Об одном случае интегрируемости уравнений симметрического движения системы трех материальных точек

Ю. Д. Соколов

1. Введение

Движение системы трех материальных точек P_0, P_1, P_2, при котором треугольник $P_2P_0P_1$ постоянно остается равнобедренным, впервые рассматривалось в 1895 г. Д. Н. Горячевым в задаче плоского движения двух материальных точек с равными массами, взаимно притягивающихся по закону Ньютона и притягиваемых, по тому же закону, неподвижным центром [1]). В случае равенства нулю постоянной интеграла энергии Д. Н. Горячев свел решение задачи к интегрированию одного уравнения первого порядка и исследовал характер траекторий.

Существование аналогичных пространственных движений с осью симметрии, с плоскостью симметрии и плоского движения, с осью симметрии в плоскости движения, в общей (классической) задаче трех тел было установлено Франсеном в том же 1895 г. [2]).

В 1913 г. эти движения рассматривались Е. Вильчинским [3]), давшим им наименование „равнобедренных решений задачи трех тел" („Solutions isoscéles du problème des trois corps"), а затем Ж. Шази [4]), установившим, как и Вильчинский, что необходимым условием возможности таких движений является равенство двух масс, находящихся в вершинах основания треугольника. В работе П. В. Воронца „Преобразование уравнений динамики при помощи линейных интегралов движения" [5]), при

[1]) Известия имп. Об-ва люб. е., а. и э. Отд. физ. наук, VII и VIII. См. также Стеклов, Об одном преобразовании дифференциальных уравнений движения свободной материальной точки в плоскости и его приложения (там же, IX, 1897).

Работа Д. Н. Горячева неизвестна иностранным авторам, приписывающим приоритет в этом вопросе Франсену.

[2]) Ett specialfall af tre Kropparsproblemet: tva himla Kroppar röra sig pa lika stora afstand fran den trede (OEfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Färhandligar, arg. 52, N 10, 1895).

[3]) Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi (Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XXI, 1913).

[4]) Sur les solutions isoscèles du problème des trois corps (Bulletin astronomique, 2-e série, t. I, f. III, 1921).

[5]) Университетские известия Киевского университета № 1-2, 1907. Работа Франсена П. В. Воронцу, очевидно, не была известна.

более общих предположениях о силах взаимодействия, были составлены уравнения таких движений, при которых треугольник $P_2P_0P_1$, оставаясь равнобедренным, вращается вокруг оси симметрии или оси, параллельной основанию, с угловой скоростью, пропорциональной модулю кинетического момента (c).

Там же было получено решение задачи в случае взаимного притяжения обратно пропорционально кубу расстояния. Вопрос же о том, являются ли указанные формы движения в „равнобедренном случае" единственно возможными, в этой работе, так же как и у предыдущих авторов, поставлен не был. Кроме того, выбрав единицу силы так, чтобы c^2 равнялся константе притяжения, автор лишился возможности дать характеристику плоского движения $(c^2=0)$ [1]).

Плоские траектории для этого случая подробно исследованы в нашей статье „Про симетричний випадок в задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено пропорціонально кубам віддалень" [2]).

В ряде других мемуаров, посвященных „равнобедренному случаю", были исследованы особые траектории при плоском движении как для случая закона Ньютона [3]), так и для законов значительно более общего характера [4]). Наконец, в работе „Об общем случае симметрического движения системы трех материальных точек" [5]) была рассмотрена в общем виде задача о пространственном движении, сохраняющем равнобедренную конфигурацию, трех материальных точек, взаимно притягивающихся (при $f(\Delta_{ij})<0$) или отталкивающихся (при $f(\Delta_{ij})>0$) с силами, равными по модулю

$$m_i m_j |f(\Delta_{ij})| \qquad (i, j=0, 1, 2;\ i\neq j), \tag{1}$$

где Δ_{ij} — взаимное расстояние точек с массами m_i, m_j, а $f(r)$ — функция действительная и аналитическая при всяком действительном положительном значении аргумента, могущая иметь особенности при $r=0$ и $r=\infty$. Было доказано, что, за исключением легко интегрируемого случая при $f(r)=Ar$, единственно возможными видами движения в „равнобедренном случае" являются вращения треугольника $P_2P_0P_1$ около своей оси симметрии и около оси, параллельной основанию, или плоское движение с осью симметрии в соответствующей плоскости. Там же были указаны случаи интегрируемости в элементарных и эллиптических функциях, из которых наиболее заслуживающим внимания является случай, когда

$$f(r)=Ar+\frac{B}{r^3}, \tag{1'}$$

[1]) Замечание автора о том, что соответствующее решение „может быть получено... из частного решения § 2 настоящей главы, предположив, что скорость вращения плоскости треугольника вокруг его высоты равна нулю", очевидно, несправедливо, так как формулы § 2 получены при существенном предположении, что $c^2>0$.

[2]) Математичний збірник КДУ № 3 (1949).

[3]) Журнал Ін-ту математики АН УРСР № 1 (1934).

[4]) Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР № 3 (1939); № 5 (1940); № 6 (1941).

[5]) Украинский математический журнал № 3 (1950).

при произвольных значениях A и $B \neq 0$, и исследованы особые траектории [1]).

В настоящей работе, имеющей целью дополнить результаты предыдущего мемуара и обобщить исследования П. В. Воронца, дается непосредственное и полное решение в эллиптических функциях „равнобедренного случая“ при законе взаимодействия (1), где $f(r)$ имеет вид (1′), и исследуются относительные траектории точек во всех возможных случаях.

2. Диференциальные уравнения движения относительно вращающихся осей. Единственно возможные виды движения плоскости треугольника $P_2P_0P_1$

Отнесем движение трех материальных точек P_0, P_1, P_2, взаимодействующих по закону (1)—(1′), к вращающейся прямоугольной системе координатных осей $O\Xi HZ$, имеющей начало в центре инерции системы (O), который, не нарушая общности, будем считать неподвижным. Обозначим радиус-вектор, относительную скорость, ускорение точки P_i и мгновенную угловую скорость осей $O\Xi HZ$ соответственно через

$$\begin{aligned}
\overline{r}_i&=\xi_i\overline{\xi}^0+\eta_i\overline{\eta}^0+\zeta_i\overline{\zeta}^0,\\
\overline{v}_i&=\xi_i'\overline{\xi}^0+\eta_i'\overline{\eta}^0+\zeta_i'\overline{\zeta}^0,\\
\overline{w}_i&=\xi_i''\overline{\xi}^0+\eta_i''\overline{\eta}^0+\zeta_i''\overline{\zeta}^0,\\
\overline{\omega}&=\omega_\xi\overline{\xi}^0+\omega_\eta\overline{\eta}^0+\omega_\zeta\overline{\zeta}^0,
\end{aligned}$$

где штрихами обозначены производные по времени (t). Уравнения движения системы в векторной форме будут иметь вид

$$\overline{w}_i+\overline{\omega}'\times\overline{r}_i+\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}_i)+2\overline{\omega}\times\overline{v}_i=\frac{1}{m_i}\,\mathrm{grad}_i\,V \qquad (i=0,\,1,\,2), \tag{2}$$

где

$$V=\frac{1}{2}\sum_{ij}m_im_j(A\Delta_{ij}^2-B\Delta_{ij}^{-2}). \tag{3}$$

Пусть $m_1=m_2$ и начальные данные в момент $t=0$ выбраны так, что во все время движения $\Delta_{01}=\Delta_{20}$, т. е. треугольник $P_2P_0P_1$ остается равнобедренным.

Направим ось $O\Xi$ по оси симметрии треугольника, ось OH — параллельно его основанию P_2P_1 и ось OZ — перпендикулярно к плоскости треугольника $P_2P_0P_1$.

Полагая тогда в (2)

$$\begin{gathered}
m_1=m_2=m,\quad m_0+2m=M,\quad \frac{2m}{M}=\nu^2=\frac{1}{\mu^2}<1;\\
\xi_0=-\nu^2x,\ \ \xi_1=\xi_2=(1-\nu^2)\,x;\quad \eta_0=0,\ \ \eta_1=-\eta_2=y>0;\\
\zeta_i=\zeta_i'=\zeta_i''=0 \qquad (i=0,\,1,\,2);\\
\Delta_{12}=2y,\quad \Delta_{01}=\Delta_{20}=+\sqrt{x^2+y^2}=\varrho,
\end{gathered} \tag{4}$$

[1]) Парного и общего соударения, а также — неограниченного расхождения точек в конечный промежуток времени.

получим шесть уравнений:

$$x'' - (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)\, x = M \frac{x}{\varrho} f(\varrho), \tag{5_1}$$

$$y'' - (\omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2)\, y = m_0 \frac{y}{\varrho} f(\varrho) + m f(2y), \tag{5_2}$$

$$2\omega_\zeta x' + (\omega_\zeta' + \omega_\xi \omega_\eta)\, x = 0, \tag{5_3}$$

$$2\omega_\zeta y' + (\omega_\zeta' - \omega_\xi \omega_\eta)\, y = 0, \tag{5_4}$$

$$2\omega_\eta x' + (\omega_\eta' - \omega_\xi \omega_\zeta)\, x = 0, \tag{5_5}$$

$$2\omega_\xi y' + (\omega_\xi' + \omega_\eta \omega_\zeta)\, y = 0. \tag{5_6}$$

Уравнения (5_3), (5_4) дают

$$\omega_\zeta (xy' - yx') = \omega_\xi \omega_\eta xy,$$

$$\omega_\zeta' (xy' - yx') + \omega_\xi \omega_\eta (xy)' = 0.$$

Комбинируя (5_5) и (5_6), найдем

$$(\omega_\xi \omega_\eta)' xy + 2\omega_\xi \omega_\eta (xy)' + \omega_\zeta (\omega_\eta^2 - \omega_\xi^2)\, xy = 0.$$

Диференцируя по t первое из полученных уравнений, будем иметь

$$\omega_\zeta (xy'' - yx'') + \omega_\zeta' (xy' - yx') = (\omega_\xi \omega_\eta)' xy + \omega_\xi \omega_\eta (xy)',$$

что, на основании двух последних, приведется к

$$\omega_\zeta [xy'' - yx'' + (\omega_\eta^2 - \omega_\xi^2)\, xy] = 0. \tag{$5'$}$$

Но из уравнений (5_1), (5_2) найдем, что

$$xy'' - yx'' + (\omega_\eta^2 - \omega_\xi^2)\, xy = 2m\, Bxy \left(\frac{1}{16y^4} - \frac{1}{\varrho^4} \right)$$

не обращается тождественно в нуль [1]); следовательно, по $(5')$ $\omega_\zeta = 0$, а тогда по (5_3) и $\omega_\xi \omega_\eta = 0$, так что $\omega_\xi = 0$ или $\omega_\eta = 0$. В первом случае по (5_5), обозначая постоянную интегрирования через c_1, имеем:

$$\omega_\xi = \omega_\zeta = 0, \quad \omega_\eta = \frac{c_1}{x^2}, \tag{I}$$

т. е. треугольник $P_2 P_0 P_1$ вращается вокруг прямой, параллельной его основанию, с угловой скоростью, обратно пропорциональной квадрату высоты.

Во втором случае по (5_6):

$$\omega_\eta = \omega_\zeta = 0, \quad \omega_\xi = \frac{c_2}{y^2}, \tag{II}$$

---

[1]) Если исключаем из рассмотрения случаи $x = 0$ (прямолинейное расположение точек), $2y = \varrho$ (эквидистантная конфигурация) и $B = 0$ [$f(r) = Ar$], рассмотренные в последнем из цитированных мемуаров.

т. е. треугольник $P_2P_0P_1$ вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью, обратно пропорциональной квадрату основания.

Наконец, из (I) при $c_1=0$, или из (II) при $c_2=0$, получим $\omega_\xi=\omega_\eta=\omega_\zeta=0$, т. е. плоское движение (для P_0 — прямолинейное), с осью симметрии в соответствующей плоскости.

3. Преобразование уравнений относительного движения к новым переменным

Отличая в обозначениях случаи I и II соответственно индексами 1 и 2, запишем уравнения (5_1), (5_4) в виде

$$x''=M\frac{x}{\varrho}f(\varrho)-\frac{1}{m_0}\frac{\partial\Omega_i}{\partial x}=\frac{1}{m_0}\frac{\partial V_i}{\partial x},$$
$$y''=m_0\frac{y}{\varrho}f(\varrho)+mf(2y)-\frac{1}{M}\frac{\partial\Omega_i}{\partial y}=\frac{1}{M}\frac{\partial V_i}{\partial y},\qquad (i=1,2),\tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_1=\frac{m_0c_1^2}{2x^2},\quad \Omega_2=\frac{Mc_2^2}{2y^2}\\ &V_i=\frac{M}{2}\left|\,m_0\left(A\varrho^2-\frac{B}{\varrho^2}\right)+\frac{m}{2}\left(4Ay^2-\frac{B}{4y^2}\right)\right|-\Omega_i=\mu^2V-\Omega_i\end{aligned}\right\}.\tag{7}$$

Система уравнений (6) имеет интеграл

$$m_0x'^2+My'^2=2V_i+2h_i,\tag{8}$$

где h_i — постоянная интегрирования.

