К теории диференциальных уравнений случайных процессов

ч. II

И. И. Гихман

Настоящая, вторая, часть работы является непосредственным продолжением первой части, опубликованной в этом же журнале (1950 г., № 4).

Применяемые обозначения те же, что и в первой части. Нумерация формул в обеих частях сплошная, первая цифра указывает номер параграфа.

Всюду предположено, что ограничения § 2 части I выполняются. Кроме того, пространство Φ ниже считается конечномерным.

В § 3 рассматривается зависимость решений диференциальных стохастических уравнений от начальных данных. Строятся первая и вторая вариации решения диференциального стохастического уравнения, соответствующие изменению начальных данных. Следствием из полученных оценок является теорема о двукратной диференцируемости по начальным данным средней

$$f\,[X_t(\tau, \xi)]$$

от произвольной (трижды диференцируемой, ограниченной вместе со своими производными до третьего порядка включительно) функции $f(x)$. В случае непрерывных процессов Маркова (§ 4) этот результат означает непрерывность и ограниченность частных производных 1-го и 2-го порядка решений соответствующей задачи Коши для параболического уравнения.

В § 4 предыдущие результаты применяются к непрерывным процессам Маркова. Задача состоит в выводе уравнения Колмогорова [2] для марковских процессов, существование которых устанавливается в § 4 как следствие из результатов § 2.

Решение этой задачи одновременно является доказательством существования процессов Маркова, соответствующих заданному диференциальному уравнению Колмогорова. Решению последнего вопроса для одномерного случая посвящена статья Феллера [3], а также работы Бернштейна (цитированные в первой части).

§ 3

В дополнение к предположениям § 2 допустим еще, что функции $\alpha(t, x) \in \Gamma^c$ с вероятностью равной 1 трижды диференцируемы по x и их производные удовлетворяют соотношениям:

$$\text{II } 1. \quad \| M\{\delta_i \mathfrak{A}^r(t, x) \mid \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leqslant C\Delta_i, \qquad r=1, 2, 3,$$

$$2. \quad M\{\|\delta_i \mathfrak{A}^r(t, x)\|^{2k} \mid \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leqslant C\Delta_i \quad k=1, 2;$$

где $\mathfrak{A}^r(t, x)$ обозначает тензор, составленный из частных производных порядка r функции $\alpha(t, x)$ по x, и $\|\mathfrak{A}^r(t, x)\|^2$ равен сумме квадратов компонент тензора $\mathfrak{A}^r(t, x)$.

Остальные обозначения имеют тот же смысл, что и при формулировке условий I, § 2.

Из условий II, 2 следует выполнение неравенства

$$M\{\|\delta_i[\mathfrak{A}^r(t_i, x)-\mathfrak{A}^r(t_i, y)]\|^k \mid \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \leqslant C\Delta_i\|x-y\| \qquad (3,1)$$
$$k=2, 4; \quad r=1, 2.$$

Введем обозначения:

$$((\mathfrak{A}^r; u_1, \ldots, u_r)) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_r}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \ldots u_r^{i_r},$$

$$((\mathfrak{A}^r; u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1})) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r, s} \frac{\partial^r \alpha^s}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_r}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \ldots u_r^{i_r} u_{r+1}^s.$$

Для данного разбиения $\{\sigma\}$ сегмента $[0, T]$ вместе с системой рекурентных уравнений

$$x(t)-x(t_n)=\alpha(t, x(t_n))-\alpha(t_n, x(t_n)), \qquad (3,2)$$
$$t_n < t \leqslant t_{n+1},$$
$$x(0)=\xi,$$

рассмотрим еще систему уравнений

$$u(t)-u(t_n)=((\mathfrak{A}^1[t, x(t_n)]-\mathfrak{A}^1[t_n, x(t_n)]; u(t_n))), \qquad (3,3)$$
$$t_n < t \leqslant t_{n+1},$$
$$u(0)=u_0.$$

К объединенной системе уравнений (3,2)—(3,3) непосредственно применить теорему существования § 2 нельзя. Однако, принимая во внимание линейный характер уравнений (3,3) относительно $u(t)$, не трудно распространить теорему 2 § 2 на рассматриваемую систему уравнений (3,2)—(3,3).

С этой целью, во-первых, легко устанавливаем равномерную ограниченность (относительно $\{\sigma\}$) вторых и четвертых моментов случайных функций $u(t)$.

Уравнения (3,3) при использовании неравенств II, 1, 2, дают

$$M\|u(t)-u(t_i)\|^2 \leqslant C\Delta_i M\|u(t_i)\|^2,$$

или

$$M\|u(t_{i+1})\|^2 \leqslant (1+C\Delta_i) M\|u(t_i)\|^2$$

и также

$$M\|u(t_{i+1})\|^4 \leqslant (1+C\Delta_i) M\|u(t_i)\|^4,$$

откуда и следует равномерная ограниченность (относительно $\{\sigma\}$).

Лемма 3,1. *При* $|\sigma|\to 0$ *последовательность функций* $u(t)$ *сходится в* H *к некоторой предельной функции* $U(t)$.

Доказательство. Обозначим через $\overline{u}(t)$ функцию, построенную по уравнениям (3,2)—(3,3) для $\{\sigma'\}$, являющегося подразбиением $\{\sigma\}$.

Тогда, применяя обозначения § 2,

$$\overline{u}_{k,j+1}-u_{k,j+1}=\overline{u}_{k,j}-u_{k,j}+(\delta_{k,j}[\mathfrak{A}^1(t_{k,j}, y_{k,j})-\mathfrak{A}^1(t_{k,j}, x_k)];\ \overline{u}_{k,j})+ \\ +(\delta_{k,j}\mathfrak{A}^1(t_{k,j}, x_k);\ \overline{u}_{k,j}-u_{k,j})$$

и

$$M\|\overline{u}_{k,j+1}-u_{k,j+1}\|^2 \leqslant (1+C\Delta_{k,j+1}) M\|\overline{u}_{k,j}-u_{k,j}\|^2 + \\ + C\Delta_{k,j}[M\|y_{k,j}-x_k\|^4\cdot M\|\overline{u}_{k,j}\|^4]^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание равномерную ограниченность величин $M\|\overline{u}_{k,j}\|^4$ и лемму 2,5, получим

$$M\|\overline{u}_{k,j+1}-u_{k,j+1}\|^2 \leqslant C(\|u_0\|^2,\ \|\xi\|^2)\, t_{k,j+1}\sqrt{|\sigma|}\,, \tag{3,4}$$

откуда, как и при доказательстве теоремы 2, § 2 следует, что функции $u(t)$ при $|\sigma|\to 0$ сходятся в H к единственной предельной функции $U(t)$, причем

$$M\|U(t)-u(t)\|^2 \leqslant C(\|u_0\|^2,\ \|\xi\|^2)\, t\sqrt{|\sigma|}.$$

Замечание. Используя то обстоятельство, что $M\|u(t)\|^8$ также равномерно ограничены относительно $\{\sigma\}$, из неравенства

$$M\|\overline{u}_{k,j+1}-u_{k,j+1}\|^4 \leqslant (1+C\Delta_{k,j}) M\|\overline{u}_{k,i}-u_{k,j}\|^4 + \\ + C\Delta_{k,j}[M(\|y_{k,j}-x_k\|^4+\|y_{k,j}-x_k\|^8)]^{\frac{1}{2}},$$

используя лемму 2,8, получим

$$M\|\overline{u}_{k,j}-u_{k,}\ \|^4 \leqslant Ct_{k,j}\sqrt{|\sigma|}.$$

Отсюда следует, что

$$M\|U(t)-u(t)\|^4 \leqslant Ct\sqrt{|\sigma|}. \tag{3,5}$$

Через

$$U(t, \xi), \quad u_j(t, \xi)$$

обозначим функции, построенные по уравнениям (3,2)—(3,3) при начальных значениях

$$u_j^k(0, \xi)=0 \quad k \neq j, \quad u_j^j(0, \xi) = 1,$$

и

$$x(0) = \xi.$$

Пусть $y(t)$ теперь означает функцию, построенную по уравнениям (3,2) для начального значения η,

$$y(0)=\eta$$

и $Y(t)$ соответствующая предельная функция.

