γ_x в V. $B^{j}_{l_1\dots l_n}(u,v)$ $(j=1,\dots,n)$ *суть билинейные диференциальные матричные формы суммарного порядка* $l_1+\dots+l_n-1$, *определяемые соотношением*

$$u\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\dots\partial z_n^{l_n}}v-(-1)^{l_1+\dots+l_n}\left(\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\dots\partial z_n^{l_n}}u\right)v=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}B^{j}_{l_1\dots l_n}(u,v)$$

(u, v — *функциональные матрицы*).

---

1) Здесь и в дальнейшем суммирование по индексам, область изменения которых определена противоречиво, заменяется нулем.

Лемма очевидным образом формулируется для случая диференцирования по $y_1, \ldots, y_n$.

Доказательство. Сначала будет доказано (индукцией по $j_1+\ldots+j_n$) представление (3,10). При $j_1+\ldots+j_n=1$ справедливость формулы (3,10) вытекает из доказательства леммы 3, п. 2.

Предполагая, что формула (3,10) справедлива для

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V M(x, z)N(z, y)\,dz,$$

после диференцирования, например, по x (считая область V_x неизменной), опираясь на те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3, п. 2, получают:

$$\frac{\partial^{j_1+1+j_2+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1+1}\partial x_2^{j_2}\ldots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V M(x, z)\,N(z, y)\,dz =$$

$$= \sum_{0\leq l_1+\ldots+l_n\leq \max\{0,\, j_1+\ldots+j_n-\mu+1\}} (-1)^{l_1+\ldots+l_n}\Biggl\{\int\limits_{V_x}\Biggl[\frac{\partial}{\partial x_1}M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, z)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, z)\Biggr]\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\ldots\partial z_n^{l_n}}N(z, y)\,dz+$$

$$+\int\limits_{V_x} M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, z)\,\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n+1}}{\partial z_1^{l_1+1}\partial z_2^{l_2}\partial z_n^{l_n}}N(z, y)\,dz-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_x}\frac{z_1-x_1}{r}\,M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, z)\,\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\ldots\partial z_n^{l_n}}N(z, y)\,d_z\Gamma\Biggr\}-$$

$$\sum_{0\leq l_1+\ldots+l_n\leq j_1+\ldots+j_n-\mu+1}(-1)^{l_1+\ldots+l_n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_x}\frac{z_j-x_j}{r}B^{j}_{l_1\ldots l_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, z),\ N(z, y)\right)d_z\Gamma+$$

$$+\int\limits_{V-V_x}\frac{\partial^{j_1+1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1+1}\partial x_2^{j_2}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(x, z)\,N(z, y)\,dz.$$

Отсюда, на основании рекурентной формулы для $M^{l_1\ldots l_n}_{j_1\ldots j_n}(x, y)$ и соотношения (1,1), легко получается справедливость доказываемой формулы для производной порядка $j_1+\ldots+j_n+1$.

Для доказательства соотношения (3,9), следует иметь в виду следующие оценки.

Если

$$M(x, y)\in K_{n-\mu},\ N(x, y)\in K_{n-\nu}\ (\mu, \nu>0),$$

то

$$\int\limits_V M(x, z)\,N(z, y)\,dz\in K_{n-\mu-\nu}.$$

Если

$$M(x, y) \in K_{n-\mu}^{x}, \ N(x, y) \in K_{n-\nu} (\mu, \nu > 0),$$

то

$$\int\limits_V M(x, z)\, N(z, y)\, dz \in K_{n-\mu-\nu}^{x}.$$

Если

$$M(x, y) \in K_{n-\mu}, \ N(x, y) \in K_{n-\nu}^{y} (\mu, \nu > 0),$$

то

$$\int\limits_V M(x, z)\, N(z, y)\, dz \in K_{n-\mu-\nu}^{y}.$$

Если

$$M(x, y) \in K_{n-\mu}^{x}, \ N(x, y) \in K_{n-\nu}^{y} (\mu, \nu > 0),$$

то

$$\int\limits_V M(x, y)\, N(z, y)\, dz \in K_{n-\mu-\nu}^{xy}.$$

Пусть далее V_1 есть область, лежащая вместе с границей в области V, δ есть расстояние между границами V_1, V; V_y есть шар с границей Γ_y с центром в точке y, с тем же радиусом r, что и V_x; $r = \frac{\theta}{2} \min\{\delta, |x-y|\}$ $(0 < \theta < 1)$. Тогда, если $M(x, y) \in K_{n-\mu}^{x}$, $N(x, y) \in K_{n-\nu}^{y}$, то при $x, y \in V_1$ имеют место оценки:

если

$$0 < \mu < n, \ \nu < n,$$

то

$$\left| \int\limits_{V_x} M(x, z)\, N(z, y)\, dz \right| \leqslant \frac{C_\theta}{|x-y|^{n-\mu-\nu}};$$

если

$$\mu < n, \ 0 < \nu < n,$$

то

$$\left| \int\limits_{V_y} M(x, z)\, N(z, y)\, dz \right| \leqslant \frac{C_\theta}{|x-y|^{n-\mu-\nu}};$$

если

$$\mu < n, \ \nu < n,$$

то

$$\left| \int\limits_{\Gamma_x} M(x, z)\, N(z, y)\, d_z\Gamma \right| \cdot \left| \int\limits_{\Gamma_y} M(x, z)\, N(z, y)\, d_z\Gamma \right| \leqslant \frac{C_\theta}{|x-y|^{n-\mu-\nu+1}};$$

если

$$\mu < n, \ \nu < n, \ \mu + \nu < n,$$

то

$$\left| \int\limits_{V-V_x-V_y} M(x, z)\, N(z, y)\, dz \right| \leqslant \frac{C_\theta}{|x-y|^{n-\mu-\nu}}.$$

Здесь C_θ некоторая постоянная, зависящая от θ. Все эти оценки легко получаются из оценок для $M(x, y)$, $N(x, y)$, совершая в рассматриваемых интегралах замену $x=rx'$, $y=ry'$, $r=rz'$. Теперь будет преобразована формула (3,10). Каждая строка $(l_1, \ldots, l_n)$ разбивается на две строки (с неотрицательными компонентами) $(l_1', \ldots, l_n')$, $(l_1'', \ldots, l_n'')$ так, чтобы $l_1'+\ldots+l_n'=\min\{l_1+\ldots+l_n, \nu-1\}$.

Пусть далее V_2 есть область, к которой применима формула Грина, такая, что $\bar{V}_1 (V_2, \bar{V}_2 \subset V)$, причем расстояние между границами V_2, V меньше $\frac{1}{2}\delta$; Γ_2 — граница V_2. Тогда

$$\int\limits_{V-V_x} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}} M(x, z)\, N(z, y)\, dz = \int\limits_{V-V_2} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}} M(x, z)\, N(z, y)\, dz +$$

$$+ \sum_{0\le l_1+\ldots+l_n\le\max\{0, j_1+\cdots+j_n-\mu+1\}} (-1)^{l_1'+\cdots+l_n'} \int\limits_{V_2-V_1} \frac{\partial^{l_1''+\cdots+l_n''}}{\partial z_1^{l_1''}\ldots\partial z_n^{l_n''}} M_{j_1\cdots j_n}^{l_1\cdots l_n}(x, z) \times$$

$$\times \frac{\partial^{l_1'+\cdots+l_n'}}{\partial z_1^{l_1'}\ldots\partial z_n^{l_n'}} N(z, y)\, dz -$$

$$\sum_{0<l_1+\ldots+l_n<j_1+\cdots+j_n-\mu+1} (-1)^{l_1'+\ldots+l_n'} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_2} \cos\beta_j B^j_{l_1'\cdots l_n'} \left(\frac{\partial^{l_1''+\cdots+l_n''}}{\partial z_1^{l_1''}\ldots\partial z_n^{l_n''}} M_{j_1\cdots j_n}^{l_1\cdots l_n}(x, z), N(z, y) \right) d_z\Gamma +$$

$$+ \sum_{0<l_1+\cdots+l_n<j_1+\cdots+j_n-\mu+1} (-1)^{l_1'+\cdots+l_n'} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_x} \frac{z_j-x_j}{r} \times$$

$$\times B^j_{l_1'\cdots l_n'} \left(\frac{\partial^{l_1''+\cdots+l_n''}}{\partial z_1^{l_1''}\ldots\partial z_n^{l_n''}} M_{j_1\cdots j_n}^{l_1\cdots l_n}(x, z)\, N(z, y) \right) d_z\Gamma.$$