Введем вместо x, y, x', y' новые переменные r, φ, R, Φ по формулам

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{m_0}\,x=r\cos\varphi,\quad \sqrt{M}\,y=r\sin\varphi,\\ &m_0xx'+Myy'=rr'=R,\quad \sqrt{Mm_0}\,(xy'-yx')=r^2\varphi'=\Phi\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

так, что

$$r=+\sqrt{m_0x^2+My^2}\,^{1)},\quad \varrho=r\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{m_0}+\frac{\sin^2\varphi}{M}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{M}{m_0}}\,\frac{y}{x},\tag{9'}$$

причем $0<\varphi<\pi$ и $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ [2].

Положим еще

$$2r^2V_i=AMr^4+2F_i,\tag{10}$$

где F_i есть, очевидно, функция одного аргумента φ.

---

[1]) Так, что момент инерции системы относительно полюса O отличается от r^2 только множителем $\frac{2m}{M}=r^2$.

[2]) Индексом 0 снабжаются в дальнейшем начальные значения переменных при $t=0$.

Тогда уравнения (6) заменятся системой четырех уравнений 1-го порядка:

$$r\frac{dr}{dt}=R, \qquad r^2\frac{dR}{dt}=R^2+\Phi^2+AMr^4-2F_i,$$
$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\Phi, \qquad r^2\frac{d\Phi}{dt}=\frac{dF_i}{d\varphi}, \tag{11}$$

где

$$2F_i=-BM^2\left(\frac{m_0^2}{M\cos^2\varphi+m_0\sin^2\varphi}+\frac{m}{8\sin^2\varphi}\right)-2r^2\Omega_i,$$
$$2r^2\Omega_1=\frac{m_0^2c_1^2}{\cos^2\varphi}, \quad 2r^2\Omega_2=\frac{M^2c_2^2}{\sin^2\varphi}, \tag{12}$$

$$\frac{dF_i}{d\varphi}=-BM^2m\sin 2\varphi\left[\frac{m_0^2}{(M\cos^2\varphi+m_0\sin^2\varphi)^2}-\frac{1}{16\sin^4\varphi}\right]-\frac{d(r^2\Omega_i)}{d\varphi},$$
$$\frac{d(r^2\Omega_1)}{d\varphi}=\frac{m_0^2c_1^2\sin 2\varphi}{2\cos^4\varphi}, \quad \frac{d(r^2\Omega_2)}{d\varphi}=-\frac{M^2c_2^2\sin 2\varphi}{2\sin^4\varphi}. \tag{12'}$$

Интеграл (8) примет вид

$$R^2+\Phi^2=AMr^4+2F_i+2h_ir^2. \tag{13}$$

4. Интегрирование уравнений (11)

Из третьего и четвертого уравнений (11) найдем

$$\Phi\, d\Phi=\frac{dF_i}{d\varphi}d\varphi,$$

откуда

$$\Phi^2=2F_i-a_i, \tag{14}$$

где a_i — произвольная постоянная.

Тогда, по (13)

$$R^2=AMr^4+2h_ir^2+a_i \qquad (a_i=R_0^2-2h_ir_0^2-AMr_0^4). \tag{15}$$

Отсюда, по первому из уравнений (11),

$$dt=\frac{d(r^2)}{2\sqrt{AMr^4+2h_ir^2+a_i}}. \tag{16}$$

Полагая, при $A>0$

$$\tau=\frac{\operatorname{th}\sqrt{AM}\,t}{\sqrt{AM}}, \text{ так что } dt=\frac{d\tau}{1-AM\tau^2}, \tag{17}$$

получим из (16)

$$\frac{1+\sqrt{AM}\,\tau}{1-\sqrt{AM}\,\tau}=\frac{r^2+\dfrac{h_i}{AM}\pm\sqrt{r^4+\dfrac{2h_ir^2+a_i}{AM}}}{r_0^2+\dfrac{h_i}{AM}+\dfrac{R_0}{\sqrt{AM}}},$$

откуда

$$r^2+\frac{h_i}{AM}\pm\sqrt{r^4+\frac{2h_ir^2+a_i}{AM}}=\left(r_0^2+\frac{h_i}{AM}+\frac{R_0}{\sqrt{AM}}\right)\frac{1+\sqrt{AM}\tau}{1-\sqrt{AM}\tau}$$

и

$$r^2+\frac{h_i}{AM}\mp\sqrt{r^4+\frac{2h_ir^2+a}{AM}}=\left(r_0^2+\frac{h_i}{AM}-\frac{R_0}{\sqrt{AM}}\right)\frac{1-\sqrt{AM}\tau}{1+\sqrt{AM}\tau}$$

складывая, получим

$$r^2=\frac{(AMr_0^2+2h_i)\tau^2+2R_0\tau+r_0^2}{1-AM\tau^2}=\frac{(R_0\tau+r_0^2)^2-a_i\tau^2}{r_0^2(1-AM\tau^2)}=\frac{\left(\frac{r_0^2}{\tau}+R_0\right)^2-a_i}{r_0^2\left(\frac{1}{\tau^2}-AM\right)}. \tag{18}$$

При $A<0$ и $A=0$ снова получим формулу (18), полагая соответственно

$$\tau=\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-AM}\,t}{\sqrt{-AM}}\quad\text{и}\quad \tau=t. \tag{17'}$$

Третье из уравнений (11), на основании (14), дает

$$\pm\frac{d\varphi}{\sqrt{2F_i-a_i}}=\frac{dt}{r^2},$$

откуда

$$\pm\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{2F_i-a_i}}=\int\limits_0^t\frac{dt}{r^2}=I. \tag{19}$$

Принимая во внимание (17) и (18), будем иметь

$$I=\int\limits_0^\tau\frac{r_0^2d\tau}{(R_0\tau+r_0^2)^2-a_i\tau^2}=\frac{1}{2\sqrt{a_i}}\ln\frac{r_0^2+(R_0+\sqrt{a_i})\tau}{r_0^2+(R_0-\sqrt{a_i})\tau}=\frac{1}{\sqrt{a_i}}I_1\quad\text{при } a_i>0 \tag{20_1}$$

$$\left(\text{и при } r_0^2=\sqrt{\frac{a_i}{AM}},\quad R_0=0,\quad A>0: I=t\frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{a_i}}=\frac{t}{r_0^2},\quad I_1=\sqrt{AM}\,t\right),$$

$$I=\frac{\tau}{r_0^2+R_0\tau}=\frac{1}{R_0}I_2\quad\text{при } a_i=0, \tag{20_2}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{-a_i}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-a_i}\,\tau}{r_0^2+R_0\tau}=\frac{1}{\sqrt{-a_i}}I_3\quad\text{при } a_i<0. \tag{20_3}$$

Наконец, угол поворота (ψ) плоскости ΞOH около неподвижной оси OH в случае (I) и около $O\Xi$ в случае (II) определится квадратурой

$$\psi-\psi_{01}=c_1\int\limits_0^t\frac{dt}{x^2}\quad\text{или}\quad\psi-\psi_{02}=c_2\int\limits_0^t\frac{dt}{y^2}. \tag{21}$$

5. Преобразование квадратуры (19) (введение полярного угла ϑ)

С целью некоторого упрощения дальнейших выкладок введем вместо φ полярный угол ϑ:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{m_0}{M}} \operatorname{tg} \varphi, \tag{22}$$

так что

$$\sin^2 \varphi = \frac{M \sin^2 \vartheta}{m_0 \cos^2 \vartheta + M \sin^2 \vartheta}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{m_0 \cos^2 \varphi}{m_0 \cos^2 \vartheta + M \sin^2 \vartheta},$$
$$d\varphi = \frac{\sqrt{Mm_0}}{2\mu} \frac{d\vartheta}{\mu^2 - \cos^2 \vartheta}. \tag{22'}$$

Подставляя (22′) в (12), после простых преобразований при $i=1$ получим:

$$2F_1 - a_1 = -BM\left[(m_0 \cos^2 \vartheta + M \sin^2 \vartheta)\left(m_0 + \frac{m}{8 \sin^2 \vartheta} + \frac{m_0 c_1^2}{BM \cos^2 \vartheta}\right) + \frac{a_1}{BM}\right] =$$
$$= -\frac{2BMmm_0}{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}\left[\cos^6 \vartheta - 2b \cos^4 \vartheta + (2b-c)\cos^2 \vartheta + d\right], \tag{23_1}$$

где

$$c = \frac{15}{16} + \frac{c_1^2}{2BM}, \quad 2b = \frac{\mu^2(\mu^4 - c) + d \pm s^2}{\mu^2(\mu^2-1)}, \quad 2b - c = \frac{\mu^4(\mu^2 - c) + d \pm s^2}{\mu^2(\mu^2-1)},$$
$$d = \frac{c_1^2}{2BM}, \quad s = + \sqrt{\frac{1}{8m^3}\left|\frac{a_1}{B}\right|}, \tag{24_1}$$

и знак перед s^2 в выражениях $2b$ и $2b - c$ есть знак $\frac{a_1}{B}$.

При $i = 2$ из (12) по (22′) найдем

$$2F_2 - a_2 = -BM\left[(m_0 \cos^2 \vartheta + M \sin^2 \vartheta)\left(m_0 + \frac{\frac{m}{8} + \frac{c_2^2}{B}}{\sin^2 \vartheta}\right) + \frac{a_2}{BM}\right] =$$
$$= -\frac{2BMmm_0}{\sin^2 \vartheta}(\cos^4 \vartheta - 2b \cos^2 \vartheta + 2b - c), \tag{23_2}$$

где

$$c = \frac{15}{16} - \frac{c_2^2}{2Bm}, \quad 2b = \frac{\mu^2(\mu^4 - c) \pm s^2}{\mu^2(\mu^2-1)},$$
$$2b - c = \frac{\mu^4(\mu^2 - c) \pm s^2}{\mu^2(\mu^2-1)}, \quad s = + \sqrt{\frac{1}{8m^3}\left|\frac{a_2}{B}\right|}. \tag{24_2}$$

Таким образом, полагая в (23_1), (24_1) $d=0$ и заменяя c_1^2, a_1 на $-c_2^2$, a_2, получим (23_2), (24_4).

Полагая

$$\cos^2 \vartheta = p^2 = q \tag{25}$$

и подставляя (22′), (23_1) в (19), получим в случае (I):

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{8m^3|B|}}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)\sqrt{\pm[q^3-2bq^2+(2b-c)q+d]}}=I, \qquad (26_1)$$

где под знаком корня берется знак, обратный знаку B.

Для случая (II) по (22′), (23_2) и (25) получим из (19):

$$\pm\frac{1}{\sqrt{8m^3|B|}}\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{(\mu^2-p^2)\sqrt{\pm(p^4-2bp^2+2b-c)}}=$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{8m^3|B|}}\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{(\mu^2-p^2)\sqrt{\pm(p^2-\alpha)(p^2-\beta)}}=I, \qquad (26_2)$$

где

$$\alpha=b+\sqrt{b^2-2b+c},\quad \beta=b-\sqrt{b^2-2b+c} \qquad (27)$$

(26_2) получается из (26_1) при положении $d=0$ и $q=p^2$.

I. СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА $P_2P_0P_1$ ВОКРУГ ОСИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОСНОВАНИЮ P_1P_2

6. Случай $B<0$

Рассмотрим сначала случай (I) в предположении, что $B<0$. Тогда по (26_1)

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{-8Bm^3}}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)\sqrt{Q(q)}}=I, \qquad (26_1')$$

где

$$Q(q)=q^3-2bq^2+(2b-c)q+d=(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma), \qquad (28)$$

$d=-\alpha\beta\gamma<0$, $c<\dfrac{15}{16}$, знак перед s^2 в выражениях (24_1) противоположен знаку a_1 и, следовательно,

$$Q(-\infty)=-\infty,\quad Q(0)<0,\quad Q(q_0)\geqslant 0,\quad Q(1)=\frac{1}{16},$$

$$Q(\mu^2)=-\frac{a_1}{8m^3B}=\pm s^2,\quad Q(+\infty)=+\infty, \qquad (28')$$

т. е. один корень полинома $Q(q)$ лежит между нулем и $q_0<1$ или совпадает с q_0. В случае трех действительных корней будем полагать $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$, а в случае одного действительного — будем обозначать последний через γ.

Рассмотрим последовательно все возможные случаи значений корней α, β и γ.

7. Случай $\gamma < \beta < 0$

1) Пусть $\gamma < \beta < 0$; тогда $\frac{15}{16} < \alpha \leqslant q_0 < 1$ и по (28') $a_1 > 0$.