Лемма 3,2.

$$M\left\| Y(t)-X(t)-\sum_s (\eta^s-\xi^s)U_s(t, \xi)\right\|^{2k} \leqslant Ct\|\eta-\xi\|^{4k}, \quad k=1, 2. \tag{3,6}$$

Доказательство.

Пусть $\{\sigma\}$ некоторое разбиение $[0, T]$ и $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, соответствующие этому разбиению функции, построенные по уравнениям (3,2)—(3,3).

Обозначим

$$\gamma_1(i)=y(t_i)-x(t_i)-\sum_s (\eta^s-\xi^s)u_s(t_i, \xi).$$

Имеем

$$M\|\gamma_1(i+1)\|^2=M\|\gamma_1(i)+((\delta_i \mathfrak{A}^1(t_i, x_i); \gamma_1(i)))+R_1(i)\|^2,$$

где

$$R_1(i)=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\theta)^2((\delta_i \mathfrak{A}^2(t_i, x_i+\theta(y_i-x_i)); y_i-x_i; y_i-x_i))\,d\theta,$$

и $((\mathfrak{A}^2; x; y))$ обозначает билинейную вектор-функцию x, y, составленную при помощи тензора $\mathfrak{A}^2$.

Для рассматриваемых величин имеем оценки

$$M\|R_1(i)\|^2 \leqslant C\Delta_i M\|y_i-x_i\|^4,$$

$$M(\gamma_1(i); R_1(i)) \leqslant C\Delta_i M(\|\gamma_1(i)\|^2+\|y_i-x_i\|^4),$$

$$M((\delta_i \mathfrak{A}^1(t_i, x_i); \gamma_1(i); \gamma_1(i))) \leqslant C\Delta_i M\|\gamma_1(i)\|^2,$$

$$M((\delta_i \mathfrak{A}^1(t_i, x_i); \gamma_1(i); R_1(i))) \leqslant C\Delta_i M(\|\gamma_1(i)\|^2+\|y_i-x_i\|^4),$$

$$M\|((\delta_i \mathfrak{A}^1(t_i, x_i); \gamma_1(i)))\|^2 \leqslant C\Delta_i M\|\gamma_1(i)\|^2.$$

Таким образом,

$$M\|\gamma_1(i+1)\|^2 \leqslant (1+C\Delta_i)M\|\gamma_1(i)\|^2 + C\Delta_i M\|y_i-x_i\|^4.$$

В силу леммы 2,7

$$M\|\gamma_1(i+1)\|^2 \leqslant (1+C\Delta_i)\, M\|\gamma_1(i)\|^2 + C\Delta_i\|\eta-\xi\|^4$$

и

$$M\|\gamma_1(i)\|^2 \leqslant Ct_i\|\eta-\xi\|^4. \tag{3,7}$$

Аналогично получаем:

$$M\|\gamma_1(i+1)\|^4 \leqslant (1+C\Delta_i)\, M\|\gamma_1(i)\|^4 + CM\|\gamma_1(i)\|^2\|R_1\|^2 + CM\|R_1(i)\|^4,$$

$$M\|R_1(i)\|^4 \leqslant C\Delta_i M\|y_i-x_i\|^8,$$

$$M\|\gamma_1(i)\|^2\|R_1(i)\|^2 \leqslant C\Delta_i M(\|\gamma_1(i)\|^4+\|y_i-x_i\|^8).$$

Таким образом,

$$M\|\gamma_1(i+1)\|^4 \leqslant C\Delta_i M\|y_i-x_i\|^8 + (1+C\Delta_i)\, M\|\gamma_1(i)\|^4$$

и, опять в силу леммы 2,7,

$$M\|\gamma_1(i)\|^4 \leqslant Ct_i\|\eta-\xi\|^8. \tag{3,8}$$

Переход от неравенств (3,7) и (3,8) к неравенству (3,6) совершается непосредственно, используя только лемму 3,1.

Пойдем теперь далее и к системе $2n$-уравнений (3,2) — (3,3) добавим еще n^2-уравнений:

$$u_{k,l}(t)-u_{k,l}(t_n) = ((\mathfrak{A}^1(t, x_n)-\mathfrak{A}^1(t_n, x_n);\ u_{k,l}(t)))+ \\ + ((\mathfrak{A}^2(t, x_n)-\mathfrak{A}^2(t_n, x_n);\ u_k(t_n);\ u_l(t_n))), \tag{3,9}$$

где $t_n < t \leqslant t_{n+1}$ и $u_{k,l}(0)=0$.

Аналогично доказательству леммы 3,1 и используя ее результаты, устанавливается следующая лемма:

Лемма 3,3. *Независимо от выбора последовательности $\{\sigma\}$, при $|\sigma|\to 0$, последовательность соответствующих функций $u_{k,r}(t)$, построенных по уравнениям* (3,9), *сходится в H к некоторой функции $U_{k,r}(t)$.*

Доказательство. Легко видеть, что моменты 2-го и 4-го порядков от функций $u_{k,r}(t)$ равномерно ограничены относительно $\{\sigma\}$.

Действительно,

$$\|u_{k,r}(t_{n+1})\|^2 \leqslant (1+C\|\delta_n\mathfrak{A}^1(t_n, x_n)\|^2)\|u_{k,r}(t_n)\|^2 + C\|u_k(t_n)\|^4\|\delta_n\mathfrak{A}^2(t_n, x_n)\|^2 + \\ +2((\delta_n\mathfrak{A}^1(t_n, x_n);\ u_{k,r}(t_n);\ u_{k,r}(t_n))) + 2((\delta_n\mathfrak{A}^2(t_n, x_n);\ u_k(t_n);\ u_r(t_n);\ u_{k,r}(t_n))).$$

Таким образом,

$$M\|u_{k,r}(t_{n+1})\|^2 \leqslant (1+C\Delta_n)\, M\|u_{k,r}(t_n)\|^2 + C\Delta_n M[\|u_k(t_n)\|^2 + u_r(t_n)\|^2],$$

откуда следует, принимая во внимание лемму 2,1, равномерная ограниченность величин $M\|u_{k,r}(t_n)\|^2$.

Также, приняв во внимание равномерную ограниченность величин $M\|u_k(t_n)\|^8$ и использовав соотношения II, 1, 2, получим равномерную ограниченность $M\|u_{k,r}(t_n)\|^4$ относительно всевозможных разбиений $\{\sigma\}$ сегмента $[0, T]$.

Рассмотрим теперь две функции $\bar{u}_{k,r}(t)$ и $u_{k,r}(t)$, построенные по уравнениям (3,9) для разбиений $\{\sigma'\}$ и $\{\sigma\}$ соответственно.

Аналогично лемме 3,1 получим:

$$M\|\bar{u}_{k,r}(t_{i,j+1})-u_{k,r}(t_{i,j+1})\|^2\leqslant(1+C\Delta_{i,j})M\|\bar{u}_{k,r}(t_{i,j})-u_{k,r}(t_{i,j})\|^2+$$

$$+CM\|y_{i,j}-x_i\|^2\Delta_{i,j}+C[M\|u_{k,r}(t_{i,j})\|^2M\|y_{i,j}-x_i\|^2]^{\frac{1}{2}}\Delta_{i,j}+$$

$$+M\|R\|^2+CM(R;\bar{u}_{k,r}(t_{i,j})-u_{k,r}(t_{i,j})),$$

где

$$R=((\delta_{ij}\,\mathfrak{A}^2(t_{i,j},y_{i,j});\ \bar{u}_k(t_{i,j});\ \bar{u}_r(t_{i,j})))-((\delta_{ij}\,\mathfrak{A}^2(t_{i,j}x_i);\ u_k(t_{i,j});\ u_r(t_{i,j}))).$$

Принимая во внимание соотношения II, получим

$$M\|R\|^2\leqq C[M\|y_{i,j}-x_i\|^4]^{\frac{1}{2}}\Delta_{i,}+$$

$$+C\{[M\|\bar{u}_r(t_{i,j})-u_r(t_{i,j})\|^4]^{\frac{1}{2}}+M\|\bar{u}_r(t_{i,j})-u_r(t_{i,j})\|^4\}\Delta_{i,},$$

что, в силу лемм 2,8 и 3,1 (замечания), дает

$$M\|R\|^2\leqslant C\Delta_{i,j}\sqrt[4]{|\sigma|}.$$

Далее имеем

$$|M(R;\bar{u}_{k,r}(t_{i,j})-u_{k,r}(t_{i,j}))|\leqslant C\Delta_{i,j}M\|\bar{u}_{k,r}(t_{i,j})-u_{k,r}(t_{i,j})\|^2.$$

Таким образом,

$$M\|\bar{u}_{k,r}(t)-u_{k,r}(t)\|^2\leqslant Ct|\sigma|^{\frac{1}{4}},$$

откуда непосредственно следует доказываемое.