Здесь β_j есть угол внешней нормали к Γ_2 в точке z с j-осью. Используя формулу (1,1) также получают:

$$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}} \int\limits_V M(x, z)\, N(z, y)\, dz =$$

$$= \sum_{0\le l_1+\cdots+l_n\le\max\{0, j_1+\ldots+j_n-\mu+1\}} (-1)^{l_1+\ldots+l_n} \times \int\limits_{V_x} M_{j_1\cdots j_n}^{l_1\cdots l_n}(x, z) \frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\ldots\partial z_n^{l_n}} N(z, y)\, dz -$$

$$- \sum_{0\le l_1+\cdots+l_n\le j_1+\cdots+j_n-\mu+1} (-1)^{l_1+\cdots+l_n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_x} \frac{z_j-x_j}{I} \times$$

$$\times B^j_{l_1''\cdots l_n''} \left(M_{j_1\cdots j_n}^{l_1\cdots l_n}(x, z), \quad \frac{\partial^{l_1'+\cdots+l_n'}}{\partial z_1^{l_1'}\ldots\partial z_n^{l_n'}} N(z, y) \right) d_z\Gamma +$$

$$+\sum_{0\le l_1+\dots+l_n\le \max\{0,\, j_1+\dots+j_n-\mu+1\}} (-1)^{l_1'+\dots+l_n'} \int\limits_{V_2-V_x} \frac{\partial^{l_1''+\dots+l_n''}}{\partial z_1^{l_1''}\dots\partial z_n^{l_n''}} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(x,z)\times$$

$$\times \frac{\partial^{l_1'+\dots+l_n'}}{\partial z_1^{l_1'}\dots\partial z_n^{l_n'}} N(z,y)\,dz-$$

$$-\sum_{0<l_1+\dots+l_n\le j_1+\dots+j_n-\mu+1} (-1)^{l_1'+\dots+l_n'} \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_2} \cos\beta_j\times$$

$$\times B^{j}_{l_1'\dots l_n'}\left(\frac{\partial^{l_1''+\dots+l_n''}}{\partial z_1^{l_1''}\dots\partial z_n^{l_n''}} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(x,z),\ N(z,y)\right) d_z\Gamma+$$

$$+\int\limits_{V-V_2} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(x,z)\,N(z,y)\,dz.$$

На основании проведенных ранее оценок, при $x, y\in V_1$, в первом варианте предположений (3,8), и при $x\in V_1$, во втором варианте, непосредственно получают из этой формулы оценку.

Лемма доказана.

Для того чтобы избежать длинных вычислений, следующая лемма формулируется в частном виде, достаточном для дальнейшего.

Л е м м а 2. *Пусть* $M(q, x, y)$ $(q=1,\dots, r)$ *суть функции, удовлетворяющие условиям:*

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}\cdot\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} M(q,x,y)\in K_{n-1+j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}$$

$$(j_1+\dots+j_n\leqslant t,\ k_1+\dots+k_n\leqslant t)$$

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(q,x,y)=\sum_{0\le l_1+\dots+l_n\le j_1+\dots+j_n} \frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial y_1^{l_1}\dots\partial y_n^{l_n}} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(q,x,y),$$

причем имеют место по каждому индексу соотношения вида:

$$M_{j_1+1,j_2\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(q,x,y)=\frac{\partial}{\partial x_1} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(q,x,y)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_1} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(q,x,y)-M_{j_1\dots j_n}^{l_1-1,l_2\dots l_n}(q,x,y),$$

где

$$\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial y_1^{p_1}\dots\partial y_n^{p_n}} M_{j_1\dots j_n}^{l_1\dots l_n}(q,x,y)\in K_{n-1+p_1+\dots+p_n}$$

$$(p_1+\dots+p_n\leqslant t-j_1-\dots-j_n+l_1+\dots+l_n).$$

Пусть далее

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} M(q,x,y)=$$

$$=\sum_{0\le m_1+\dots+m_n\le k_1+\dots+k_n} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}} N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(q,x,y),$$

причем для $N^{m_1\dots m_n}_{k_1\dots k_n}(q,x,y)$ *имеют место соотношения, подобные указанным соотношениям для* $M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(q, x, y)$.