Так как q должно изменяться между α и 1, и $p_0 = \cos\vartheta_0 \geqslant \sqrt{\alpha}$, то относительные траектории точки P_1 расположены между полупрямыми $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \arccos\sqrt{\alpha}$.

Полагая

$$k^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} < 1, \quad \lambda = \frac{\mu^2-\gamma}{\alpha-\gamma} > 1, \quad s = +\sqrt{-\frac{a_1}{8Bm^3}}, \tag{29_1}$$

введем новую переменную u по формуле

$$q = \gamma + \frac{\alpha-\gamma}{\operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{sn} u = +\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{q-\gamma}}, \tag{30_1}$$

причем в случае $q_0' \geqslant 0$ положим

$$K < u_0 < 2K - u_1 \text{ [1]}, \quad \text{где } \operatorname{sn} u_1 = \operatorname{sn}(2K-u_1) = +\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}} \quad (0 < u_1 < K),$$

а в случае $q_0' < 0$

$$u_1 < u_0 < K,$$

так, что всегда будет в интервале регулярного движения

$$u_1 < u < 2K - u_1.$$

Тогда [2]

$$q-\alpha = (\alpha-\gamma)\operatorname{cs}^2 u, \quad q-\beta = (\alpha-\gamma)\operatorname{ds}^2 u, \quad q-\gamma = (\alpha-\gamma)\operatorname{ns}^2 u,$$
$$dq = -2(\alpha-\gamma)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{ns}^3 u\, du,$$

так, что всегда $u_0' > 0$, $u' > 0$ и

$$\mu^2 - q = \mu^2 - \gamma - (\alpha-\gamma)\operatorname{ns}^2 u = (\alpha-\gamma)\frac{\lambda\operatorname{sn}^2 u - 1}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

Подставляя найденные выражения в ($26_1'$), получим

$$\frac{s}{(\mu^2-\gamma)\sqrt{\alpha-\gamma}}\int_{u_0}^{u}\frac{\lambda\operatorname{sn}^2 u\, du}{\lambda\operatorname{sn}^2 u - 1} = I_1, \tag{31_1}$$

откуда, так как в данном случае $\sqrt{Q(\mu^2)} = s$:

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{H(u-g)}{H(u+g)} + \frac{H'(g)}{H(g)}u\right]\Bigg|_{u_0}^{u} = U, \tag{32_1}$$

---

[1] Где K, как обычно, обозначает полный эллиптический интеграл первого рода.

[2] Принимая известные обозначения Гляйхера.

где $H(u)$ есть известная функция Якоби, $H'(u)$ — ее производная и

$$\operatorname{sn} g = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\mu^2-\gamma}} < \operatorname{sn} u_1 \qquad (0 < g < K, \quad g < u_1 < u). \tag{33$_1$}$$

Из (20_1) и (32_1) получим:

$$\frac{r_0^2 + (R_0 + \sqrt{a_1})\tau}{r_0^2 + (R_0 - \sqrt{a_1})\tau} = e^{2U},$$

откуда

$$\frac{r_0^2}{\tau} = \sqrt{a_1} \operatorname{cth} U - R_0. \tag{34}$$

Подставляя (34) в (18), найдем

$$r^2 = \frac{a_1 r_0^2}{(\sqrt{a_1} \operatorname{ch} U - R_0 \operatorname{sh} U)^2 - AMr_0^4 \operatorname{sh}^2 U} \tag{35}$$

и по (9')

$$\varrho^2 = \frac{a_1 r_0^2}{2m(\mu^2 - q)\left[(\sqrt{a_1} \operatorname{ch} U - R_0 \operatorname{sh} U)^2 - AMr_0^4 \operatorname{sh}^2 U\right]}. \tag{36}$$

Формулы (30_1), (36) и (34) дают выражения $\cos\vartheta$, ϱ и τ через u и пять произвольных параметров (r_0, ϑ_0, R_0, a_1 и $c_1{}^2$).

В частности, при

$$A > 0, \quad r_0^2 = \sqrt{\frac{a_1}{AM}}, \quad R_0 = 0, \quad t = \frac{U}{\sqrt{AM}}; \tag{37}$$

$r = r_0 = \text{const}$ и траекторией служит дуга эллипса

$$m_0 x^2 + My^2 = r_0^2 = \sqrt{\frac{a_1}{AM}}, \tag{37'}$$

соответствующая значениям полярного угла $0 \leqslant \vartheta \leqslant \arccos\sqrt{\alpha}$.

При рассмотрении характера движения введем следующие сокращенные обозначения:

U_1, $\overline{U}_1$ — значения функции U соответственно при $u = u_1$ и $u = 2K - u_1$;

$$P_{U_1} = \sqrt{AM} r_0^2 + \sqrt{a_1} \operatorname{cth} U_1, \quad P_{\overline{U}_1} = -\sqrt{AM} r_0^2 + \sqrt{a_1} \operatorname{cth} \overline{U}_1; \tag{38}$$

t_{b_1}, t_{b_2} — значения t, соответствующие

$$\tau_{b_1} = \frac{r_0^2}{\sqrt{a_1} \operatorname{cth} U_1 - R_0} \quad \text{и} \quad \tau_{b_2} = \frac{r_0^2}{\sqrt{a_1} \operatorname{cth} \overline{U}_1 - R_0}; \tag{38'}$$

t_{c_1}, t_{c_2} — значения t, соответствующие

$$\tau_{c_1} = -\frac{r_0^2}{R_0 + \sqrt{a_1}} \quad \text{и} \quad \tau_{c_2} = -\frac{r_0^2}{R_0 - \sqrt{a_1}}; \tag{38''}$$

C_x — отрицательная полутраектория, вытекающая под прямым углом из некоторой точки оси OX (полутраектория „выбрасывания" в момент $t_{k_1} < 0$ точек P_1, P_2, с бесконечными скоростями, из некоторой точки оси OX), или положительная полутраектория, втекающая под прямым углом в некоторую точку оси OX (полутраектория соударения в момент $t_{k_2} > 0$ точек P_1, P_2 на оси OX, на конечном расстоянии от 0);

C_0 — отрицательная полутраектория, вытекающая под определенным углом, соответствующим кратному положительному (<1) корню (β_i) уравнения $Q(q) = 0$, из начала координат (полутраектория „выбрасывания" в момент $t_{c_1} < 0$ точек из O с бесконечными скоростями) или — положительная полутраектория, втекающая под таким же углом в начало (полутраектория общего соударения в момент $t_{c_2} > 0$);

C_∞ — полутраектория, имеющая асимптоту, непараллельную оси OX;

$\bar{C}_\infty$ — полутраектория, имеющая асимптоту $y = +\sqrt[4]{-\frac{Bm}{8AM}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{-\frac{B}{A}\nu^2}$ [1]), параллельную оси OX, в случае (I) и $y = \sqrt[4]{-\frac{2Bm}{AM}(1-c)} = \sqrt[4]{-\frac{B}{A}\nu^2(1-c)}$ в случае (II);

$C_\infty^{(p)}$ — полутраектория, имеющая бесконечную ветвь (параболического типа) без асимптоты;

C_a — отрицательная полутраектория, вытекающая из точки пересечения эллипса $r = \sqrt[4]{\frac{a_1}{AM}}$ с полупрямой $\vartheta = \arccos\sqrt{\beta_i}$, под углом $\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu^2 - \beta_i}{\sqrt{\beta_i}}$ к этой полупрямой, или положительная полутраектория, втекающая в эту точку;

S_0 — отрицательная полутраектория волнообразного вида, вытекающая из начала координат без определенного направления, неограниченное число раз касающаяся поочередно полупрямых, соответствующих двум простым, положительным ($u < 1$) корням (β, γ) уравнения $Q(q) = 0$ (полутраектория „выбрасывания" точек из O, с бесконечными скоростями, в момент $t_{c_1} < 0$), или положительная полутраектория такого же характера, втекающая в начало (полутраектория общего соударения в момент $t_{c_2} > 0$);

S_∞ — полутраектория волнообразного вида, распространяющаяся на бесконечность, неограниченное число раз касающаяся поочередно указанных прямых;

---

[1]) Если при $t \to \pm\infty$, $\varrho \to \infty$, а y стремится к некоторому конечному пределу, то непосредственно из второго уравнения (6) следует, что этот предел может быть равен только $+\sqrt[4]{-\frac{Bm}{8AM}}$, в случае (I) и $+\sqrt[4]{-\frac{2Bm}{AM}(1-c)}$, в случае (II).

S_a — полутраектория волнообразного вида, подобная по характеру S_0 и S_∞, но имеющая ω- или α-предельной траекторией дугу эллипса $r = \sqrt{\frac{a_1}{AM}}$.

Очевидно, что общая характеристика движения может быть дана указанием отрицательной и положительной полутраекторий; при этом первой по порядку будем указывать отрицательную полутраекторию. Рассмотрим сначала случай $A > 0$. Тогда при

1) $P_{\bar{U}_1} > R_0 > P_{U_1}$ — движение будет типа $C_x - C_x$; в частности, при условиях (37), будем иметь движение по дуге эллипса,

2а) $R_0 > \max(P_{\bar{U}_1}, P_{U_1})$ — $C_x - C_\infty$,

2б) $R_0 < \min(P_{\bar{U}_1}, P_{U_1})$ — $C_\infty - C_x$,

3а) $P_{\bar{U}_1} = R_0 > P_{U_1}$ — $C_x - \bar{C}_\infty$,

3б) $P_{\bar{U}_1} > R_0 = P_{U_1}$ — $\bar{C}_\infty - C_x$,

4а) $P_{\bar{U}_1} < R_0 = P_{U_1}$ — $\bar{C}_\infty - C_\infty$,

4б) $P_{\bar{U}_1} = R_0 < P_{U_1}$ — $C_\infty - \bar{C}_\infty$,

5) $P_{\bar{U}_1} = R_0 = P_{U_1}$ — $\bar{C}_\infty - \bar{C}_\infty$,

6) $P_{\bar{U}_1} < R_0 < P_{U_1}$ — $C_\infty - C_\infty$.

Если $A = 0$, то возможны первые три случая, причем при

1) $\sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,\bar{U}_1 > R_0 > \sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,U_1$ движение будет типа $C_x - C_x$,

2а) $R_0 > \sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,\bar{U}_1$ " " " $C_x - C_\infty$[1],

2б) $R_0 < \sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,U_1$ " " " C_∞[1] $- C_x$,

3а) $R_0 = \sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,\bar{U}_1$ " " " $C_x - C_\infty^{(p)}$,

3б) $R_0 = \sqrt{a_1}\,\mathrm{cth}\,U_1$ " " " $C_\infty^{(p)} - C_x$.

Наконец, при $A < 0$ возможно только движение $C_x - C_x$.

8. Случай $\gamma = \beta < 0$

2) Пусть

$$\gamma = \beta = \frac{2b - \sqrt{4b^2 - 6b + 3c}}{3} < 0;$$

тогда

$$\frac{15}{16} < \alpha = \frac{2(b + \sqrt{4b^2 - 6b + 3c})}{3} < q_0 < 1,$$

[1] В этом случае асимптота не проходит через O.

$q \geqslant \alpha$, $a_1 > 0$ и постоянные s^2 и c_1^2 связаны соотношением, выражающим равенство нулю дискриминанта кубического уравнения

$$(4b^2-6b+3c)^3-\left(8b^3-18b^2+9bc-\frac{27}{2}d\right)^2=0 \tag{39}$$

или

$$(b^2-2b+c)(2b-c)^2-d\left(8b^3-18b^2+9bc-\frac{27}{4}d\right)=0. \tag{39'}$$

Уравнение $(26_1')$ принимает вид

$$\pm\frac{s}{2}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)(q-\gamma)\sqrt{q-\alpha}}=I_1,$$

где квадратура в левой части выражается через элементарные функции. В этом случае по (29_1) $k^2=0\left(K=\frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn} g, \quad \frac{H'(g)}{H(g)}, \quad \frac{H(u-g)}{H(u+g)}$$

вырождаются соответственно в

$$\sin u, \quad \sin g, \quad \operatorname{ctg} g, \quad \frac{\sin(u-g)}{\sin(u+g)},$$

так, что

$$U=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin(u-g)}{\sin(u+g)}+\operatorname{ctg} u\Bigg|_{u_0}^{u}=$$

$$=\left[\pm\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu^2-\alpha}-\sqrt{q-\alpha}}{\sqrt{\mu^2-\alpha}+\sqrt{q-\alpha}}+\sqrt{\frac{\mu^2-\alpha}{\alpha-\gamma}}\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{q-\gamma}}\right]\Bigg|_{q_0}^{q}{}^{1)}, \tag{32_2}$$

где

$$\sin u=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{q-\gamma}}, \quad \sin g=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\mu^2-\gamma}}, \quad \operatorname{ctg} g=+\sqrt{\frac{\mu^2-\alpha}{\alpha-\gamma}},$$

$$0<g<u_1<\frac{\pi}{2}, \quad u_1<u<\pi-u_1, \quad \sin u_1=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\leqslant u_0<\pi-u_1 \text{ при } q_0'\geqslant 0; \quad u_1<u_0<\frac{\pi}{2} \text{ при } q_0'<0\right).$$

Формулы (34), (35), (36) сохраняют свой вид, и движение имеет характер, указанный в конце § 7.