Если $U_{k,r}(t)$ предельная в H для $u_{k,r}(t)$ функция, то

$$M\|U_{k,r}(t)-u_{k,r}(t)\|^2\leqslant Ct|\sigma|^{\frac{1}{4}}. \tag{3,10}$$

Лемма 3,4. *Если $X(t)$, $Y(t)$ две предельные функции для системы уравнений* (3,2) *и*

$$X(0)=\xi,\quad Y(0)=\eta,$$

то

$$M\left\|Y(t)-X(t)-\sum_r(\eta^r-\xi^r)U_r(t)-\frac{1}{2}\sum_{r,s}(\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s)U_{rs}(t)\right\|^2\leqslant Ct\|\eta-\xi\|^6. \tag{3,11}$$

Доказательство. Так как величины $Y(t)$, $X(t)$, $U_r(t)$ и $U_{rs}(t)$ в H равномерно относительно $\{\sigma\}$ апроксимируются соответствующими величинами $y(t)$, $x(t)$, $u_r(t)$, $u_{rs}(t)$, построенными для некоторого $\{\sigma\}$, то достаточно доказать неравенство (3,11) для этих последних, если только постоянная C не будет зависеть от $\{\sigma\}$.

Введем обозначение

$$\gamma_2(t)=y(t_i)-x(t_i)-\sum_r(\eta^r-\xi^r)u_r(t_i)-\frac{1}{2}\sum_{r,s}(\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s)u_{rs}(t_i).$$

Тогда

$$M\|\gamma_2(i+1)\|^2 \leqslant (1+C\Delta_i)M\|\gamma_2(i)\|^2 + C\Delta_i(M\|\gamma_1(i)\|^4 + \|\eta-\xi\|^4) + $$
$$+ M(\gamma_2(i); R_3) + CM\|R_3\|^2.$$

Здесь R_3 обозначает остаток в формуле Тейлора при замене $\delta_i\alpha(t_i, x_i)$ суммой линейной и квадратической формы от $y_i - x_i$.

В силу соотношений II, 1, 2 ($k=3$)

$$M\|R_3\|^2 \leqslant C\Delta_i M\|y_i - x_i\|^6,$$
$$|M(\gamma_2(i); R_3(i))| \leqslant C\Delta_i(M\|\gamma_2(i)\|^2 + M\|y_i - x_i\|^6).$$

Таким образом,

$$M\|\gamma_2(i+1)\|^2 \leqslant (1+C\Delta_i)M\|\gamma_2(i)\|^2 + C\Delta_i\|\eta-\xi\|^6$$

и

$$M\|\gamma_2(i)\|^2 \leqslant C t_i \|\eta-\xi\|^6.$$

Таким образом, неравенство (3,11) доказано для величин $y(t)$, $x(t)$, $u_r(t)$, $u_{rs}(t)$, откуда и следует, что оно справедливо и в написанной форме.

Пусть теперь $f(\xi)$ некоторая произвольная непрерывная и трижды диференцируемая в Φ функция, ограниченная вместе со своими частными производными до 3-го порядка включительно.

На Γ^c рассмотрим P-измеримую функцию

$$f[X(t)] = f[S(\tau, \xi \mid t, \alpha(\theta, y))].$$

Обозначим

$$F(\tau, \xi) = Mf[S(\tau, \xi \mid t, \alpha(\theta, y))]. \tag{3,12}$$

Теорема 5. *Функция $F(\tau, \xi)$ дважды диференцируема по ξ и при $\tau \to t$ стремится к $f(\xi)$ равномерно в каждой области $\|\xi\| \leqslant R$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим приращение функции $F(\tau, \xi)$ при переходе от точки ξ к точке η.

Имеем

$$\Delta F(\tau, \xi) = F(\tau, \eta) - F(\tau, \xi) = M\{f[Y(t)] - f[X(t)]\} =$$
$$= \sum_r (\eta^r - \xi^r) M(\Phi^1[X(t)]; U_r) + \frac{1}{2}\sum_{r,s}(\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s)\{M(\Phi^1; U_{rs}) +$$
$$+ M((\Phi^2; U_r; U_s))\} + M(\Phi^1; \gamma_2(t)) + M((\Phi^2; \gamma_1(t); \gamma_1(t))) +$$
$$+ \frac{1}{6}M((\tilde{\Phi}^3; Y(t)-X(t); Y(t)-X(t); Y(t)-X(t))),$$

где Φ^1, Φ^2, Φ^3 — тензоры, составленные из частных производных, соответствующего порядка 1, 2, 3, функции $f(\xi)$, в которых вместо ξ подставлено $X(t)$ и

$$\tilde{\Phi}^3 = \Phi^3[X(t) + \theta(Y(t) - X(t))].$$

В силу леммы (3,4)

$$|M(\gamma_2(t);\ \Phi^1)| \leqslant CM\|\gamma_2(t)\| \leqslant C\|\eta-\xi\|^3$$

и в силу леммы (3,2)

$$|M((\Phi^2;\gamma_1(t);\gamma_2(t)))\leqslant CM\|\gamma_1(t)\|^2 \leqslant C\|\eta-\xi\|^3$$

и, наконец, из леммы (2,9) следует

$$\left|\frac{1}{6}((\bar{\Phi}^3;\ Y(t)-X(t);\ Y(t)-X(t);\ Y(t)-X(t)))\right| \leqslant CM\|X(t)-Y(t)\|^3 \leqslant C\|\eta-\xi\|^3.$$

Таким образом,

$$\Delta F_t(\tau,\ \xi)=\sum_r(\eta^r-\xi^r)M(\Phi^1;\ U_r)+\frac{1}{2}\sum_{r,\,s}(\eta^r-\xi^r)M\{(\Phi^1;\ U_{rs})+$$
$$+((\Phi^2;\ U_r;\ U_s))\}+C\|\eta-\xi\|^3.$$

Отсюда следует, что функция $F_t(\tau,\xi)$ дважды диференцируема по ξ и что ее частные производные даются формулами

$$\frac{\partial F(\tau,\xi)}{\partial\xi^r}=M(\Phi^1;\ U_r), \tag{3,13}$$

$$\frac{\partial^2 F(\tau,\xi)}{\partial\xi^r\,\partial\xi^s}=M\{(\Phi^1;\ U_{rs})+((\Phi^2;\ U_r;\ U_s))\}. \tag{3,14}$$

2. Имеем

$$|F(\tau,\ \xi)-f(\xi)|=\left|M\sum_r(X_t^r(\tau,\ \xi)-\xi^r)\frac{\partial f\,[\xi+\theta(X_t(\tau,\ \xi)-\xi)]}{\partial\xi^r}\right|\leqslant$$
$$\leqslant M\{C\|X_t(\tau,\ \xi)-\xi\|^2\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C(\|\xi\|)\sqrt{t-\tau},$$

что и доказывает вторую часть утверждения теоремы.

Введенная в п. 2 (лемма 2,4) функция

$$v_1(\tau,\ \xi\,|\,t)=\xi+\alpha(t,\ \xi)-\alpha(\tau,\ \xi)$$

апроксимирует функцию $X_t(\tau,\xi)$ для малых $t-\tau$ с точностью до величин порядка $t-\tau$ (в смысле близости функций в H).

В дальнейшем будет использована еще функция $v_2(\tau,\xi\,|\,t)$, апроксимирующая $X_t(\tau,\xi)$ с точностью до величин высшего порядка малости по сравнению с $t-\tau$.

Заметим прежде всего, что если имеет место соотношение

$$M\|\alpha(t+\Delta,\ \xi)-\alpha(t,\ \xi)\|^4=C(\|\xi\|^4)\Delta^2, \tag{3,15}$$

то неравенство (1) леммы 2,7 можно уточнить.