Тогда

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}}\int\limits_V\dots(r-1)\dots\int\limits_V M(1, x, z')\times$$

$$\times M(2, z', z'')\dots M(r, z^{r-1}, y)\,dz'\dots dz^{r-1}\in K^{xy}_{n-r+j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n};\quad (3{,}11)$$

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V\dots(r-1)\dots\int\limits_V M(1, x, z')\dots M(r, z^{r-1}, y)\,dz'\dots dz^{r-1}\in K^{x}_{n-r+j_1+\dots+j_n}$$

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}}\int\limits_V\dots(r-1)\dots\int\limits_V M(1, x, z')\dots M(r, z^{r-1}, y)\,dz'\dots dz^{r-1}\in K^{y}_{n-r+k_1+\dots+k_n}.$$

Доказательство проводится индукцией по r. При $r=1$ соотношение (3,11) совпадает с одним из предположений леммы.

При $r=2$ доказательство получается двойным применением леммы 1. Действительно, сохраняя обозначения, применявшиеся при доказательстве леммы 1, при $x, y\in V_1$,

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\int\limits_V M(1, x, z)\,M(2, z, y)\,dz=$$

$$=\sum_{0\le l_1+\dots+l_n\le j_1+\dots+j_n}(-1)^{l_1+\dots+l_n}\int\limits_{V_x}M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(1, x, z)\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\dots\partial z_n^{l_n}}M(2, z, y)\,dz-$$

$$-\sum_{0<l_1+\dots+l_n\le j_1+\dots+j_n}(-1)^{l_1+\dots+l_n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_x}\frac{z_j-x_j}{r}\times$$

$$\times B^{j}_{l_1\dots l_n}(M^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}(1, x, z),\quad M(2, z, y))\,d_z\Gamma+$$

$$+\int\limits_{V-V_x-V_y}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}M(1, x, z)\cdot M(2, z, y)\,dz+$$

$$+\int\limits_{V_y}\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}M(1, x, z)\,M(2, z, y)\,dz.$$

Теперь достаточно продиференцировать это соотношение по $y_1,\dots, y_n$, применяя для последнего слагаемого схему леммы 1 (по $y_1,\dots, y_n$).

Пусть теперь $r>2$. Полагая при $i<j$

$$M(i,j,x,y)=\int\limits_V\ldots(j-i)\ldots\int\limits_V M(i,x,z')\ldots M(j,z^{j-i},y)\,dz'\ldots dz^{j-i},$$

получают

$$\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,r+1,x,y)=\sum_{0\leq l_1+\ldots+l_n\leq j_1+\ldots+j_n}(-1)^{l_1+\ldots+l_n}\times$$

$$\times\int\limits_{V_x}M_{j_1\ldots j_n}^{l_1\ldots l_n}(1,x,z)\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\ldots\partial z_n^{l_n}}M(2,r+1,z,y)\,dz-$$

$$-\sum_{0<l_1+\ldots+l_n\leq j_1+\ldots+j_n}(-1)^{l_1+\ldots+l_n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_x}\frac{z_j-x_j}{r}\times$$

$$\times B^j_{l_1\ldots l_n}(M_{j_1\ldots j_n}^{l_1\ldots l_n}(1,x,z),\ M(2,r+1,z,y))\,d_z\Gamma+$$

$$+\int\limits_{V-V_x-V_y}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,x,z)M(2,r+1,z,y)\,dz+$$

$$+\int\limits_{V_y}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,x,z)M(2,r+1,z,y)\,dz.$$

Оценка (3,11) предполагается верной для $M(i,j,x,y)$ при $j-i<r$.

При $k_1+\ldots+k_n<r$ справедливость оценки (3,11) для $M(1,r+1,x,y)$ следует тогда из леммы 1. Пусть теперь $r\leqslant k_1+\ldots+k_n$.