---

[1] Здесь знак $\Big|_{q_0}^{q}$ обозначает полное изменение функции при изменении q от q_0 до q; arc sin берется в I или 2 четверти соответственно знаку q' и q_0' (— при $q'>0$ $(q_0'>0)$ и + при $q'<0$ $(q_0'<0)$).

9. Случай $0 < \gamma < \beta < 1$

3) Пусть $0 < \gamma < \beta < 1$ $(2b > c,\ 2b > 0)$; тогда $\alpha < \frac{15}{16}$ и $a_1 > 0$. Здесь могут иметь место два случая.

а) $q_0 \geqslant \alpha$; тогда во все время движения $q \geqslant \alpha$ и все формулы и заключения случая I § 7 остаются без изменения.

б) $\gamma \leqslant q_0 \leqslant \beta$; тогда $\gamma \leqslant q \leqslant \beta$ и траектории точки P_1 расположены между полупрямыми $\vartheta = \arccos\sqrt{\beta}$ и $\vartheta = \arccos\sqrt{\gamma}$.

Сохраняя для k^2 и s значения (29_1), положим

$$q = \gamma + (\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad \lambda = \frac{\beta - \gamma}{\mu^2 - \gamma} < k^2, \tag{30_3}$$

причем в случае $q_0' > 0$ или $q_0' = 0$ и $q_0 = \gamma$ полагаем

$$0 < u_0 < K \quad \text{или} \quad u_0 = 0,$$

а при $q_0' < 0$ или $q_0' = 0$ и $q_0 = \beta$

$$K < u_0 < 2K \quad \text{или} \quad u_0 = K.$$

Тогда

$$q - \alpha = -(\alpha - \gamma)\,\mathrm{dn}^2 u, \quad q - \beta = -(\beta - \gamma)\,\mathrm{cn}^2 u, \quad q - \gamma = (\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}^2 u,$$
$$dq = 2(\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\, du,$$

так, что всегда $u_0' > 0$ $(u' > 0)$ и

$$\mu^2 - q = (\mu^2 - \gamma)(1 - \lambda\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Подстановка этих выражений в (26_1) дает

$$\frac{s}{\sqrt{\alpha - \gamma}\,(\mu^2 - \gamma)} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{1 - \lambda\,\mathrm{sn}^2 u} = I_1, \tag{31_3}$$

откуда

$$I_1 = \left[\frac{H'(g)}{H(g)}\, u + \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(u - g)}{\theta(u + g)} \right]_{u_0}^{u} = U, \tag{32_3}$$

где $\theta(u)$ есть известная функция Якоби и

$$\mathrm{sn}\, g = \frac{\sqrt{\lambda}}{K} = \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{\mu^2 - \gamma}} \qquad (0 < g < K). \tag{33_3}$$

Формулы (34)—(37) § 7 сохраняют свой вид с новым значением u (32_3).

Рассмотрим характер движения в различных возможных случаях, полагая сначала $A > 0$ и вводя обозначение

$$P = -\sqrt{AM}r_0^2 + \sqrt{a_1}.$$

1а) при $R_0 > |P|$ движение типа $S_0 - C_\infty$;

1б) $R_0 < -|P|$: $C_\infty - S_0$;

2) $-P < R_0 < +P$: $S_0 - S_0$; $r(u\varrho)$ изменяется от 0 до некоторого максимального значения и затем снова убывает до нуля.

3а) $R_0 = +P > 0$: $S_0 - S_a$;

3б) $R_0 = -P < 0$: $S_a - S_0$;

4) $R_0 = P = 0$. Тогда $r = r_0 = \sqrt[4]{\dfrac{a_1}{AM}}$.

Движение по дуге эллипса $m_0 x^2 + My^2 = r_0^2$ имеет колебательный характер (ср. 37 § 7).

5а) $R_0 = -P > 0$: $S_a - C_\infty$;

5б) $R_0 = P < 0$: $C_\infty - S_a$;

6) $P < R_0 < -P$: $C_\infty - C_\infty$.

При $A = 0$ и $R_0 > \sqrt{a_1}$ движение такое же, как в случае 1а[1] и если $R_0 = \sqrt{a_1}$, то движение будет типа $S_0 - S_\infty$.

Если $R_0 < -\sqrt{a_1}$, то имеем случай 1б[1], при $-\sqrt{a_1} < R_0 < +\sqrt{a_1}$ — случай 2, а при $R_0 = -\sqrt{a_1}$: $S_\infty - S_0$. При $A < 0$ возможен только случай 2: $S_0 - S_0$.

10. Случай $0 < \gamma = \beta < 1$

4) Пусть

$$0 < \gamma = \beta = \frac{2b - \sqrt{4b^2 - 6b + 3c}}{3} < 1; \quad \gamma = \beta < \alpha = \frac{2(b + \sqrt{4b^2 - 6b + 3c})}{3} < \frac{15}{16}$$

$$(a_1 > 0, \quad 2b > 0, \quad 2b - c > 0)$$

и постоянные s_1^2, c_1^2 связаны соотношением (39) или (39′).

а) Если $q_0 \geqslant \alpha$, то $q \geqslant \alpha$ и получаем формулы и заключения случая 2 § 8.

б) $q_0 = \beta = \gamma$; тогда $q = \text{const} = q_0 = \beta = \gamma$, треугольник $P_2 P_0 P_1$ сохраняет во все время движения углы неизменными, и относительные траектории точек P_1, P_2 — прямолинейны.

Для определения двойного корня $(\beta = q_0)$ уравнения $Q(q) = 0$ можем воспользоваться уравнением $\dfrac{dF}{d\varphi} = 0$, что, на основании (12′) и (22′), приведет к уравнению 4-ой степени

$$\beta^4 - 2\beta^3 + c\beta^2 - 2d\beta + d = \left(\beta - \frac{3}{4}\right)\left(\beta - \frac{5}{4}\right)\beta^2 + d(1-\beta)^2 = 0, \tag{40}$$

---

[1]) Но асимптота в C_∞ не проходит через O, если она не является полупрямой $\vartheta = \arccos \sqrt{\gamma}$ или $\vartheta = \arccos \sqrt{\beta}$.

имеющему при $d<0$ один отрицательный корень, один положительный, больший $\frac{5}{4}$, и два корня β_1, β_2, комплексных при $d<-\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^3$, действительных и лежащих между 0 и $\frac{3}{4}$ при

$$d>-\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 \tag{40'}$$

и совпадающих при

$$d=-\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 . \tag{40''}$$

При условии (39′) и $d\to 0$ меньший из корней β_2 стремится к нулю, а больший $\beta_1 \to \frac{3}{4}$; при (39″): $\beta_1=\beta_2=1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$. Легко видеть, что в данном случае

$$\beta=\gamma=\beta_2.$$

Характер изменения r при прямолинейном движении соответствует случаям 1—6 предыдущего параграфа, причем в случае 4: $R_0=0$, $r_0^2=\sqrt{\frac{a_1}{AM}}$, $r=r_0$, $q=\beta_1$, $A>0$, и треугольник $P_2P_0P_1$, как неизменяемая система, вращается около оси OY (равнобедренная конфигурация относительного равновесия).

11. Случай $0<\gamma=\beta=\alpha$

5) Пусть $0<\gamma<\beta<\alpha\leqslant q_0$. В этом случае

$$d=-\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^3,\quad s^2=\left(\mu^2-1+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^3,\quad a_1>0,\quad 2b=3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right),$$

$$2b-c=3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)^2 \text{ и } \gamma=\beta=\alpha=\frac{2}{3}b=1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}=0{,}60315...$$

Уравнение $(26_1')$ принимает вид

$$\pm\frac{s}{2}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)\,(q-\alpha)^{\frac{3}{2}}}=I_1.$$

а) $q_0>\alpha$. В интервале регулярного движения $q>\alpha$, q' сохраняет знак q_0' и q изменяется монотонно.

Полагая

$$\sin u=\sqrt{\frac{\alpha}{q}},\quad \sin g=\sqrt{\frac{\alpha}{\mu^2}}$$

$$\left(\text{при } q_0'<0:\ u_1<u_0<\frac{\pi}{2};\ \text{ при } q_0'>0:\ \frac{\pi}{2}<\right.$$

$$\left.<u_0<\pi-u_1, \text{ где } 0<\arcsin\sqrt{\alpha}=u_1<\frac{\pi}{2}\right),$$

найдем

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin(u-g)}{\sin(u+g)} + \operatorname{ctg} g \operatorname{tg} u \Bigg|_{u_0}^{u} =$$

$$= U = \mp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu^2-\alpha}-\sqrt{q-\alpha}}{\sqrt{\mu^2-\alpha}+\sqrt{q-\alpha}} + \sqrt{\frac{\mu^2-\alpha}{q-\alpha}}\right]\Bigg|_{q_0}^{q} \text{[1]},$$

причем формулы (34)—(37) сохраняют свой вид.

При $A>0$, $q_0'<0$ и

1) $P>R_0>P_{U_1}$: C_x-C_0,
2) $R_0>\max(P, P_{U_1})$: C_x-C_∞,
3) $R_0<\min(P, P_{U_1})$: $C_\infty-C_0$,
4) $P=R_0>P_{U_1}$: C_x-C_a (в частности — движение по дуге эллипса),
5) $P>R_0=P_{U_1}$: $\overline{C}_\infty-C_0$,
6) $P<R_0=P_{U_1}$: $\overline{C}_\infty-C_\infty$,
7) $P=R_0<P_{U_1}$: $C_\infty-C_a$,
8) $P=R_0=P_{U_1}$: $\overline{C}_\infty-C_a$,
9) $P<R_0<P_{U_1}$: $C_\infty-C_\infty$.

При $A=0$ возможны случаи 1—5[2], причем в случае 4 ($R_0=\sqrt{a_1}$, $q_0'<0$ и $R_0=-\sqrt{a_1}$ при $q_0<0$) имеем движение $C_x-C_\infty^{(p)}$ (при $q_0'<0$) и $C_\infty^{(p)}-C_x$ (при $q_0'>0$), а в случае 5 ($R_0=-\sqrt{a_1}$) движение будет вида $C_\infty^{(p)}-C_0$ ($q_0'<0$) или $C_0-C_\infty^{(p)}$ ($q_0'>0$).

При $A<0$ возможно только движение C_x-C_0 и C_0-C_x.

Заменяя в случаях 1—9 P на $-P$, P_{U_1} на $P_{\overline{U}_1}$, заменяя все знаки неравенств обратными и меняя местами отрицательную и положительную полутраектории, получим характеристику движений в случае $q_0'>0$.

б) $q_0=\alpha$; тогда $q=\text{const}=q_0=\alpha$ и относительное движение точек P_1, P_2 — прямолинейно, как и в случае (б) § 10, а в случае 4 эти точки находятся в относительном покое.

12. Случай $0<\gamma<\beta=\alpha<1$

б) Пусть $0<\gamma<\beta=\alpha<1$. Тогда

$$\gamma=\frac{2(b-\sqrt{4b^2-6b+3c})}{3}\quad\left(0<\gamma<1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right),$$

$$\alpha=\beta=\frac{2b+\sqrt{4b^2-6b+3c}}{3}=\beta_1\ \left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}<\alpha=\beta<\frac{3}{4}\right);$$

$$2b>0,\quad 2b-c>0\ \text{ и }\ a_1>0.$$

---

[1]) Знак $-$ при $q_0'>0$ и $+$ при $q_0'<0$.

[2]) Но асимптоты в случаях 2, 3 при C_∞ не проходят через O.

Уравнение $(26_1')$ будет иметь вид

$$\pm\frac{s}{2}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)(q-\alpha)\sqrt{q-\gamma}}=I_1.$$

В этом случае по (29_1) $k^2=1$.

а) $q_0>\alpha$; тогда во все время регулярного движения $q>\alpha$, q' сохраняет свой знак и q изменяется монотонно. Полагая в формулах § 7 $\beta=\alpha$, $k^2=1$, так что

$$q=\gamma+\frac{\alpha-\gamma}{\operatorname{th}^2 u},\quad \operatorname{th} g=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\mu^2-\gamma}}\qquad\left(\operatorname{th} u=\pm\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{q-\gamma}}\right)$$

$\left(u_0<-u_1 \text{ при } q_0'>0 \text{ и } u_0>u_1 \text{ при } q_0'<0, \text{ где } \operatorname{th} u_1=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}};\ u_1>g\right)$, найдем

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{sh}(u-g)}{\operatorname{sh}(u+g)}+\operatorname{cth} g\,u\Bigg|_{u_0}^{u}=$$

$$=U=\mp\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu^2-\gamma}-\sqrt{q-\gamma}}{\sqrt{\mu^2-\gamma}+\sqrt{q-\gamma}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2-\gamma}{\alpha-\gamma}}\ln\frac{\sqrt{q-\gamma}+\sqrt{\alpha-\gamma}}{\sqrt{q-\gamma}-\sqrt{\alpha-\gamma}}\right]\Bigg|_{q_0}^{q}{}^{1)}.$$

Общий характер движения такой же, как и в случае (а) § 11 [2]).