Для дальнейшего достаточно рассмотреть величину

$$m_4(0,\ n)=M\|x_n-\xi\|^4.$$

Аналогично доказательству леммы 2,7 получим:

$$m_4(0,\ n+1)=M[\|x_n-\xi\|^2+2(x_n-\xi;\ \Delta x_n)+\|\Delta x_n\|^2]^2,$$

где

$$\Delta x_n=x_{n+1}-x_n=\alpha(t_{n+1},\ x_n)-\alpha(t_n,\ x_n),$$

откуда следует

$$m_4(0, n+1) \leqslant m_4(0, n) + CM\{\|\Delta x_n\|^4 + \|x_n - \xi\|^2 \|\Delta x_n\|^2 + \|x_n - \xi\|^2 (\Delta x_n, x_n - \xi)\}.$$

Используя соотношения

$$M\|\Delta x_n\|^4 \leqslant C\Delta_n M\|x_n - \xi\|^4 + C(\|\xi\|^4)\Delta_n^2,$$

$$M\|x_n - \xi\|^2 \|\Delta x_n\|^2 \leqslant C\Delta_n M\|x_n - \xi\|^4 + C(\|\xi\|^2)\Delta_n M\|x_n - \xi\|^2,$$

$$M\|x_n - \xi\|^2 (\Delta x_n; x_n - \xi) \leqslant C\Delta_n M\|x_n - \xi\|^4 + C(\|\xi\|^2)\Delta_n M\|x_n - \xi\|^2,$$

получим

$$m_4(0, n+1) \leqslant (1 + C\Delta_n) m_4(0, n) + C(\|\xi\|^2)\Delta_n m_2(0, n) + C(\|\xi\|^4)\Delta_n^2. \quad (3{,}16)$$

Так как

$$\Delta_n^2 < t_n \Delta_n$$

и, в силу леммы 2,2,

$$m_2(0, n) \leqslant t_n C(\|\xi\|^2),$$

то из неравенства 3,16 следует:

$$m_4(0, n+1) \leqslant (1 + C\Delta_n) m_4(0, n) + C(\|\xi\|^4) t_n \Delta_n,$$

откуда вытекает

$$m_4(0, n) \leqslant C(\|\xi\|^4) t_n^2. \quad (3{,}17)$$

Полученная оценка и представляет собою искомое уточнение неравенства (1) леммы 2,7.

Положим

$$v_2(\tau, \xi \mid t) = v_2^\sigma(\tau, \xi \mid t) = v_1(\tau, \xi \mid t) + ((\mathfrak{A}^1(t, \xi) - \mathfrak{A}^1(t_n, \xi);\ \alpha(t_n, \xi) - \alpha(\tau, \xi))) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} ((\mathfrak{A}^1(t_{k+1}, \xi) - \mathfrak{A}^1(t_k, \xi);\ \alpha(t_k, \xi) - \alpha(\tau, \xi))) \quad (3{,}18)$$

при

$$t_n < t \leqslant t_{n+1},$$

где

$$\sigma = \{\tau, t_1, \ldots, t_N = T\}$$

некоторое разбиение сегмента $[\tau, T]$ и $\mathfrak{A}^1(\tau, \xi)$ имеет тот же смысл, что и на стр. 319.

Из (3,18) следует

$$v_2(\tau, \xi \mid t) = v_2(\tau, \xi \mid t_n) + \alpha(t, \xi) - \alpha(t_n, \xi) +$$
$$+ ((\mathfrak{A}^1(t, \xi) - \mathfrak{A}^1(t_n, \xi);\ \alpha(t_n, \xi) - \alpha(\tau, \xi))).$$

Лемма 3,5. *Для данного* σ

$$M\|X(\tau, \xi \mid t_n) - v_2(\tau, \xi \mid t_n)\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)(t_n - \tau)^3, \quad (3{,}19)$$

где $C(\|\xi\|^2)$ *от* σ *не зависит.*

Доказательство. Положим

$$X(\tau, \xi \mid t_i) = x_i, \quad v_2(\tau, \xi \mid t_i) = v_2(i).$$

Тогда

$$x_{i+1}-v_2(i+1)=x_i-v_2(i)+((\delta_i\mathfrak{A}^1(t_i,\xi);\ v_1(i)))+((\tilde{R}_2;\ x_i-\xi;\ x_i-\xi)),$$

где

$$\tilde{R}_2=\int\limits_0^1(1-\theta)((\delta_i\mathfrak{A}^2(t_i,\xi+\theta(x_i-\xi_i));\ x_i-\xi;\ x_i-\xi))\,d\theta.$$

Следовательно,

$$M\|x_{i+1}-v_2(i+1)\|^2\leqslant(1+C\Delta_i)M\|x_i-v_2(i)\|^2+C\Delta_i[M\|x_i-v_1(i)\|^2+$$
$$+M\|x_i-\xi\|^4+\{M\|x_i-\xi\|^4M\|x_i-v_1(i)\|^2\}^{\frac{1}{2}}]\leqslant$$
$$\leqslant(1+C\Delta_i)M\|x_i-v_2(i)\|^2+Ct_i^2\Delta_i.$$

Применяя теперь лемму 2,1, получим доказываемое.

§ 4

Допустим теперь, что случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ есть процесс W. Из теоремы 1 следует, что построенные в § 2 функции

$$X(t)=S[\tau,\xi\,|\,t,\ \alpha(\theta,y)]$$

определяют в Φ процесс Маркова.

Проанализируем условия I и II, которым должен удовлетворять случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ класса W, чтобы к нему можно было применить предыдущие результаты.

Эти условия сводятся в рассматриваемом случае к следующим:

$$\|M[\alpha(t+\Delta,x)-\alpha(t,x)]\|\leqslant C\Delta(1+\|x\|), \tag{4,1,1}$$

$$M\|\alpha(t+\Delta,x)-\alpha(t,x)\|^{2k}\leqslant C\Delta^k(1+\|x\|^{2k})\quad k=1,2,4, \tag{4,1,2}$$

$$\|M[\alpha(t+\Delta,x)-\alpha(t,x)-\alpha(t+\Delta,y)+\alpha(t,y)]\|\leqslant C\Delta\|x-y\|, \tag{4,1,3}$$

$$M\|\alpha(t+\Delta,x)-\alpha(t,x)-\alpha(t+\Delta,y)+\alpha(t,y)\|^{2k}\leqslant C\Delta\|x-y\|^{2k}\quad k=1,2,4, \tag{4,1,4}$$

$$M\|\mathfrak{A}^r(t+\Delta,x)-\mathfrak{A}^r(t,x)\|^k\leqslant C\Delta\quad r=1,2,3,\quad k=2,4. \tag{4,1,5}$$

Легко заметить, что не все приведенные условия являются независимыми.

Положим

$$M[\alpha(t+\Delta,x)-\alpha(t,x)]=A(t,\Delta,x)\,\Delta, \tag{4,2}$$

и допустим, что $A(t,\Delta,x)$ — непрерывная функция своих аргументов.

Введем обозначение:

$$A(t,0,x)=a(t,x),$$

тогда

$$A(t,\Delta,x)\Delta=\int\limits_t^{t+\Delta}a(\tau,x)\,d\tau. \tag{4,3}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$\alpha(t+\Delta, x)-\alpha(t, x)=\int_t^{t+\Delta} a(\tau, x)\, d\tau+\psi(t+\Delta, x)-\psi(t, x), \tag{4,4}$$

где $\psi(t, x)$ есть случайная функция некоторого нового процесса $\{\Gamma^c, P'\}$ класса W, причем

$$M\{\psi(t+\Delta, x)-\psi(t, x)\}=0. \tag{4,5}$$

Предположим, что функция $a(t, x)$ трижды диференцируема по x, причем все ее частные производные по x^i, до третьего порядка включительно, равномерно ограничены:

$$\left\|\frac{\partial a}{\partial x^i}\right\| \leqslant C, \quad \left\|\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^j}\right\| \leqslant C, \quad \left\|\frac{\partial^3 a}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\right\| \leqslant C \quad i, j, k=1,\ldots, n.$$

Тогда очевидно, что условия (4,6,1) и (4,6,3) выполняются, а для выполнения остальных условий (4,6) достаточно, чтобы они выполнялись для случайных функций $\psi(t, x)$ процесса $\{\Gamma^{c'}, P'\}$.

Положим теперь

$$M[\psi^r(t+\Delta, x)-\psi^r(t, x)][\psi^s(t+\Delta, y)-\psi^s(t, y)]=B^{rs}(t, \Delta, x, y)\Delta, \tag{4,6}$$

и допустим, что $B^{rs}(t, \Delta, x, y)$ непрерывные функции аргументов t, Δ, x, y.