Применяя к последнему соотношению оператор $\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\ldots\partial y_n^{k_n}}$ по схеме леммы 1, предварительно преобразовав последнее слагаемое к виду

$$\int\limits_V\left(\int\limits_{V_y}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,x,z')M(2,r,z',z)\,dz'\right)M(r+1,z,y)\,dz,$$

замечают, что для завершения индукции следует только доказать соответствующую оценку для производной этого последнего члена. Имеют:

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\ldots\partial y_n^{k_n}}\int\limits_{V_y}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,x,z)M(2,r+1,z,y)\,dz=$$

$$=\sum_{0\leq m_1+\ldots+m_n\leq k_1+\ldots+k_n}\int\limits_{V_y'}\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\left(\int\limits_{V_y}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}M(1,x,z')M(2,r,z',z)\,dz'\right)\times$$

$$\times N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\,dz + \sum_{0<m_1+\dots+m_n\le k_1+\dots+k_n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_{y'}} \frac{z_j-y_j}{r} \times$$

$$\times B^j_{m_1\dots m_n} \left(\int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z')\, M(2, r, z', z)\,dz',\right.$$

$$N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\,dz + \int\limits_{V-V_{y'}} \left(\int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z')\, M(2, r, z', z)\,dz' \right) \times$$

$$\times \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} M(r+1, z, y')\,dz; \qquad (3{,}12)$$

как указывалось ранее, радиус r шара V_y равен $\frac{\theta}{2}\min\{|x-y|,\ \delta\}$, $0<\theta<\frac{1}{2}$; V'_y обозначает здесь шар (с границей Γ'_y) с центром y и радиусом $r'=\frac{\theta'}{2}\min\{|x-y|,\ \delta\}$, $0<\theta'<\theta$. Наконец, y' есть точка V'_y.

Как указывалось ранее, достаточно предположить $k_1+\dots+k_n\geqslant r$. Таким же образом достаточно предполагать $j_1+\dots+j_n\geqslant r$. Каждую неотрицательную строчку $(m_1,\dots, m_n)$ теперь разлагают на две строки с неотрицательными компонентами $(m'_1,\dots, m'_n)$, $(m''_1,\dots, m''_n)$ так, что, $m'_1+\dots+m'_n=\min\{m_1+\dots+m_n,\ r-2\}$. Тогда после преобразований, подобных преобразованиям, примененным при доказательстве леммы 1, получают:

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1'^{k_1}\dots\partial y_n'^{k_n}} \int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z)\, M(2, r+1, z, y')\,dz =$$

$$= \sum_{0\le m_1+\dots+m_n\le k_1+\dots+k_n} \int\limits_{V_y'} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial z_1^{m_1}\dots\partial z_n^{m_n}} \left(\int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z')\, M(2, r, z', z)\,dz' \right) \times$$

$$\times N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\,dz + \sum_{0\le m_1+\dots+m_n\le k_1+\dots+k_n} \int\limits_{V_2-V_{y'}} \left(\int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z') \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial^{m_1'+\dots+m_n'}}{\partial z_1^{m_1'}\dots\partial z_n^{m_n'}} M(2, r, z', z)\,dz' \right) \frac{\partial^{m_1''+\dots+m_n''}}{\partial z_1^{m_1''}\dots\partial z_n^{m_n''}} N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\,dz +$$

$$+ \sum_{0<m_1+\dots+m_n\le k_1+\dots+k_n} (-1)^{m_1''+\dots+m_n''} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_{y'}} \frac{z_j-y_j}{r'} \times$$

$$\times B^j_{m_1''\dots m_n''} \left(\int\limits_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z')\, \frac{\partial^{m_1'+\dots+m_n'}}{\partial z_1^{m_1'}\dots\partial z_n^{m_n'}} M(2, r, z'\ z)\,dz',\right.$$

$$N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\Big) d_z\Gamma + \sum_{0<m_1+\dots+m_n\leqslant k_1+\dots+k_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \cos\beta_j \times$$

$$\times B^j_{m_1',\dots m_n'}\Big(\int_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z') M(2, r, z', z)\, dz',$$

$$\frac{\partial^{m_1''+\dots+m_n''}}{\partial z_1^{m_1''}\dots\partial z_n^{m_n''}} N_{k_1\dots k_n}^{m_1\dots m_n}(r+1, z, y')\Big) d_z\Gamma +$$

$$+ \int_{V-V_y} \Big(\int_{V_y} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} M(1, x, z') M(2, r, z', z)\, dz'\Big) \times$$

$$\times \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1'^{k_1}\dots\partial y_n'^{k_n}} M(r+1, z, y')\, dz.$$

Из этого представления индукцией получается требуемая оценка для рассматриваемой величины и, наконец, соотношение (3,11).