б) $q_0=\alpha$; тогда $q=q_0=\beta_1$ и имеем прямолинейное движение, как и в случае (б) § 11 [2]).

в) $\gamma\leqslant q_0<\alpha$. Полагая в формулах случая (б) § 9 $\beta=\alpha$, $k^2=1$, так что

$$q=\gamma+(\alpha-\gamma)\operatorname{th}^2 u\quad\left(\operatorname{th} u=\pm\sqrt{\frac{q-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right),\quad \operatorname{th} g=+\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\mu^2-\gamma}}\qquad(30_{6\text{в}})$$

($u_0\geqslant 0$ при $q_0'\geqslant 0$ и $u_0<0$ при $q_0'<0$), получим

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}(u-g)}{\operatorname{ch}(u+g)}+\operatorname{cth} g\,u\Bigg|_{u_0}^{u}=$$

$$=U=\left[\pm\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu^2-\gamma}-\sqrt{q-\gamma}}{\sqrt{\mu^2-\gamma}+\sqrt{q-\gamma}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2-\gamma}{\alpha-\gamma}}\ln\frac{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{q-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{q-\gamma}}\right]\Bigg|_{q_0}^{q}{}^{1)}.\qquad(32_{6\text{в}})$$

Общий характер движения такой же, как в случаях 1—6 § 9, с тем отличием, что в случаях 1, 2, 3, при $r\to+0$, и в случаях 3, 5, при

---

[1]) Верхний знак при $q_0'>0$ и нижний — при $q_0'<0$.

[2]) Но при $A=0$ в случае (4) ($R_0=\sqrt{a_1}$, $q_0'<0$ и $R_0=-\sqrt{a_1}$, $q_0'>0$) и при $\frac{\mu^2-\gamma}{\alpha-\gamma}\leqslant 4$ движение будет типа C_x-C_∞ ($C_\infty-C_x$).

$r^2 \to \sqrt{\frac{a_1}{AM}}$, ϑ стремится к $\arccos\sqrt{\alpha}$ (S_0 и S_a заменяются соответственно на C_0 и C_a); в случае же 4 (движение по дуге эллипса) при $t \to \pm\infty$ P_1 асимптотически приближается к точке $(r_0, \arccos\sqrt{\alpha})$.

При $A=0$ и $R_0 = \pm\sqrt{a_1}$, соответственно, будут движения $C_0 - C_\infty^{(p)}$ и $C_\infty^{(p)} - C_0$ [1].

13. Случай комплексных α и β.

7) α и β — комплексные сопряженные, $0 < \gamma \leqslant q_0$ и $a_1 > 0$; тогда во все время движения должно быть $q \geqslant \gamma$.

Пусть

$$Q(q) = (q-\gamma)(q^2+lq+n)\,{}^{2)} \quad (l^2 - 4n < 0).$$

Полагая

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma + \frac{l}{2}}{\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}}\right), \quad \operatorname{cn} 2g = \frac{\mu^2-\gamma-\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}}{\mu^2-\gamma+\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}} \quad (0 < g < K),$$

$$\operatorname{cn} 2u_1 = \frac{\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}-(1-\gamma)}{\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}+(1-\gamma)} \qquad (0 < u_1 < K)\,{}^{3)}, \tag{29$_7$}$$

введем переменную u по формуле

$$q = \gamma + \sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}\,\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} = \gamma + \sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}\,\frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}-(q-\gamma)}{\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}+(q-\gamma)} \qquad (-u_1 < u < u_1), \tag{30$_7$}$$

причем u_0 будем выбирать так, чтобы всегда было $u_0' > 0$ и $u' > 0$.

Тогда

$$q-\gamma = \sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}\,\frac{\operatorname{sn}^2 2u}{(1+\operatorname{cn} 2u)^2}, \quad q^2+lq+n = 4(\gamma^2+l\gamma+n)\frac{\operatorname{dn}^2 2u}{(1+\operatorname{cn} 2u)^2},$$

$$dq = 4\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}\,\frac{\operatorname{sn} 2u \operatorname{dn} 2u}{(1+\operatorname{cn} 2u)^2}\,du$$

и

$$\mu^2 - q = \frac{\mu^2-\gamma-\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}+(\mu^2-\gamma+\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n})\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} =$$

$$= (\mu^2-\gamma+\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n})\,\frac{\operatorname{cn} 2g + \operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}.$$

---

[1] При $A = 0$ ($R_0 = \sqrt{a_1}$ и $R_0 = -\sqrt{a_1}$) и при $\frac{\mu^2-\gamma}{\alpha-\gamma} \leqslant 4$ движение будет типа $C_0 - C_\infty$ ($C_\infty - C_0$).

[2] Так, что $\gamma - l = 2b$, $n - \gamma l = 2b - c$, $-\gamma n = d$ и $\gamma = 1 - \frac{1}{16(1+l+n)}$.

[3] $\frac{K}{2} < u_1 < K$ при $\operatorname{cn} 2u_1 < 0$ и $0 < u_1 \leqslant \frac{K}{2}$ при $\operatorname{cn} 2u_1 \geqslant 0$ $[\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}-(1-\gamma) \geqslant 0]$.

Подставляя это в $(26_1')$, получим

$$\frac{s}{(\mu^2-\gamma+\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n})\sqrt[4]{\gamma^2+l\gamma+n}}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{1+\operatorname{cn}2u}{\operatorname{cn}2g+\operatorname{cn}2u}\,du=$$

$$=\frac{\operatorname{cn}g\operatorname{dn}g}{\operatorname{sn}g}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 g\operatorname{sn}^2 u}-$$

$$-\frac{\operatorname{cn}(K+g)\operatorname{dn}(K+g)}{\operatorname{sn}(K+g)}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2(K+g)}}=I_1, \qquad (31_7)$$

откуда

$$I_1=\left[\left(\frac{H'(g)}{H(g)}+\frac{\theta_1'(g)}{\theta_1(g)}\right)u+\frac{1}{2}\ln\frac{\theta(u-g)\,H_1(u-g)}{\theta(u+g)\,H_1(u+g)}\right]\Bigg|_{u_0}^{u}=U^{1)}, \qquad (32_7)$$

что в случае $\mu^2-\gamma-\sqrt{\gamma^2+l\gamma+n}=0$ $\left(g=\dfrac{K}{2}\right)$ обращается в

$$I_1=\left[k'u+\frac{1}{2}\ln\frac{k'\operatorname{sn}2u+\operatorname{dn}2u}{\operatorname{cn}2u}\right]\Bigg|_{u_0}^{u}=U.$$

Формулы (34)—(37) и заключения о характере движения случая (I) § 7 остаются без изменения.

14. Случай $0<\gamma<\beta=\alpha$

8) $0<\gamma\leqslant q_0<1<\beta=\alpha$ $\Bigg($как и в случае 6: $\alpha=\beta=\dfrac{2b+\sqrt{4b^2-6b+3c}}{3}>1$, $\gamma=\dfrac{2(b-\sqrt{4b^2-6b+3c})}{3}<1$; $2b>0$, $2b-c>0\Bigg)$ и β равно положительному корню уравнения (39), большему $\dfrac{5}{4}$. Так как по $(25')$ $a_1=-8Bm^3Q(\mu^2)=-8Bm^3(\mu^2-\alpha)^2(\mu^2-\gamma)$, то, при $\alpha\neq\mu^2$, $a_1>0$, а при $\alpha=\beta=\mu^2$: $a_1=0$. Во все время движения $q\geqslant\gamma$.

а) $\alpha=\beta\neq\mu^2$ $(a_1>0)$. Применяя подстановку $(30_{6в})$ случая $6_в$ § 12, получим $(32_{6в})$ при $\alpha<\mu^2$, и ту же формулу при $\alpha>\mu^2$, с переменой ролей $\operatorname{sh}g$, $\operatorname{ch}g$ (и u на $-u$). Полагая $\operatorname{th}u_1=+\sqrt{\dfrac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}}$ $(-u_1<u<u_1)$ и обозначая через U_1, $\overline{U}_1$ значения U $(32_{6в})$ при $u=-u_1$ и $u=u_1$, получим для характеристики движения случаи 1—6 § 7.

1) $\theta_1(g)=\theta(g+K)$, $H_1(g)=H(g+K)$.

б) $\alpha = \beta = \mu^2$ $(a_1 = s = 0)$; тогда $d = -\mu^4\left[1 - \frac{1}{16(\mu^2-1)^2}\right]$ и $\gamma = 1 - \frac{1}{16(\mu^2-1)^2}$. Полагая $\sqrt{\frac{q-\gamma}{\mu^2-\gamma}} = \operatorname{th} u$, найдем по (20_3):

$$\frac{\tau}{r_0^2 + R_0\tau} = \frac{1}{2\sqrt{-8Bm^3(\mu^2-\gamma)^3}}\left(u + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u\right)\Bigg|_{u_0}^{u} =$$

$$= \pm\frac{(\mu^2-1)^3}{2\sqrt{-8Bm^3\left[(\mu^2-1)^3 + \frac{1}{16}\right]}}\left[\frac{\sqrt{\mu^2-\gamma}-\sqrt{q-\gamma}}{\mu^2-\gamma} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu^2-\gamma}+\sqrt{q-\gamma}}{\sqrt{\mu^2-\gamma}-\sqrt{q-\gamma}}\right]\Bigg|_{u_0}^{u} {}^{1)} = U \quad (32_{86})$$

и

$$\frac{r_0^2}{\tau} = \frac{1}{U} - R_0, \quad r^2 = \frac{r_0^2}{(1-R_0U)^2 - AMr_0^4U^2},$$
$$\varrho^2 = \frac{r_0^2}{2m(\mu^2-q)\left[(1-R_0U)^2 - AMr_0^4U^2\right]}. \tag{41}$$

Полагая в этом случае

$$\tau_{b_1} = \frac{r_0^2U_1}{1-R_0U_1}, \quad \tau_{b_2} = \frac{r_0^2\overline{U}_1}{1-R_0\overline{U}_1}, \quad P_{U_1} = \sqrt{AM}r_0^2 + \frac{1}{U_1},$$
$$P_{\overline{U}_1} = \frac{1}{\overline{U}_1} - \sqrt{AM}r_0^2, \tag{42}$$

где U_1, $\overline{U}_1$ — значения функции U (32_{86}) при $u=-u_1$ и $u=u_1$, получим те же случаи возможных движений, которые имели в § 7, но в случае (1) и при $A=0$ возможно движение на дуге эллипса $r=r_0=\text{const}$.

15. Случай $0 < \gamma < 1 < \beta < \alpha$

9) Пусть $0 < \gamma \leqslant q_0 < 1 < \beta < \alpha$; тогда во все время движения $q \geqslant \gamma$ и траектории заключены между полупрямыми $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \arccos\sqrt{\gamma}$. Применяя подстановку (30_3) § 9 $\left(k^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} < 1\right)$, причем при $q_0' \geqslant 0$ полагаем $0 \leqslant u_0 < u_1 < K$, а при $q_0' < 0$ $-K < -u_1 < u_0 < 0$ $\left(\operatorname{sn} u_1 = +\sqrt{\frac{1-\gamma}{\beta-\gamma}}\right)$, так что $-u_1 < u < u_1$, получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{-8Bm^3(\mu^2-\gamma)}\sqrt{\alpha-\gamma}}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{1-\lambda\operatorname{sn}^2 u}. \tag{31_9}$$

а) Пусть $a_1 > 0$; тогда α и β одновременно больше μ^2 или меньше μ^2.

---

[1]) Верхний знак при $q' > 0\,(q_0' > 0)$ и нижний — при $q' < 0\,(q_0' < 0)$.

a′) Если $\beta < \alpha < \mu^2$, то $\lambda < k^2$ и получаем снова формулы (32_3), (33_3).

a″) Если $\mu^2 < \beta < \alpha$, то $\lambda > 1$ и, положив

$$\operatorname{sn} g = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\mu^2-\gamma}{\beta-\gamma}} \qquad (u_1 < g < K), \tag{33_{9a}}$$

получим

$$I_1 = \left[-\frac{\theta'(g)}{\theta(g)}u + \frac{1}{2}\ln\frac{H(g+u)}{H(g-u)}\right]\Bigg|_{u_0}^{u} = U. \tag{32_{9a}}$$

Движение имеет характер, описанный в § 7.