Тогда

$$B^{rs}(t, \Delta, x, y)\Delta=\int_t^{t+\Delta} b^{rs}(\tau, x, y)\, d\tau. \tag{4,7}$$

Предположим теперь, что выполняется еще соотношение

$$M\|\psi(t+\tau, x)-\psi(t, x)\|^{2+\delta} \leqslant K(x)\, \varphi(\tau)\, \tau, \tag{4,8}$$

где $\varphi(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

Тогда (это легко следует из теоремы Ляпунова для случайных векторов), характеристическая функция закона распределения случайной величины

$$\eta=\lambda[\psi(t+\tau, x)-\psi(t, x]+\mu[\psi(t+\tau, y)-\psi(t, y)]$$

имеет вид

$$g(\nu)=\exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{kr} \nu_k \nu_r [\lambda^2 B^{kr}(t, \tau, x, x)+2\lambda\mu B^{kr}(t, \tau, x, y)+\right. \tag{4,9}$$

$$\left.+\mu^2 B^{kr}(t, \tau, y, y)]\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{kr} \nu_k \nu_r R^{kr}(\lambda, \mu)\right\}.$$

Если

$$C^{kr}=M\eta^k\eta^r, \quad C^{k_1\ldots k_{2m}}=M\eta^{k_1}\eta^{k_2}\ldots\eta^{k_{2m}},$$

то формула (4,9) дает

$$\frac{1}{2!}\sum_{kr} C^{kr}\nu_k\nu_r = \frac{1}{2}\sum_{kr} R^{kr}(\lambda, \mu)\nu_k\nu_r,$$

$$\frac{1}{(2m)!}\sum_{k_1\ldots k_{2m}} C^{k_1\ldots k_{2m}}\nu_{k_1}\ldots\nu_{2m} = \frac{1}{m!}\left\{\frac{1}{2}\sum_{kr} R^{kr}(\lambda, \mu)\right\}^m.$$

Эти уравнения показывают, что если условия (4,1,2) и (4,1,4) выполнены для $k=1$, то они выполнены и для $k=2, 4$, и вообще для всех k.

Рассмотрим случай $k=1$.

Имеем

$$M\|\psi(t+\Delta, x)-\psi(t, x)\|^2 = \sum_k R^{kk}(1, 0) = \sum_k \int_t^{t+\Delta} b^{kk}(\tau, x)\,d\tau,$$

где

$$b^{kk}(\tau, x) = b^{kk}(\tau, x, x).$$

Таким образом, условие (4,1,2) выполнено, если

$$b^{kk}(\tau, x) \leqslant C(1+\|x\|^2).$$

Далее имеем

$$M\|(\psi(t+\Delta, x)-\psi(t, x)-\psi(t+\Delta, y)+\psi(t, y)\|^2 = \sum_k R^{kk}(1, -1).$$

Следовательно, для выполнения условий (4,1,2) и (4,1,4) достаточно, чтобы функции

$$b^{kk}(\tau, x, y)$$

для $\tau \leqslant T$ имели равномерно ограниченные частные производные первого порядка.

Что же касается условий (4,1,5), то можно показать, что они выполняются, если частные производные вида

$$\frac{\partial^{2r} b^{pq}(\tau, x, y)}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_r}\,\partial y^{s_1}\ldots\partial y^{s_r}} \tag{4,10}$$

равномерно ограничены по x и y.

Доказательство можно провести следующим образом. Положим

$$\Delta_i\psi(t, x) = \psi(t_i+\Delta_i, x)-\psi(t_i, x), \quad \Delta_i > 0,\ t_i+\Delta_i < t_{i+1},$$

$$y_{ij,k} = x_{ij}+(0, \ldots, 0, \Delta x_{ij}^k, 0, \ldots, 0) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, L,$$

и рассмотрим характеристическую функцию закона распределения совокупности величин

$$\frac{\Delta_i\psi^r(t, y_{ij,k})-\Delta_i\psi^r(t, x_{ij})}{\Delta x_{ij}^k}, \quad \Delta_i\psi^s(t, \xi_{ip}),$$

где

$$k, r, s = 1, 2, \ldots, n$$
$$(i, j) = (i, 1), (i, 2)\ldots(i, L_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$
$$(i, p) = (i, 1), \ldots, (i, L').$$

Она равна

$$g(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} R(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip})\right\},$$

где

$$R(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip}) = \sum \mu_s^{ip} \mu_{s'}^{ip'} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} b^{ss'}(t, \xi_{ip}, \xi_{ip'})\, dt +$$

$$+ \sum \lambda_{rk}^{ij} \mu_s^{ip} \frac{1}{\Delta x_i^k} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} [b^{rs}(t, y_{ij,k}, \xi_{ip}) - b^{rs}(t, x_{ij}, \xi_{ip})]\, dt +$$

$$+ \sum \lambda_{rk}^{ij} \lambda_{r'k'}^{ij'} \frac{1}{\Delta x_{ij}^k \Delta x_{ij'}^{k'}} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} [b^{rr'}(t, y_{ij,k}, y_{ij',k'}) -$$

$$- b^{rr'}(t, y_{ij,k}, x_{ij'}) + b^{rr'}(t, x_{ij}, x_{ij'}) - b^{rr'}(t, x_{ij}, y_{ij',k'})]\, dt.$$

Если теперь предположить, что все $\Delta x_i^k \to 0$, и что существуют производные

$$\frac{\partial^2 b^{rr'}(t, x, y)}{\partial x^k \partial x^{k'}} \qquad \begin{matrix} r, r' = 1, 2, \ldots, n \\ k, k' = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{4,11}$$

то соответствующие характеристические функции равномерно в любой конечной области значений параметров $\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip}$ стремятся к пределу

$$g_0(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} R_0(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip})\right\}, \tag{4,12}$$

где

$$R_0(\lambda_{rk}^{ij}, \mu_s^{ip}) = \sum \mu_s^{ip} \mu_{s'}^{ip'} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} b^{ss'}(t, \xi_{ip}, \xi_{ip'})\, dt +$$

$$+ \sum \lambda_{rk}^{ij} \mu_s^{ip} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^k} b^{rs}(t, x_{ij}, \xi_{ip})\, dt + \sum \lambda_{rk}^{ij} \lambda_{r'k'}^{ij'} \int_{t_i}^{t_i+\Delta_i} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^{k'}} b^{rr'}(t, x_{ij}, x_{ij'})\, dt. \tag{4,13}$$

Так как функция (4,12) является предельной для характеристических функций, то она сама является характеристической функцией некоторого закона распределения.

Будем исходить теперь из полученных формул (4,11), (4,13), положив их в основу определения нового случайного процесса.

Рассмотрим $n(n+1)$-мерную величину

$$\{v^{11}(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, v^{nn}(t, x^1, \ldots, x^n), \quad u^1(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, u^n(t, x^1, \ldots, x^n)\}$$

и определим характеристическую функцию закона распределения величин

$$\Delta v^{rk}(t, x_j), \quad \Delta u^s(t, \xi_p), \quad r, k, s = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, L, \quad p = 1, \ldots, L',$$

положив ее равной

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}R_0(\lambda_{rk}^j, \mu_s^p)\right\}, \tag{4,14}$$

где

$$R_0(\lambda_{rk}^j, \mu_s^p) = \sum \mu_s^p \mu_{s'}^{p'} \int\limits_t^{t+\Delta} b^{ss'}(t, \xi_p, \xi_{p'})\,dt + \sum \lambda_{rk}^j \mu_s^p \int\limits_t^{t+\Delta} \frac{\partial}{\partial x_j^k} b^{rs}(t, x_j, \xi_p)\,dt +$$

$$+ \sum \lambda_{rk}^j \lambda_{r'k'}^{j'} \int\limits_t^{t+\Delta} \frac{\partial^2 b^{rr'}(t, x_j, x_{j'})}{\partial x^k \partial x^{k'}}\,dt. \tag{4,15}$$

Для системы величин

$$\Delta_i v^{rk}(t, x_{ij}), \quad \Delta_i u^s(t, \xi_{ip}),$$

соответствующих последовательности непересекающихся интервалов

$$(t_1, t_1+\Delta_1), \ldots, (t_L, t_L+\Delta_L),$$

определим характеристическую функцию закона распределения, положив ее равной произведению характеристических функций (4,14), соответствующих каждому из интервалов $(t_i, t_i+\Delta_i)$ $(i=1, 2, \ldots, L)$.