Лемма 3. *Пусть каждый коэфициент при производной порядка j в операторах $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ матрицы эллиптического типа непрерывно диференцируем в D $t+j$ раз, а коэфициенты при старших производных* (порядка σ) *непрерывно диференцируемы* $\max\{t+2, t+\sigma\}$ *раз* ($t \geqslant 0$); *этим же свойством, очевидно, обладают и коэфициенты сопряженной матрицы. Тогда для всякой конечной области V, такой, что $\bar V \subset D$, можно указать фундаментальную матрицу (в точке y) $\psi(x, y)$, матрицы $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, обладающую свойством:*

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} \psi(x, y) \in K_{n-\sigma+j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}$$

при $j_1+\dots+j_n \leqslant t, \quad k_1+\dots+k_n \leqslant t.$

Доказательство. Для доказательства леммы используется представление (3,7) фундаментальной матрицы $\psi(x, y)$.

Прежде всего заключают, что введенные предположения относительно коэфициентов операторов $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ приводят к применимости леммы 1, п. 2 к матрицам $L(x, y)$, $\psi(x, y)$ (а также для соответствующих матриц сопряженного случая).

На основании леммы 2 тогда заключают, что

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} L^m(x, y) \in K^{xy}_{n-m+j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n},$$

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}} \int_V \psi(x, z) L^m(z, y)\, dz \in K^{xy}_{n-m-\sigma+j_1+\dots+j_n+k_1+\dots+k_n}$$

$$(j_1+\dots+j_n \leqslant t, \quad k_1+\dots+k_n \leqslant t).$$

цируемой в окрестности точки y функциональной матрицы $u(z)$ имеют место соотношения:

$$u(y) = -\lim_{r\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_y}\frac{z_j-y_j}{r}B^j(\psi'(z, y),\ u(z))\,d_z\Gamma,$$

$$u(y)=\lim_{r\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_y}\frac{z_j-y_j}{r}B^j(u(z),\ \varphi(z, y))\,d_z\Gamma. \qquad (3,15)$$

Эти формулы можно преобразовать. Как легко видеть, главными членами (при малом $|x-y|$) матриц $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ являются соответственно:

$$(-1)^s\begin{pmatrix} f_{11}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\ldots f_{p1}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{1p}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\ldots f_{pp}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\varphi(x-y, y),$$

$$(-1)^{s-\sigma}\begin{pmatrix} f_{11}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\ldots f_{1p}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\\ f_{p1}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\ldots f_{pp}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\varphi(x-y, y),$$

где $\varphi(x-y, y)$ определено в (1), п. 2.

В (1), (п. 5, лемма 5) доказано, что

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\varphi(x-y, z) = (-1)^{s+k_1+\ldots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial(-x_1)^{k_1}\ldots\partial(-x_n)^{k_n}}\varphi(y-x, z).$$

Тогда, как легко видеть, при $k_1+\ldots+k_n\leqslant\sigma-1$

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\{\psi'(x, y)-\varphi(y, x)\},\ \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\{\varphi(x, y)-\psi'(y, x)\}\in K_{n-2}.$$

Таким образом, формулу (3,15) можно представить и в такой форме:

$$u(y)=-\lim_{r\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_y}\frac{z_j-y_j}{r}B^j(\varphi(y, z),\ u(z))\,d_z\Gamma,$$

$$(3,16)$$

$$u(y)=\lim_{r\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_y}\frac{z_j-y_j}{r}B^j(u(z),\ \psi'(y, z))\,d_z\Gamma.$$

Далее, для всякой функциональной матрицы $g(x, y) \in K_{n-1}(V)$, непрерывно диференцируемой по $x_1 \ldots x_n$ при $x \neq y$, на основании леммы 3, п. 2 имеют:

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int\limits_V \psi(x, z)\, g(z, y)\, dz = g(x, y),$$
$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int\limits_V \varphi(x, z)\, g(z, y)\, dz = g(x, y). \tag{3,17}$$

Очевидно, путем расширения области можно, не ограничивая общности, полагать, что к V применима формула Грина.