б) Пусть $a_1 = 0$ $(s = 0)$ и

б′) $\mu^2 = \beta < \alpha$; тогда $\lambda = 1$ $\left[-\frac{d}{\mu^4} > 1 - \frac{1}{16(\mu^2-1)^2}\right]$ и по (31_9) и (20_2):

$$\frac{\tau}{r_0^2+R_0\tau} = \frac{1}{\sqrt{-8Bm^3(\mu^2-\gamma)}\sqrt{\alpha-\gamma}\,k'^2}\left[\left(k'^2-\frac{E}{K}\right)u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - Z(u)\right]\Bigg|_{u_0}^{u}{}^{1)} = U. \tag{$32_{9б'}$}$$

б″) $1 < \beta < \alpha = \mu^2$; тогда $\lambda = k^2 \left[-\frac{d}{\mu^4} < 1 - \frac{1}{16(\mu^2-1)^2}\right]$,

$$\frac{\tau}{r_0^2+R_0\tau} = \frac{1}{\sqrt{-8Bm^3(\mu^2-\gamma)^3}\,k'^2}\left[\frac{E}{K}u + Z(u) - k^2\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right]\Bigg|_{u_0}^{u} = U \tag{$32_{9б''}$}$$

и формулы (41) сохраняют свой вид. Сохраняя обозначения (42), получим для возможных движений случаи 1—6 § 7 [2]).

в) Пусть, наконец, $a_1 < 0$; тогда $1 < \beta < \mu^2 < \alpha$ и $k^2 < \lambda < 1$.

Полагая

$$\operatorname{dn}(\bar{g}; K') = \sqrt{\frac{k^2}{\lambda}} \qquad (0 < \bar{g} < K'),$$

получим из (31_9) и (20_3):

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-a_1}\,\tau}{r_0^2+R_0\tau} = i\left[\frac{H_1'(i\bar{g})}{H_1(i\bar{g})}u + \frac{1}{2}\ln\frac{\theta_1(u-i\bar{g})}{\theta_1(u+i\bar{g})}\right]\Bigg|_{u_0}^{u} = U \tag{$32_{9в}$}$$

и

$$\begin{gathered} \frac{r_0^2}{\tau} = \sqrt{-a_1}\operatorname{ctg} U - R_0, \quad r^2 = \frac{-a_1 r_0^2}{\left(\sqrt{-a_1}\cos U - R_0\sin U\right)^2 - AMr_0^4\sin^2 U}, \\ \varrho^2 = \frac{-a_1 r_0^2}{2m(\mu^2-q)\left[\left(\sqrt{-a_1}\cos U - R_0\sin U\right)^2 - AMr_0^4\sin^2 U\right]}. \end{gathered} \tag{43}$$

---

[1]) Где E — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

[2]) Но движение по дуге эллипса $(C_x - C_x)$ в случае 1 при $A > 0$ невозможно; при $A = 0$, наоборот, такое движение становится возможным (при $R_0 = 0$).

Полагая в данном случае

$$\tau_{b_1}=\frac{r_0^2}{\sqrt{-a_1}\operatorname{ctg}U_1-R_0},\quad \tau_{b_2}=\frac{r_0^2}{\sqrt{-a_1}\operatorname{ctg}\overline{U}_1-R_0},$$
$$P_{U_1}=\sqrt{AMr_0^2}+\sqrt{-a_1}\operatorname{ctg}U_1,\quad P_{\overline{U}_1}=\sqrt{-a_1}\operatorname{ctg}\overline{U}_1-\sqrt{AMr_0^2}, \tag{44}$$

где U_1, $\overline{U}_1$ — значения функции U ($32_{9в}$) при $u=-u_1$ и $u=u_1$, снова получим возможные движения типа 1—6 § 7.

16. Случай $B>0$

Если в случае (I) $B>0$, то по (26_1) имеем

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{8Bm^3}}\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq}{(\mu^2-q)\sqrt{-Q(q)}}=I, \tag{$26_1''$}$$

где $Q(q)$ имеет вид (28), причем теперь $d=-\alpha\beta\gamma>0$, $c>\frac{15}{16}$ и

$$Q(-\infty)=-\infty,\quad Q(0)>0,\quad Q(q_0)<0,$$
$$Q(1)=\frac{1}{16},\quad Q(\mu^2)=-\frac{a_1}{8Bm^3},\quad Q(+\infty)=+\infty; \tag{$28_1''$}$$

следовательно, полином $Q(q)$ имеет всегда один корень отрицательный ($\gamma<0$), один положительный, не больший q_0 ($0<\beta\leqslant q_0$), и один, лежащий между q_0 и 1 ($q_0\leqslant\alpha<1$); при этом $a_1<0$, так что

$$2b=\frac{\mu^2(\mu^4-c)+d-s^2}{\mu^2(\mu^2-1)},\quad 2b-c=\frac{\mu^4(\mu^2-c)+d-s^2}{\mu^2(\mu^2-1)},\quad s=+\sqrt{-\frac{a_1}{8Bm^3}}.$$

Уже из (7) и (8) очевидно, что ни y, ни ϱ в этом случае не могут стремиться к нулю (нет ни парных, ни общих соударений) и r^2 имеет минимум $r_m^2=\frac{-h_1+\sqrt{h_1^2-a_1AM}}{AM}$ ($A\neq0$) или

$$r_m^2=-\frac{a_1}{2h_1}=\frac{-a_1r_0^2}{-a_1+R_0^2}\ (A=0).$$

1) Если $\gamma<0$ и $0<\beta=\alpha<1$, то $\beta=\alpha=q_0$ есть корень уравнения (40), имеющего при $d>0$ всегда один положительный и меньший единицы корень между $\frac{3}{4}$ и 1. В этом случае имеем прямолинейное движение (относительное) $q=q_0$, причем при $A\geqslant0$ r изменяется между r_m и $+\infty$, а при $A<0$ — между r_m и $r_м=\sqrt{\frac{-h_1-\sqrt{h_1^2-a_1AM}}{AM}}$ ($h_1>0$) (периодическое, колебательное движение).

2) Если $\gamma<0$ и $0<\beta<\alpha<1$, то $\beta\leqslant q\leqslant\alpha$ и траектории точки P_1 расположены между полупрямыми $\vartheta=\arccos\sqrt{\alpha}$ и $\vartheta=\arccos\sqrt{\beta}$. Положим

$$k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}<1,\quad \lambda=\frac{\alpha-\beta}{\mu^2-\alpha}>0 \text{ и } q=\alpha-(\alpha-\beta)\operatorname{sn}^2u, \tag{30''}$$

причем в случае $q_0' > 0$ или $q_0' = 0$ и $q_0 = \beta$ полагаем

$$-K < u_0 < 0 \text{ или } u_0 = -K,$$

а при $q_0' < 0$ или $q_0' = 0$ и $q_0 = \alpha$

$$0 < u_0 < K \text{ или } u_0 = 0.$$

Тогда

$$\alpha - q = (\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad q-\beta = (\alpha-\beta)\,\mathrm{cn}^2 u, \quad q-\gamma = (\alpha-\gamma)\,\mathrm{dn}^2 u,$$
$$dq = -2(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\, du$$

(так, что всегда $u_0' > 0$, $u' > 0$) и

$$\mu^2 - q = \mu^2 - \alpha + (\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2 u = (\mu^2-\alpha)(1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Подставляя найденные выражения в ($26_1''$), получим

$$\frac{s}{\sqrt{\alpha-\gamma}\,(\mu^2-\alpha)}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 u} = I_3, \tag{31''}$$

откуда

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{-a_1}\,\tau}{r_0^2 + R_0\tau} = i\left[\frac{H'(ig)}{H(ig)}\,u + \frac{1}{2}\ln\frac{\theta(u-ig)}{\theta(u+ig)}\right]_{u_0}^{u} = U, \tag{32''}$$

где

$$\mathrm{sn}\,(g;\,K') = \sqrt{\frac{\lambda}{k^2+\lambda}} = \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\mu^2-\gamma}} \qquad (0 < g < K'). \tag{33''}$$

Формулы (43) § 15 сохраняют свой вид.

При $A \geqslant 0$ движение имеет характер $C_\infty - C_\infty$; при $A < 0$ траектории расположены между полупрямыми $\vartheta = \arccos\sqrt{\alpha}$, $\vartheta = \arccos\sqrt{\beta}$ и эллипсами $r = r_m$, $r = r_M$ и касаются этих линий (если одновременно R и Φ не обращаются в нуль). В случае соизмеримости $2iK\dfrac{H'(ig)}{H(ig)}$ и π движение будет периодическим.

При $A < 0$, $a_1 = AMr_0^4$, $R_0 = 0$ — движение по дуге эллипса.

II. СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА $P_2P_0P_1$ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ СИММЕТРИИ

17. Случай $B < 0$

Перейдем теперь к рассмотрению случая (II), предполагая сначала $B < 0$. Тогда по (26_2)

$$\pm\frac{1}{\sqrt{-8Bm^3}}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{(\mu^2-p^2)\sqrt{(p^2-\alpha)(p^2-\beta)}} = I, \tag{$26'_{\mathrm{II}}$}$$

где $p = \cos\vartheta$, $\alpha = b + \sqrt{b^2-2b+c}$, $\beta = b - \sqrt{b^2-2b+c}$, b и c даются формулой (24_2), $c = \dfrac{15}{16} - \dfrac{c_2^2}{2Bm} > \dfrac{15}{16}$ и при $c < 1$ и действительных α и β:

$$\alpha \geqslant 1 - \sqrt{1-c} > \frac{3}{4}, \quad \beta \leqslant 1 + \sqrt{1-c} < \frac{5}{4}.$$

1) $-\infty<\beta<0$ тогда $1>p_0^2\geqslant\alpha>c$, $-\infty<b<\frac{c}{2}$ и $-\frac{a_2}{BM^3}>1-c\nu^2$, так что $a_2>0$ и $s=+\sqrt{-\frac{a_2}{8Bm^3}}$.

Как и в случае (1) § 7 относительные траектории точки P_1 расположены между полупрямыми $\vartheta=0$ и $\vartheta=\arccos\sqrt{\alpha}<\arccos\sqrt{c}$.

Принимая

$$k^2=-\frac{\beta}{\alpha-\beta},\quad \lambda=\frac{\mu^2-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\operatorname{sn}^2 g},\quad p=+\sqrt{\beta+\frac{\alpha-\beta}{\operatorname{sn}^2 u}}=\frac{\sqrt{\alpha-\beta}\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}\text{[1]},$$

полагая вообще в формулах § 7 $\beta=0$ и заменяя γ, a_1 на β, a_2, получим в результате формулы (32_1), (34)—(37) и те же типы движений, что и в § 7.

18. Случай $\beta=0$

2) Пусть $\beta=0$; тогда $\alpha=2b=c$ и $-\frac{a_2}{BM^3}=1-c\nu^2$.

а) Если $1>p_0\geqslant\sqrt{\alpha}$, то $2b=c<1$ и $a_2>0$; полагая $p=\sqrt{\alpha}\operatorname{cosec} u$, $\sin g=\frac{\sqrt{\alpha}}{\mu}$, $\sin u_1=\sqrt{\alpha}$, получим заключения и формулы § 8 при $\gamma=0$.

б) Если $p_0=0$, то во все время движения $p=0$ $\left|\vartheta=\varphi=\frac{\pi}{2},\ \Phi=0,\ 2F=a_2=-BM^2\left(m_0+\frac{m}{8}\right)-M^2c_2^2\right|$ и связь $\varrho=\frac{r}{\sqrt{M}}$ с t дается формулой (18) вместе с (17), (17′) (прямолинейное расположение точек на оси OY, вращающейся около OX; неподвижная точка P_0 находится в центре инерции системы). При этом, при $c<1\,(\alpha<1)$ $a_2>0$, при $c=1\left(b=\frac{1}{2},\ \alpha=1\right)$ $-\frac{a_2}{BM^3}=1-\nu^2>0$ и при $c>1$ ($\alpha>1$, $a=2b=c>1$): $-\frac{a_2}{BM^3}=1-c\nu^2\gtreqqless 0$.

1а) При $R_0>|P|$ ($A\geqslant0$, $a_2\geqslant0$) и $A=0$, $R_0=\sqrt{a_2}$ ϱ изменяется от 0 (при $t=t_{c_1}<0$) до $+\infty$ (при $t=+\infty$).

1б) При $R_0<-|P|$ ($A\geqslant0$, $a_2\geqslant0$) и $A=0$, $R_0=-\sqrt{a_2}$ ϱ изменяется от $+\infty$ (при $t=-\infty$) до 0 (при $t=t_{c_2}>0$).

2) При $-P<R_0<+P$ ($A\geqslant0$, $a_2>0$ и $A<0$, $a_2\geqslant0$) ϱ изменяется от 0 (при $t=t_{c_1}<0$) до $\varrho_M=\sqrt{\frac{-h_2-\sqrt{h_2^2-AMa_2}}{M^2A}}\left(-\frac{a_2}{2h_2M}\text{ при }A=0\right)$ и снова убывает до 0 ($t=t_{c_2}>0$).