Заданные, таким образом, функции в качестве характеристических, в силу предыдущего, действительно определяют совокупность законов распределения, в свою очередь определяющую некоторый случайный процесс $\{\Omega, \Pi\}$.

Из вида характеристических функций (4,14) следует, что можно считать функции из Ω с Π-вероятностью, равной 1 непрерывными относительно x.

Отсюда следует, что закон распределения для величин

$$\int\limits_{y_k}^{z_k} \Delta v(t, x)\,dx^k$$

является предельным для законов распределения суммы вида

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta v(t, x^1, \ldots, x^{k-1}, \quad \xi^k, x^{k+1}, \ldots, x^n)\,\Delta\xi^k,$$

так как из сходимости последовательности функционалов почти везде на некотором множестве следует сходимость по мере.

Из последнего замечания легко следует, что закон распределения величины

$$\int\limits_{y_k}^{z_k} \Delta v^{rs}(t, x)\,dx^k.$$

тождествен с законом распределения величины

$$\Delta u^r(t, x^1, \ldots, z^k, \ldots, x^n) - \Delta u^r(t, x^1, \ldots, y^k, \ldots, x^n),$$

а величина

$$\Delta u(t, z^1,\dots, z^n) = \Delta u(t, y^1,\dots, y^n) + \Delta u(t, z^1,\dots, z^n) - \Delta u(t, y^1, z^2,\dots, z^n) + \\ + \Delta u(t, y^1, z^2,\dots, z^n) - \dots - \Delta u(t, y^1,\dots, y^n)$$

имеет тот же закон распределения, что и величина $\Delta\psi(t, z)$.

Так как функции $\Delta u(t, z^1,\dots, z^n)$ диференцируемы по z, то тем самым доказано, что случайные функции процесса $\{\Gamma^{c\prime}, P'\}$ можно считать диференцируемыми по z с вероятностью равной 1.

Опять, из того, что сходимость функционалов почти везде на множестве влечет за собой сходимость по мере, вытекает, что закон распределения совокупности величин

$$\Delta_i \frac{\partial\psi^r(t, x_{ij})}{\partial x^k}, \quad \Delta_i\psi^s(t, \xi_{ip})$$

является предельным для законов распределения величин (4,10) при $\Delta x_{ij}^k \to 0$ и, следовательно, определяется своей характеристической функцией (4,12).

Следовательно, если $\mathfrak{A}^1(t, x)$ обозначает тензор, составленный из частных производных функций, $\psi^r(t, x)$, то

$$M\|\mathfrak{A}^1(t+\Delta, x) - \mathfrak{A}^1(t, x)\|^2 =$$

$$= M\sum_{r, k=1}^{n}\left[\Delta\frac{\partial\psi^r(t, x)}{\partial x^k}\right]^2 = \sum_{r, k=1}^{n}\int_t^{t+\Delta}\frac{\partial^2 b^{rr}(t, x, x)}{\partial x^k\partial x'^k}\,dt,$$

и если

$$\left|\frac{\partial^2 b^{rr}(t, x, x')}{\partial x^k\partial x'^k}\right| \leqslant C,$$

то и

$$M\|\mathfrak{A}^1(t+\Delta, x) - \mathfrak{A}^1(t, x)\|^2 \leqslant C\Delta.$$

На основании предыдущего такая же оценка имеет место для величины $M\|\mathfrak{A}^1(t+\Delta, x) - \mathfrak{A}^1(t, x)\|^4$.

Таким образом доказано, что равномерная ограниченность величин (4,9) для $r=1$ влечет за собой выполнимость неравенства (4,1,5) для $r=1$.

Предыдущее доказательство, проведенное для $r=1$, содержит в себе, очевидно, и случай любого r.

Подытожим предыдущие результаты.

Если для случайного процесса $\{\Gamma^c, P\}$ класса W

$$M[\alpha(t+\Delta, x) - \alpha(t, x)] = A(t, \Delta, x)\,\Delta,$$

$$M[\alpha^r(t+\Delta, x) - \alpha^r(t, x) - A^r(t, \Delta, x)\,\Delta]\,[\alpha^s(t+\Delta, y) - \alpha^s(t, y) - A^s(t, \Delta, y)\,\Delta] = \\ = B^{rs}(t, \Delta, x, y)\,\Delta,$$

где $A(t, \Delta, x)$, $B^{rs}(t, \Delta, x, y)$ непрерывные функции указанных аргументов, то

$$A(t, \Delta, x)\,\Delta = \int_{t}^{t+\Delta} a(\tau, x)\,d\tau,$$

$$B^{rs}(t, \Delta, x, y) = \int_{t}^{t+\Delta} b^{rs}(\tau, x, y)\,d\tau.$$

Если, кроме того,

$$M\,\|a(t+\tau, x) - a(t, x)\|^{2+\delta} = o(\tau)$$

для некоторого положительного δ и функции $a(t, x)$ имеют равномерно ограниченные частные производные до третьего порядка включительно, а функции $b^{pq}(t, x, y)$ имеют равномерно ограниченные частные производные вида

$$\frac{\partial^{2r} b^{pq}(t, x, y)}{\partial x^{s_1} \ldots \partial x^{s_r}\ \partial y^{\sigma_1} \ldots \partial y^{\sigma_r}} \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2, 3 \\ p, q = 1, 2, \ldots, n, \end{array}$$

то будем говорить, что случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ удовлетворяет условию A.

Лемма 4,1. *Случайный процесс, удовлетворяющий условиям* A, *удовлетворяет условиям I и II § 2, 3 и, следовательно, для него справедливы оценки и теоремы § 2, 3.*

В дальнейшем будет показано, что для процесса Маркова $\{\Phi^c, \Pi\}$ определяемого в Φ функциями $X(t)$, имеют место диференциальные уравнения Колмогорова [2].

Прежде всего приведем некоторые уточнения результатов § 3.

Если вместо введенной в § 3 (3,18) функции $v_2(\tau, \xi\,|\,t)$ рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} \overline{v}_2(\tau, \xi\,|\,t) = v_1(\tau, \xi\,|\,t) + ((\Psi^1(t, \xi) - \Psi^1(t_n, \xi);\ \psi(t_n, \xi) - \psi(\tau, \xi))) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} ((\Psi^1(t_{k+1}, \xi) - \Psi^1(t_k, \xi));\ \psi(t_k, \xi) - \psi(\tau, \xi))), \end{aligned} \tag{4,16}$$

то для нее также имеет место неравенство (3,19) леммы 3,5. Действительно,

$$\begin{aligned} M\,\|v_2(\tau, \xi\,|\,t) - \overline{v}_2(\tau, \xi\,|\,t)\|^2 = M \Bigg\| \sum_{k=1}^{n} \Bigg\{ \Bigg(\Bigg(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial a(t, x)}{\partial x}\,dt;\ \int_{\tau}^{t_k} a(t, x)\,dt \Bigg)\Bigg) + \\ + \Bigg(\Bigg(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial a(t, x)}{\partial x}\,dt;\ \psi(t_k, \xi) - \psi(\tau, \xi) \Bigg)\Bigg) + \\ + \Bigg(\Bigg(\Psi^1(t_{k+1}, \xi) - \Psi^1(t_k, \xi);\ \int_{\tau}^{t_k} a(t, x)\,dt \Bigg)\Bigg) \Bigg\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)\,(t_{n+1} - \tau)^3, \end{aligned}$$

так как по предположению функции $\dfrac{\partial a}{\partial x^i}$ равномерно ограничены.

Далее, имеет место следующая

Лемма 4,2. *При* $|\sigma| \to 0$ *величины*

$$\overline{v_2}(\tau, \xi \mid t)$$

стремятся в H *к определенному пределу* $V_2(\tau, \xi \mid t)$, *удовлетворяющему соотношениям:*

$$M \| X(\tau, \xi \mid t) - V_2(\tau, \xi \mid t) \|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)(t-\tau)^3, \tag{4,17}$$

$$MV_2(\tau, \xi \mid t) = \xi + \int_\tau^t a(\theta, x)\, d\theta. \tag{4,18}$$

Доказательство.