Пусть Γ есть граница V, β_j, угол внешней нормали к Γ в точке z с j-осью.

Теперь искомая матрица $\omega(x, y)$ будет определяться в форме:

$$\omega(x, y) = \psi'(y, x) - \int\limits_V \varphi(x, z)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi'(y, z)\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \sum_{j=1}^n \cos\beta_j\, B^j(\varphi(x, z),\ \psi'(y, z))\, d_z\Gamma;$$

последнее слагаемое добавлено для большей симметрии. Интегрируя по частям, используя формулы (3,16), получают:

$$\omega(x, y) = \varphi(x, y) + \int\limits_V \left[A'\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi'(x, z)\right]' \psi'(y, z)\, dz -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \sum_{j=1}^n \cos\beta_j\, B^j(\varphi(x, z),\ \psi'(y, z))\, d_z\Gamma.$$

Из формул (3,17) и последних формул следует, что при $x \neq y$

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x, y) = 0, \quad A'\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega'(x, y) = 0.$$

Для доказательства оценок (3, 13) и формул (3, 15) для $\omega(x, y)$ следует теперь изучить производные

$$\int\limits_V \varphi(x, z)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi'(y, z)\, dz.$$

Именно этот интеграл будет представлен в виде суммы интегралов по границе Γ от функций с ограниченными производными и интегралов вида исследованного в лемме 2; в свою очередь для этого достаточно дать представление такого типа для $A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi'(x, y)$.

Такое представление основано на следующих замечаниях. Пусть $S(x, y)$ функциональная матрица со свойствами:

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\ldots\partial y_n^{k_n}} S(x, y)\in K_{n-2} \text{ при } k_1+\ldots+k_n<\sigma,\ A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) S'(x, y)\in K_{n-1}.$$

Тогда

$$-\int\limits_V S(x, z)\, L(z, y)\, dz = \int\limits_V \left[A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) S'(x, z)\right]' \psi_0(z, y)\, dz -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int\limits_\Gamma \cos\beta_j B^{j\prime}(\psi_0'(z, y),\ S'(x, z))\, d_z\Gamma - S(x, y).$$

$$-A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\int\limits_V S(x, z)\, L(z, y)\, dz\right)' = \int\limits_V A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_0'(z, y)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) S'(x, z)\, dz -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int \cos\beta_j B^j\left(A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_0'(z, y),\ S(x, z)\right) d_z\Gamma \qquad (3,18)$$

при $k>1$

$$-\int\limits_V S(x, z)\, L^k(z, y)\, dz =$$

$$= \int\limits_V S(x, z)\left(A'\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\int\limits_V \psi_0(z, z')\, L^{k-1}(z', y)\, dz'\right) dz -$$

$$-\int\limits_V S(x, z)\, L^{k-1}(z, y)\, dz =$$

$$= \int\limits_V\int\limits_V \left[A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) S'(x, z)\right]' \psi_0(z, z')\, L^{k-1}(z', y)\, dz'\, dz -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int\limits_\Gamma \cos\beta_j B^j\left(\left(\int\limits_V \psi_0(z, z')\, L^{k-1}(z', y)\, dz'\right),\ S'(x, z)\right) d_z\Gamma -$$

$$-\int\limits_V S(x, z)\, L^{k-1}(z, y)\, dz =$$

$$= \int\limits_V \left\{-S(x, z) + \int\limits_V \left[A\left(z', \frac{\partial}{\partial z'}\right) S'(x, z')\right]' \psi_0(z', z)\, dz'\right\} L^{k-1}(z, y)\, dz -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int\limits_\Gamma \cos\beta_j B^j\left(\left(\int\limits_V \psi_0(z, z')\, L^{k-1}(z', y)\, dz'\right),\ S'(x, z)\right) d_z\Gamma.$$

$$-\int\limits_V \psi_0(x, z)\, L(z, y)\, dz = \int\limits_V \left[A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_0'(x, z)\right]' \psi_0(z, y)\, dz -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int\limits_\Gamma \cos\beta_j B^{j\prime}(\psi_0'(z, y),\ \psi_0'(x, z))\, d_z\Gamma.$$