3а) $R_0=P>0$ ($A>0$); ϱ возрастает от 0 (при $t=t_{c_1}<0$) до $\varrho_a=\sqrt[4]{\frac{a_2}{AM^3}}$ ($t=+\infty$).

3б) $R_0=-P<0$ ($A>0$); ϱ убывает от $\sqrt[4]{\frac{a_2}{AM^3}}$ ($t=-\infty$) до 0 ($t=t_{c_2}>0$).

[1]) Очевидно, во всех случаях можем положить $p_0=\cos\vartheta_0\geqslant0$.

4) $R_0=P=-P=0$ ($A>0$, $a_2=cAMr_0^4$ и $A=0$, $a_2=0$); $\varrho=\varrho_a=\mathrm{const}$ (прямолинейная конфигурация относительного равновесия).

5а) $R_0=-P>0$ ($A>0$, $a_2\geqslant 0$); ϱ возрастает от ϱ_a ($t=-\infty$) до $+\infty$ ($t=+\infty$) ($a_2=h_2=0$; при $t\to-\infty$: $\varrho\to 0$).

5б) $R_0=P<0$ ($A>0$, $a_2\geqslant 0$); ϱ убывает от $+\infty$ ($t=-\infty$) до ϱ_a ($t=+\infty$) и при $a_2=0$, $h_2=0$ в этом случае имеем общее соударение при $t=+\infty$.

6) $P<R_0<-P$ ($A>0$, $a_2\geqslant 0$) и при $a_2<0$ ($A\geqslant 0$) ϱ изменяется от $+\infty$ ($t=-\infty$) до $\varrho_m=\sqrt{\dfrac{-h_2+\sqrt{h_2^2-AMa_2}}{M^2A}}$ $\left(-\dfrac{a_2}{2h_2M}\text{ при } A=0\right)$ и снова возрастает до $+\infty$ ($t=+\infty$).

7) При $A<0$ и $a_2<0$ ϱ осциллирует между ϱ_m и ϱ_M.

19. Случай $0<\beta<\alpha\leqslant 1$

3) Пусть $0<\beta<\alpha\leqslant 1$; тогда $c<1$, $\dfrac{c}{2}<b<1-\sqrt{1-c}$, $0<\beta<1-\sqrt{1-c}<\alpha<c$ и $1-c\nu^2>-\dfrac{a_2}{BM^3}>[1-(1-\sqrt{1-c})\nu^2]^2$, т. е. $a_2>0$.

Здесь, как и в § 9, могут иметь место два случая.

а) $p_0\geqslant\sqrt{\alpha}$ ($\alpha<1$); тогда $p\geqslant\sqrt{\alpha}$ и траектории, как и в случае 1 § 17, расположены между полупрямыми $\vartheta=0$ и $\vartheta=\arccos\sqrt{\alpha}>\arccos\sqrt{c}$.

Полагая

$$k^2=\frac{\beta}{\alpha},\quad p=\frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{sn}u},\quad \operatorname{sn}g=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\mu},\quad \operatorname{sn}u_1=\sqrt{\alpha},$$

получим заключения и формулы § 7 при $\gamma=0$.

б) $0\leqslant p_0\leqslant\sqrt{\beta}$ ($\alpha\leqslant 1$); траектории расположены между полупрямыми $\vartheta=\arccos\sqrt{\beta}$ и $\vartheta=\arccos(-\sqrt{\beta})$. Сохраняя значение $k^2=\dfrac{\beta}{\alpha}$, положим $p=\sqrt{\beta}\operatorname{sn}u$ ($0\leqslant u_0<K$ при $p_0'>0$, $u_0=K$ при $p_0'=0$ $(p_0=\sqrt{\beta})$ и $K<u_0\leqslant 2K$ при $p_0'<0$), $\lambda=\dfrac{\beta}{\mu^2}$, $\operatorname{sn}g=\dfrac{\sqrt{\lambda}}{K}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\mu}$, получим заключения и формулы случая (3б) § 9 при $\gamma=0$.

20. Случай $\beta=\alpha<1$

4) Пусть $0<\beta=\alpha<1$; тогда $c<1$, $\alpha=\beta=b=1-\sqrt{1-c}>\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{a_2}{BM^3}=[1-(1-\sqrt{1-c})\nu^2]^2>0$, т. е. $a_2>0$. В этом случае p изменяется монотонно.

а) $p_0 > \sqrt{a}$. Положив

$$p = \pm\sqrt{a}\,\mathrm{cth}\,u \quad (+ \text{ при } p_0' < 0 \text{ и } - \text{ при } p_0' > 0),$$

$$\mathrm{th}\,g = \frac{\sqrt{a}}{\mu}, \quad \mathrm{th}\,u_1 = \sqrt{a} \quad (u_1 > g)^{1)},$$

получим формулы и заключения случая 6(а) § 12 и при $\gamma=0$, в частности

$$\begin{aligned}\frac{r_0^2+(R_0+\sqrt{a_2})\tau}{r_0^2+(R_0-\sqrt{a_2})\tau} &= \frac{\mathrm{sh}\,(u-g)\,\mathrm{sh}\,(u_0+g)}{\mathrm{sh}\,(u+g)\,\mathrm{sh}\,(u_0-g)}e^{\mathrm{cth}\,g\,(u-u_0)} = \\ &= \left|\frac{(\mu-p)\,(\mu+p_0)}{(\mu+p)\,(\mu-p_0)}\right|^{\mp 1}\left|\frac{(p+\sqrt{a})\,(p_0-\sqrt{a})}{(p-\sqrt{a})\,(p_0+\sqrt{a})}\right|^{\mp\frac{\mu}{\sqrt{a}}\;2)}.\end{aligned} \tag{45а}$$

б) $p_0=\sqrt{a}=\sqrt{1-\sqrt{1-c}}$; тогда $p'=0$ и $p=\mathrm{const}=p_0=\sqrt{a}$; связь r с t дается формулой (18), вместе с (17), (17′) при $a_2>0$ и получим случаи (1—6) 2(б) § 18, как и в случае 6(б) § 12.

в) $p_0<\sqrt{a}$; тогда траектории расположены между полупрямыми $\vartheta=\arccos\sqrt{a}$ и $\vartheta=\arccos(-\sqrt{a})$. Положив $p=\pm\sqrt{a}\,\mathrm{th}\,u$ ($+$ и $u_0 \geqslant 0$ при $p_0' \geqslant 0$, и $-$ и $u_0'<0$ при $p_0'<0$), $\mathrm{th}\,g=\frac{\sqrt{a}}{\mu}$, получим формулы и заключения случая 6(в) § 12 при $\gamma=0$ [3]), так что

$$\begin{aligned}\frac{r_0^2+(R_0+\sqrt{a_2})\tau}{r_0^2+(R_0-\sqrt{a_2})\tau} &= \frac{\mathrm{ch}\,(u-g)\,\mathrm{ch}\,(u_0+g)}{\mathrm{ch}\,(u+g)\,\mathrm{ch}\,(u_0-g)}e^{\mathrm{cth}\,g\,(u-u_0)} = \\ &= \left|\frac{(\mu-p)\,(\mu+p_0)}{(\mu+p)\,(\mu-p_0)}\right|^{\pm 1}\left|\frac{(\sqrt{a}+p)\,(\sqrt{a}-p_0)}{(\sqrt{a}-p)\,(\sqrt{a}+p_0)}\right|^{\pm\frac{\mu}{\sqrt{a}}\;4)}.\end{aligned} \tag{45в}$$

21. Случай $\alpha=\beta=1$

5) Пусть $\alpha=\beta=1$; тогда $b=1, c=1$ и $-\frac{a_2}{BM^3}=(1-\nu^2)^2>0$ и p изменяется монотонно. Этот случай — предельный для 4(в) § 20 при $\alpha\to 1$. Из (43в) [или прямо из $(26'_{\mathrm{II}})$] получим

$$\frac{r_0^2+(R_0+\sqrt{a_2})\tau}{r_0^2+(R_0-\sqrt{a_2})\tau} = \left|\frac{(\mu-p)\,(\mu+p_0)}{(\mu+p)\,(\mu-p_0)}\left(\frac{(1+p)\,(1-p_0)}{(1-p)\,(1+p_0)}\right)^{\mu}\right|^{\pm 1\;4)}. \tag{46}$$

В случаях (1—6) § 9 при $A>0$ будем иметь движения следующего характера $\left(\text{причем при } r\to+0\ p\to\pm 1, \text{ а при } r\to r_a=\sqrt[4]{\frac{a_2}{AM}}\ p\to 0\right)$:

1) $u_0<u_1$ при $p_0'>0$ и $u_0>u_1$ при $p_0'<0$, так что всегда $u'>0$.

2) Верхний знак при $p_0'>0$ и нижний — при $p_0'<0$.

3) Но в случае 4 § 9 при $t\to\pm\infty$ P_1 асимптотически приближается к точкам $(r_a, \arccos\sqrt{a})$ и $(r_a, \arccos-\sqrt{a})$.

4) Верхний знак при $p_0'>0$ и нижний — при $p_0'<0$.

1а) $C_0 - C_\infty$;

1б) $C_\infty - C_0$;

2) $C_0 - C_0$;

3а) $C_0 - C_{ax}$ (парное соударение в асимптотической точке при $t=+\infty$);

3б) $C_a - C_0$ ($y \to 0$ при $t \to -\infty$);

4) движение по полуэллипсу, с асимптотическим приближением к вершинам большой оси при $t \to \pm\infty$; парные соударения при $t=\pm\infty$ так же, как и в случаях (5а), (5б);

5а) $C_{ax} - C_\infty$;

5б) $C_\infty - C_{ax}$;

6) $C_\infty - C_\infty$.

При $A=0$ в случаях 1а, 1б асимптота не проходит через O; в 3а ($R_0=\sqrt{a_2}$) и 3б ($R_0=-\sqrt{a_2}$): $C_0-C_\infty^{(p)}$ и $C_\infty^{(p)}-C_0$. При $A<0$ возможен только случай 2: C_0-C_0.

22. Случай комплексных α и β

6) α и β — комплексные сопряженные; тогда $c<1$,

$$\frac{3}{4}<1-\sqrt{1-c}<b<1+\sqrt{1-c}<\frac{5}{4}$$

и

$$\left[1-(1-\sqrt{1-c})\nu^2\right]^2>-\frac{a_2}{BM^3}>\left[1-(1+\sqrt{1-c})\nu^2\right]^2.$$

Изображения α и β в комплексной плоскости располагаются на полуокружностях с центром в точке (1,0) и радиусом, равным $\sqrt{1-c}$. Во все время движения p' в нуль не обращается, и p изменяется монотонно.

Полагая

$$p=\pm\sqrt[4]{n}\,\frac{\operatorname{sn}2u}{1+\operatorname{cn}2u}\quad (+\text{ при } p_0'>0 \text{ и } -\text{ при } p_0'<0),$$

$$\operatorname{cn}2g=\frac{\mu^2-\sqrt{n}}{\mu^2+\sqrt{n}}\quad (0<g<K),$$

$$\operatorname{cn}2u_1=\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\quad \left(0<u_1\leqslant\frac{K}{2}\text{ при }\sqrt{n}\geqslant 1\text{ и }\frac{K}{2}<u_1<K\text{ при }n<1\right),$$

так что $-u_1<u<+u_1$, и выбирая u_0 так, чтобы всегда было $u_0'>0$ ($u'>0$), получим формулы и заключения случая 7 § 13 при $\gamma=0$.

23. Случай $0<\beta<1<\alpha$

7) Пусть $0<\beta<1<\alpha$; тогда $c>1$, $c<2b<+\infty$, $0<\beta<1<c<\alpha<$ $<2b<+\infty$, $-\frac{a_2}{BM^3}<1-c\nu^2$ и во все время движения, как и в случае 3(б) § 19: $-\sqrt{\beta}\leqslant p\leqslant\sqrt{\beta}$.

а) Пусть $a_2>0$; тогда $\mu^2>\alpha$ и применимы все рассуждения случая 3(б) § 19.

б) Пусть $a_2=0$; тогда $\alpha=\mu^2$, $\beta=2b-\alpha=\dfrac{\mu^2-c}{\mu^2-1}$ и в формулах 3(б) § 19 (3(б) § 9 при $\gamma=0$) будем иметь $\lambda=\dfrac{\beta}{\mu^2}=\dfrac{\beta}{\alpha}=k^2$, а потому, как и в случае 9(б'') § 15, получим ($32_{9б''}$) при $\gamma=0$ и (41) § 14.

Получим для характеристики движения случаи § 9 (при $A>0$).