1. Чтобы доказать, что величины $\overline{v_2}(\tau, \xi \mid t)$ при $|\sigma| \to 0$ стремятся в H к определенному пределу, достаточно доказать это свойство для величин

$$\varphi(\sigma \mid t) = \sum_{k=1}^{n} ((\Psi^1(t_{k+1}, \xi) - \Psi^1(t_k, \xi); \quad \psi(t_k, \xi) - \psi(t, \xi))).$$

Для доказательства последнего, в свою очередь достаточно показать, что для каждого ε существует такое $\{\sigma\}$, что для любого $\{\sigma'\}$, являющегося подразбиением $\{\sigma\}$,

$$M \| \varphi(\sigma \mid t) - \varphi(\sigma' \mid t) \|^2 \leqslant \varepsilon. \tag{4,19}$$

Для упрощения выкладки можно положить, не нарушая общности,

$$\Psi^1(t, \xi) = \psi_1(t), \quad \psi(t, \xi) = \psi_2(t),$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ две одномерные случайные величины некоторого двумерного случайного процесса класса W (функции рассматриваемого процесса имеют вид: $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$), причем

$$M[\psi_i(t+\tau) - \psi_i(t)] = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$M[\psi_i(t+\tau) - \psi_i(t)]^2 = \varrho_i(t, \tau)\,\tau,$$

где $\varrho_i(t, \tau)$ $(i = 1, 2)$ непрерывные функции.

Имеем

$$M|\varphi(\sigma \mid t) - \varphi(\sigma' \mid t)| = M \sum_{i=0}^{N} \left| \sum_{k=0}^{i_p - 1} (\psi_1(t_{ik}) - \psi_1(t_{i0}))(\psi_2(t_{ik+1}) - \psi_2(t_{ik})) \right|^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \sum_{k=0}^{i_p - 1} \varrho_1(t_{i0}, t_{ik} - t_{i0})\, \varrho_2(t_{ik}, t_{ik+1} - t_{ik})(t_{ik} - t_{i0})(t_{ik+1} - t_{ik}) \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma|\, t \max_{t \leqslant T} \varrho_1 \varrho_2.$$

Тем самым можно считать неравенство (4,19) для достаточно малых $|\sigma|$ доказанным.

В силу полноты пространства H существует функция $\varphi(t)$, к которой сходится последовательность функций $\varphi(\sigma \mid t)$ при $|\sigma| \to 0$

$$M \| \varphi(t) - \varphi(\sigma \mid t) \|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad |\sigma| \to 0.$$

2. Положим

$$V_2(\tau, \xi | t) = \xi + \alpha(t, \xi) - \alpha(\tau, \xi) + \varphi(\tau, \xi | t). \tag{4,20}$$

Тогда

$$M\|X(\tau, \xi | t) - V_2(\tau, \xi | t)\|^2 \leqslant C\{M\|X(\tau, \xi | t) - x_n(\tau, \xi | t)\|^2 +$$
$$+ M\|x_n(\tau, \xi | t) - \bar{v}_2(\tau, \xi | t)\|^2 + M\|V_2(\tau, \xi | t) - \bar{v}_2(\tau, \xi | t)\|^2\}.$$

Так как первое и третье слагаемое правой части неравенства в зависимости от выбора $\{\sigma\}$ могут быть сделаны произвольно малыми, а для второго слагаемого имеет место равномерная относительно $\{\sigma\}$ оценка (3,19), то такая же оценка имеет место и для левой части неравенства, т. е.

$$M\|X(\tau, \xi | t) - V_2(\tau, \xi | t)\|^2 \leqslant C(\|\xi\|^2)(t-\tau)^3.$$

3. Так как

$$\|M(\varphi - \varphi(\sigma))\|^2 \leqslant M\|\varphi - \varphi(\sigma)\|^2$$

и

$$M\varphi(\sigma) = 0,$$

то и

$$M\varphi = 0.$$

Следовательно,

$$MV_2(\tau, \xi | t) = \xi + \int_t^{t+\tau} a(\theta, \xi)\, d\theta.$$

Лемма доказана.

В § 3 была введена функция

$$F(\tau, \xi) = M f[X(\tau, \xi | t)],$$

где $f(\xi)$ диференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае (случайный процесс $\{\Gamma^c, P\}$ есть процесс класса W и $\{\Phi^c, \Pi\}$ есть процесс Маркова), функция $F(\tau, \xi)$ удовлетворяет первому уравнению Колмогорова.

При выводе этого уравнения встретятся пределы

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} M\{X(t, \xi | t+\tau) - \xi\},$$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} M[X^i(t, \xi | t+\tau) - \xi^i][X^j(t, \xi | t+\tau) - \xi^j],$$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau^2} M\|X(t, \xi | t+\tau) - \xi\|^4,$$

значения которых даются следующими тремя леммами:

Лемма 4,3.

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} M\{X(t, \xi | t+\tau) - \xi\} = a(t, \xi).$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\tau} M[V_2(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi] = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} a(\theta,\xi)\,d\theta \to a(t,\xi), \quad \tau\to 0,$$

и далее

$$\frac{1}{\tau}\|M\{X(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\}-M\{V_2(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\}\| \leqslant \frac{C\tau^{3/2}}{\tau}\to 0 \quad \tau\to 0.$$

Лемма 4,4.

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau} M[X^i(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^i]\,[X^j(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^j] = b^{ij}(t,\xi).$$

Доказательство. Введем функцию

$$v_1(t,\xi\,|\,t+\tau)=\xi+\alpha(t+\tau,\xi)-\alpha(t,\xi)$$

и положим

$$w(t,\xi,t+\tau)=X(t,\xi\,|\,t+\tau)-v_1(t,\xi\,|\,t+\tau).$$

Тогда

$$M[X^i(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^i]\,[X^j(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^j] =$$
$$= M[v_1^i(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^i]\,[v_1{}^j(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^j] +$$
$$+ Mw^i(t,\xi,t+\tau)\,[X^j(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^j] + Mw^j(t,\xi,t+\tau)\,[X^i(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^i].$$

В силу леммы 2,9

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\,|Mw^r(t,\xi,t+\tau)\,[X^s(t,\xi,t+\tau)-\xi^s]| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\{M\|X(t,\xi\,|\,t+\tau)\|^2\cdot M\|w\|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\,C(\|\xi\|^2)\sqrt{\tau}\cdot\tau = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau} M[v_1^i(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^i]\,[v_1{}^j(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi^j]=b^{ij}(t,\xi),$$

что и дает требуемое.

Лемма 4,5.

$$\frac{1}{\tau^2} M\|X(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\|^4 = D(\xi,\tau),$$

где $D(\xi,\tau)$ *ограниченная функция* τ.

Доказательство. Действительно, в силу соотношения (3) леммы 2,9

$$M\|X(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\|^4 \leqslant C(\|\xi\|^4)\,\tau^2 + CM\|v_1(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\|^4.$$

Далее

$$M\|v_1(t,\xi\,|\,t+\tau)-\xi\|^4 \leqslant C\left\|\int\limits_t^{t+\tau} a(\theta,\xi)\,d\theta\right\|^4 +$$
$$+ CM\|\psi(t+\tau,\xi)-\psi(t,\xi)\|^4 \leqslant C(\|\xi\|^4)\,(\tau^2+\tau^4),$$

откуда и следует доказываемое.

В частности, из доказанной леммы следует, если принять во внимание одну теорему Колмогорова [4], что процесс Маркова $\{\Phi^c, \Pi\}$ является непрерывным. (О непрерывных случайных процессах см. [5, 4.] Случайный процесс называется непрерывным, если множество непрерывных функций имеет внешнюю меру — вероятность равную единице).

Обратимся теперь к выводу диференциального уравнения для функции $F(\tau, \xi)$.

Положим

$$\eta = X(\tau - \Delta, \xi \mid t)$$

и рассмотрим выражение

$$\Delta_\tau F = M\{f[X(\tau, \xi \mid t)] - f[X(\tau - \Delta, \xi \mid t)]\} =$$
$$= M\{f[X(\tau, \xi \mid t)] - f[X(\tau, \eta \mid t)]\}.$$

Обозначим через $\Phi^i(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ тензор ранга i, компоненты которого равны соответствующим частным производным i-го порядка функции $f(\xi)$ по ξ^k.