При $k>1$,

$$-\int_V \psi_0(x, z) L^k(z, y)\,dz=$$

$$=\int_V \psi_0(x, z)\left(A'\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\int_V \psi_0(z, z') L^{k-1}(z', y)\,dz'\right)dz' -$$

$$-\int_V \psi_0(x, z) L^{k-1}(z, y)\,dz=$$

$$=\int_V\left\{\int_V\left[A\left(z', \frac{\partial}{\partial z'}\right)\psi'_0(x, z')\right]'\psi_0(z', z)\,dz'\right\}L^{k-1}(z, y)\,dz-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \cos\beta_j B^{j'}\left(\int_V \psi_0(z, z') L^{k-1}(z', y_1)\,dz',\ \psi'_0(x, z)\right)d_z\Gamma.$$

Из-за возможности расширения области, можно, не ограничивая общности, предполагать расстояния от x, y до Γ ограниченными снизу; таким образом, благодаря оценкам $\psi_0(x, y)$ и производных $\psi_0(x, y)$, все интегралы по Γ, входящие в эти рекурентные формулы, так же как и их производные, можно считать ограниченными.

Вводя обозначения

$$M(x, y)=-\left[A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi'_0(x, y)\right]',$$

$$M^k(x, y)=\int_V M(x, z) M^{k-1}(z, y)\,dz \qquad (k>1),$$

тогда легко получают, что при $k>1$

$$\int_V \psi'_0(x, z) L^k(z, y)\,dz=$$

$$=\int_V\left(\int_V M^{k-1}(x, z')\psi_0(z', z)\,dz'\right)L(z, y)\,dz+\ldots$$

Пропущенные члены ограничены. На основании (3,18)

$$A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\int_V \psi_0(x, z) L^k(z, y)\,dz\right)'=M^{k+1\prime}(x, y)+M^{k\prime}(x, y)+\ldots$$

Наконец,

$$A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\int_V \psi_0(x, z) L(z, y)\,dz\right)'=-M^{2\prime}(x, y)+M'(x, y)+\ldots;$$

используя формулу (3,6) (для области $V_1\supset V$), теперь получается нужное представление $A\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi'(x, y)$ и, наконец,

$$\int_V \varphi(x, z) A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi'(y, z)\,dz.$$

Отсюда на основании леммы 2 следует утверждение (3,13). Справедливость формул (3,15) для $\omega(x, y)$ следует непосредственно из выражения $\omega(x, y)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *При сделанных в теореме 2 предположениях (полагая $t \geqslant \sigma$), если $g(x)$ непрерывно диференцируемая в D $t-\sigma$ раз матрица, то всякое σ раз непрерывно диференцируемое в D решение уравнения*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = g(x) \tag{3,19}$$

непрерывно диференцируемо в D t раз.

Действительно, по формуле Грина всякое такое решение представимо в виде

$$u(x) = \int\limits_V \omega(x, z)\, g(z)\, dz - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_\Gamma \cos\beta_j B^j(\omega(x, z),\ u(z))\, d_z\Gamma.$$

Отсюда, на основании леммы 1 и теоремы 2 непосредственно следует справедливость теоремы 3. При этом, так как область V можно взять столь малой, чтобы уравнения (3,2) имели только нулевое решение, то доказательство теоремы 3 не зависит от ссылки на эту теорему при доказательстве леммы 3.

Теорема 4. *Если коэфициенты эллиптической матрицы $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются аналитическими в D функциями $x_1, \ldots, x_n$, так же как и $g(x)$, то всякое σ раз непрерывно диференцируемое в D решение уравнения* (3,19) *является аналитической в D функцией.*

Доказательство. Согласно теореме 3 решение $u(x)$ σ раз непрерывно диференцируемое — неограниченно непрерывно диференцируемо в D. Но тогда на основании известной теоремы И. Г. Петровского [4] это решение есть аналитическая функция.

Впрочем, аналитичность решения при сделанных предположениях может быть доказана и непосредственно, как это было сделано Э. Э. Леви для случая двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский, Укр. мат ж., III:1 (1951), 3—38.
2. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. (1948).
3. П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. (1947).
4. И. Г. Петровский, Мат. сб., 5 (47), 1, (1939), 3—70.

Поступило 12.IV 1951 г.
Львов.