Пользуясь формулой Тейлора, получим:

$$\Delta_\tau F = -M\{(\Phi^1[X(\tau, \xi \mid t)];\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t)) +$$
$$+ \frac{1}{2}((\Phi^2[X(\tau, \xi \mid t)];\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t);\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t))) + R_3\},$$

где

$$R_3 = \frac{1}{2!}\int_0^1 ((\overline{\Phi}^3(\theta);\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t);\quad X(\tau, \eta \mid t) -$$
$$- X(\tau, \xi \mid t);\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t))) \cdot (1 - \theta)^2\, d\theta,$$
$$\overline{\Phi}^3(\theta) = \Phi^3[X(\tau, \xi \mid t) + \theta(X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t)],$$

причем $\|\Phi^3\| \leqslant M$.

В выражениях

$$(\Phi^1[X(\tau, \xi \mid t);\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t)),$$
$$((\Phi^2[X(\tau, \xi \mid t)];\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t);\quad X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t)))$$

положим, соответственно,

$$X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi \mid t) = \sum_r (\eta^r - \xi^r) U_r + \frac{1}{2}\sum_{r, s}(\eta^r - \xi^r)(\eta^s - \xi^s) U_{rs} + \gamma_2,$$
$$X(\tau, \eta \mid t) - X(\tau, \xi^r \mid t) = \sum_r (\eta^r - \xi^r) U_r + \gamma_1,$$

где U_r, U_{rs} имеют то же значение, что и в леммах 3,2 и 3,4.

Тогда

$$-\Delta_\tau F = M\Bigg\{\sum_r (\eta^r - \xi^r)(\Phi^1; U_r) + \frac{1}{2}\sum_{r, s}(\eta^r - \xi^r)(\eta^s - \xi^s)[(\Phi^1, U_{rs}) +$$
$$+ ((\Phi^2; U_r; U_s))] + (\Phi^1; \gamma_2) + \frac{1}{2}((\Phi^2; \gamma_1; \gamma_1)) + \sum_r (\eta^r - \xi^r)((\Phi^2; U_r; \gamma_1)) + R_3\Bigg\}.$$

Если рассматривать функцию

$$f[X(\tau, \xi|t)] - f[X(\tau-\Delta, \xi|t)],$$

как функцию, заданную на $\Gamma^c_{[t-\Delta,\tau)} \times \Gamma^c_{[\tau,t]} = \Gamma^c_{[t-\Delta,t]}$ (здесь $\Gamma^c_{[\tau-\Delta,\tau)}$, $\Gamma^c_{[\tau,t]}$, $\Gamma^c_{[\tau-\Delta,t]}$ обозначают пространство случайных функций на интервалах, соответственно $[\tau-\Delta, \tau)$, $[\tau, t]$, $[\tau-\Delta, t]$), и обозначить через $M_{[\tau-\Delta,\tau)}$, $M_{[\tau,t]}$ интегралы от функций, заданных на $\Gamma^c_{[\tau-\Delta,\tau)}$, $\Gamma^c_{[\tau,t]}$ по пространству $\Gamma^c_{[\tau-\Delta,\tau)}$, $\Gamma^c_{[\tau,t]}$, соответственно, то из определения процессов класса W (в силу применимости теоремы Фубини) вытекает

$$\Delta_\tau F = M_{[t-\Delta,\tau)} M_{[\tau,t]} \{f[X(\tau, \xi|t)] - f[X(\tau, \eta|t)]\}.$$

Из этого равенства получаем следующие соотношения: в силу леммы 2,9 (2)

$$M\|R_3\| \leqslant CM\|\eta-\xi\|^3$$

в силу леммы 3,2

$$|M((\Phi^2; \gamma_1; \gamma_1))| \leqslant CM\|\gamma_1\|^2 \leqslant CM\|\eta-\xi\|^4$$

и (принимая еще во внимание существование $M\|U\|^2$)

$$|M\sum_r (\eta^r-\xi^r)((\Phi^2; U_r; \gamma_1))| \leqslant CM\|\eta-\xi\|^3,$$

в силу же леммы 3,4

$$|M(\Phi^1; \gamma_2)| \leqslant CM\|\eta-\xi\|^3.$$

Принимая во внимание теорему 5 из равенства (3,13) и (3,14), получим:

$$M\sum_r (\eta^r-\xi^r)(\Phi^1; U_r) = \sum_r \frac{\partial F}{\partial \xi^r} M(\eta^r-\xi^r),$$

$$M\sum_{r,s} (\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s)\{(\Phi^1; U_{rs}) + ((\Phi^2; U_r; U_s))\} =$$

$$= \sum_{r,s} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^r \partial \xi^s} M(\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s).$$

В силу лемм 4,5, 4,4 и 4,3

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} M\|\eta-\xi\|^4 = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} M\|\eta-\xi\|^3 = 0,$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} M(\eta^r-\xi^r)(\eta^s-\xi^s) = b^{rs}(\tau, \xi),$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} M(\eta^r-\xi^r) = a^r(\tau, \xi).$$

Отсюда следует, что функция $F(\tau, \xi)$ имеет левое производное число по τ, удовлетворяющее диференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \sum_r a^r(\tau, \xi)\frac{\partial F}{\partial \xi^r} + \frac{1}{2}\sum b^{rs}(\tau, \xi)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^r \partial \xi^s} = 0. \qquad (4,21)$$

Аналогично доказывается существование правого производного числа по τ функции $F(\tau, \xi)$, удовлетворяющему тому же диференциальному уравнению. Следовательно, функция $F(\tau, \xi)$ диференцируема по τ и ее производная удовлетворяет уравнению (4,21)

Тем самым доказана следующая

Теорема 6. *Функции*

$$X(t)=S(\tau, \xi \mid t, \alpha|_\tau^t),$$

являющиеся решением уравнения

$$dX(t)=\delta\alpha(t, X(t)), \tag{2,5}$$

где $\alpha(t, x)$ *— случайные функции процесса* $\{\Gamma^c, P\}$ *класса* W, *удовлетворяющего условию* A, *определяют непрерывный процесс Маркова.*

Если $f(\xi)$ *трижды диференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до третьего порядка включительно, то функция*

$$F(\tau, \xi)=Mf\,[S(\tau, \xi \mid t, \alpha|_\tau^t]$$

является решением диференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}+\sum_r a^r(\tau, \xi)\frac{\partial F}{\partial \xi^r}+\frac{1}{2}\sum_{r,s} b^{rs}(\tau, \xi)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^r\,\partial \xi^s}=0, \tag{4,21}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\lim_{\tau\to t-0} F(\tau, \xi)=f(\xi).$$

В диференциальном уравнении (4,21) функции $a^r(\tau, \xi)$, $b^{rs}(\tau, \xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) функции $a^r(\tau, \xi)$ имеют равномерно ограниченные производные до третьего порядка включительно,

б) частные производные

$$\frac{\partial^{2k} b^{rs}(\tau, \xi, \eta)}{\partial \xi^{p_1}\ldots\partial \xi^{p_k}\partial \eta^{q_1}\ldots\partial \eta^{q_k}}, \qquad \begin{matrix} k=1, 2, 3, \\ r, s=1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

равномерно ограничены (τ — фиксировано) и

$$b^{rs}(\tau, \xi, \xi)=b^{rs}(\tau, \xi),$$

в) квадратическая форма

$$\sum_{r,s,k,} b^{rs}(\tau, \xi_k, \eta_j)\,h_r^k h_s^j$$

неотрицательна;

в остальном функции $a^r(\tau, \xi)$, $b^{rs}(\tau, \xi)$ произвольны.

В частности, отсюда следует:

если функции $a^r(\tau, \xi)$, $b^{rs}(\tau, \xi, \eta)$ удовлетворяют условиям а), б) и в), то диференциальное уравнение (4,21) имеет решение, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{\tau\to t-0} F(\tau, \xi)=f(\xi),$$

где $f(\xi)$ произвольная функция, ограниченная вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей (1936).

2. А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, вып. 5 (1938).

3. Феллер, К теории стохастических процессов (теоремы существования и единственности), Успехи матем. наук, вып. 5 (1938).

4. Е. Е. Слуцкий, Несколько предложений к теории случайных функций. Труды САГУ, Математика, вып. 31 (1940).

5. J. L. Doob, Stochastic processes depending upon a continuous parameter. Amer. Math. Soc. Trans., 42 (1937).

Поступило 15.II 1951 г.
Киев.