1а) $R_0>\sqrt{AM}\,r_0^2$: S_0-C_∞, 1б) $R_0<-\sqrt{AM}\,r_0^2$: $C_\infty-S_0$,

5а) $R_0=\sqrt{AM}\,r_0^2$: S_0-C_∞ (причем асимптотической точкой при $t=-\infty$ является $r=0$),

5б) $R_0=-\sqrt{AM}\,r_0^2$: $C_\infty-S_0$ (причем при $t\to\infty$ $r\to 0$),

6) $-\sqrt{AM}\,r_0^2<R_0<\sqrt{AM}\,r_0^2$: $C_\infty-C_\infty$.

При $A=0$:

1а) $R_0>0$: S_0-C_∞ [1]),

1б) $R_0<0$: $C_\infty-S_0$ [1]),

4) $R_0=0$: $r=r_0=\mathrm{const}$ (колебательное движение по дуге эллипса).

Наконец, при $A<0$. S_0-S_0.

в) $a_2<0$; тогда $\alpha>\mu^2$ и в формулах случая 3(б) § 19 (3(б) § 9 при $\gamma=0$) получим $k^2<\lambda=\dfrac{\beta}{\mu^2}<1$. Поэтому придем к формулам ($32_{9в}$) и (43) § 15.

При $A\geqslant 0$: $C_\infty-C_\infty$. При $A<0$ имеем заключение конца § 16, с заменой функции $H(ig)$ на $H_1(ig)$.

24. Случай $1<\beta=\alpha$

8) Пусть $1<\beta=\alpha$; тогда $c<1$, $\alpha=\beta=b=1+\sqrt{1-c}$, $-\dfrac{a_2}{BM^3}=$ $=(1-b\nu^2)^2=\dfrac{(\mu^2-1-\sqrt{1-c})^2}{\mu^4}$, $p'\neq 0$ и p изменяется монотонно.

а) $\alpha=\beta\neq\mu^2$ ($a_2>0$). Полагая, как и в случае 4(в) § 20: $P=\pm\sqrt{\alpha}\,\mathrm{th}\,u$ ($+$ и $u_0\geqslant 0$ при $p_0'>0$, $-$ и $u_0\leqslant 0$ при $p_0'<0$), $\mathrm{th}\,g=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\mu}$, получим ($32_{6в}$) при $\alpha<\mu^2$ и $\gamma=0$, и ту же формулу при $\alpha>\mu^2$ (при $\gamma=0$), с переменой ролей $\mathrm{sh}\,g$, $\mathrm{ch}\,g$ (и u на $-u$), т. е.:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{sh}\,(g+u)}{\mathrm{sh}\,(g-u)}-\mathrm{th}\,gu\Bigg|_{u_0}^{u}=$$

$$=\mp\frac{1}{2}\ln\frac{\mu-p}{\mu+p}\left(\frac{\sqrt{\alpha}+p}{\sqrt{\alpha}-p}\right)^{\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}}\Bigg|_{p_0}^{p}{}^{2)}=U\quad\left(\mu^2<\alpha;\ \mathrm{th}\,g=\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Полагая $\mathrm{th}\,u_1=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ $(-u_1<u<u_1)$, получим случаи 1—6 § 7.

---

[1]) Но асимптота при C_∞ не проходит через O.

[2]) Верхний знак при $p_0'>0$ и нижний — при $p_0'<0$.

б) $\alpha=\beta=\mu^2$ $(a_2=0)$. При помощи той же подстановки получим $(32_{8б})$ (где $\gamma=0$):

$$\frac{\tau}{r_0^2+R_0\tau}=\frac{1}{2\mu^3\sqrt{-8Bm^3}}\left(u+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2u\right)\Bigg|_{u_0}^{u}=$$

$$=U=\pm\frac{1}{4\sqrt{-BM^3}}\left(\frac{2\mu p}{\mu^2-p^2}+\ln\frac{\mu+p}{\mu-p}\right)\Bigg|_{p_0}^{p}\text{[1]}.$$

Формулы (41), (42) и заключения пункта (б) случая 8 § 14 сохраняют силу.

25. Случай $\alpha>\beta\geqslant 1$

9) Пусть $\alpha>\beta\geqslant1$; тогда $c\leqslant1$ и $1\leqslant\beta<1+\sqrt{1-c}<b<\alpha\leqslant 2b-1<+\infty$; $-\frac{a_2}{BM^3}<\left[1-(1+\sqrt{1-c})\nu^2\right]^2$ $\left(\text{при } \beta=c=1\text{: } -\frac{a_2}{BM^3}<(1-\nu^2)^2\right)$. Во все время движения p' в нуль не обращается и p изменяется монотонно между -1 и $+1$.

Положим, как и в случае 3(б) § 19, $k^2=\frac{\beta}{\alpha}$, $p=\pm\sqrt{\beta}\operatorname{sn}u$ ($+$ и $0\leqslant u_0<u_1<K$ при $p_0'>0$, $-$ и $-u_1<u_0\leqslant0$ при $p_0'<0$), $\operatorname{sn}u_1=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, так что $-u_1<u<u_1$.

а) $a_2>0$; тогда α и β одновременно оба $>\mu^2$ или оба $<\mu^2$ $\left[b<\frac{\mu^2-c}{2(\mu^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\mu^2+1+\frac{1-c}{\mu^2-1}\right)\right]$.

а′) Если $\beta<\alpha<\mu^2(1+\sqrt{1-c}<b<\mu^2)$, то $\lambda=\frac{\beta}{\mu^2}<k^2$ и получим формулы (32_3), (33_3) при $\gamma=0$ [2].

а″) $\mu^2<\beta<\alpha$ $[\mu^2<1+\sqrt{1-c}<b]$; тогда $\lambda>1$ и положив $\operatorname{sn}g=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\mu}{\sqrt{\beta}}$, получим $(32_{9а})$ § 15 и для характеристики движения — случаи (1—6) § 7 [3].

б) $a_2=0$ $\left[s=0,\ b=\frac{\mu^4-c}{2(\mu^2-1)}\right]$.

б′) $\mu^2=\beta<\alpha$; тогда $\alpha=1+\frac{1-c}{\mu^2-1}$ $(\mu^2<1+\sqrt{1-c})$, $\lambda=1$ и получим $(32_{9б'})$ § 15 (при $\gamma=0$).

б″) $1<\beta<\alpha=\mu^2$; тогда $\beta=1+\frac{1-c}{\mu^2-1}$ $(\mu^2>1+\sqrt{1-c})$ и $\lambda=k^2$; получим $(32_{9б''})$, где $\gamma=0$.

Формулы (41) сохраняют свой вид и при обозначениях (42) опять имеем случаи 1—6 § 7, причем при $A=0$, в случае (1), $R_0=0$, $h=0$

---

[1] Верхний знак при $p_0'>0$ и нижний — при $p_0'<0$.

[2] Но при $A=0$ в случаях ($\beta=1$, $c=1$) (3а), (3б) § 7: $C_x-\overline{C}_\infty$ и $\overline{C}_\infty-C_x$.

[3] Но при $\beta=c=1$ (а′) C_x пересекает ось OX не под прямым углом, а под произвольным.

получим движение $(C_x - C_x)$ по дуге эллипса $r=r_0=\text{const}$ (что при $A>0$, $a=0$ невозможно).

в) $a_2<0$; тогда $1<\beta<\mu^2<\alpha$ и $k^2<\lambda<1$; получим (31_9) при $\gamma=0$, $(32_{9в})$, (43) и заключения § 15.

26. Случай $B>0$

Если в случае (II) $B>0$, то по (26_2) получим

$$\pm\frac{1}{\sqrt{8Bm^3}}\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{(\mu^2-p^2)\sqrt{(\alpha-p^2)(p^2-\beta)}}=I, \qquad (26_2'')$$

где $\beta<\alpha<1$ и α, β выражаются по формуле (27), где b и c даются формулой (24_2), причем

$$-\infty<c=\frac{15}{16}-\frac{c_2^2}{2Bm}<\frac{15}{16},$$

$$-\frac{a_2}{8Bm^3}=\mu^2(\mu^4-2b\mu^2+2b-c)=\mu^2(\mu^2-\alpha)(\mu^2-\beta)>0;$$

следовательно, $a_2<0$ и $S=\sqrt{-\frac{a_2}{8Bm^3}}=\mu\sqrt{(\mu^2-\alpha)(\mu^2-\beta)}$.

Очевидно, что α, β не могут быть комплексными или оба отрицательными[1]. В этом случае невозможны соударения точек, и r^2 имеет минимум

$$r_m^2=\frac{-h_2+\sqrt{h_2^2-a_2AM}}{AM}\quad (A\neq 0),$$

или

$$r_m^2=-\frac{a_2}{2h_2}=-\frac{a_2r_0^2}{-a_2+R_0^2}\quad (A=0).$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1) $\beta\leqslant 0$, $\alpha=0$ $\left(2b=c=\beta\leqslant 0;\ \frac{a_2}{BM^3}=-1+c\nu^2\right)$; тогда $p=0$ $\left(\vartheta=\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ и конфигурация точек — прямолинейная. Для характеристики движения получим случаи 6 ($A\geqslant 0$) и 7 ($A<0$) § 18.

2) $-\infty<\beta<0<\alpha<1$ ($-\infty<2b<c$ и $\alpha>c$), $-\infty<\frac{a_2}{BM^3}<-1+c\nu^2$; тогда $-\sqrt{\alpha}\leqslant p\leqslant+\sqrt{\alpha}$. Полагая

$$k^2=\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\quad \lambda=\frac{\alpha}{\mu^2-\alpha},\quad p=\sqrt{\alpha}\,\text{cn}\,u$$

$$(-K\leqslant u_0<0 \text{ при } p_0'>0 \text{ и } 0\leqslant u_0\leqslant K \text{ при } p_0'\leqslant 0), \qquad (30_2''),$$

---

[1] $b'\leqslant 1-\sqrt{1-c}$ и при $c<0:2b<c$.

найдем

$$\alpha - p^2 = \alpha\,\mathrm{sn}^2 u, \quad p^2 - \beta = \alpha - \beta - \alpha\,\mathrm{sn}^2 u = (\alpha - \beta)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

$$dp = -\sqrt{\alpha}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,du \quad (u_0' > 0,\ u' > 0),$$

$$\mu^2 - p^2 = \mu^2 - \alpha\,\mathrm{cn}^2 u = \mu^2 - \alpha + \alpha\,\mathrm{sn}^2 u = (\mu^2 - \alpha)(1 + \lambda\,\mathrm{sn}^2 u).$$

Подставляя полученные выражения в ($26_2''$), будем иметь

$$\frac{s}{(\mu^2 - \alpha)\sqrt{\alpha - \beta}} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{1 + \lambda\,\mathrm{sn}^2 u} = I_3, \tag{$31_2''$}$$

откуда

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-a_2}\,\tau}{r_0^2 + R_0\tau} = i\left[\frac{H'(ig)}{H(ig)}u + \frac{1}{2}\ln\frac{\theta(u - ig)}{\theta(u + ig)}\right]_{u_0}^{u} = U, \tag{$32_2''$}$$

где $\mathrm{sn}\,(g; k') = \sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{\mu^2 - \beta}}$.

Формулы (43) § 15 сохраняются, и движение имеет характер, описанный в конце § 16.

3) $\beta = 0 < \alpha < 1$; тогда $0 < \alpha = 2b = c < \dfrac{15}{16}\left(\dfrac{a_2}{BM^3} = -1 + c\nu^2,\ s = \mu^2\sqrt{\mu^2 - \alpha}\right)$.

а) При $p_0 = 0$ должны иметь $p = 0$ и возвращаемся к случаю (1).

б) При $0 < p_0 \leqslant \sqrt{\alpha}$ во все время движения должно быть $0 < p \leqslant \sqrt{\alpha}$, и начиная с некоторого момента p изменяется монотонно.

Полагая $p = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\mathrm{ch}\,u}$ ($u_0 < 0$ при $p_0' > 0$ и $u_0 \geqslant 0$ при $p_0' \leqslant 0$), непосредственно из ($26_2''$) или по формулам случая (2) при $k^2 = 1$[1]), получим

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-a_2}\,\tau}{r_0^2 + R_0\tau} = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha}{\alpha}}\,u + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu^2 - \alpha}}\,\mathrm{th}\,u\right)\Bigg|_{u_0}^{u} = U =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha}{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha - p^2}}{p} + \operatorname{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha - p^2}{\mu^2 - \alpha}}\right)\right]_{p_0}^{p}.$$

При $A \geqslant 0$ движение имеет характер $C_\infty - C_\infty$, а при $A < 0$ траектории (волнообразного вида) расположены между полупрямыми $\vartheta = \arccos\sqrt{\alpha}$, $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ и эллипсами $r = r_m$, $r = r_M$, поочередно касаются (если одновременно R и Φ не обращаются в нуль) этих эллипсов и имеют α- или ω-предельной траекторией отрезок оси OY, заключенный между этими эллипсами, или $r = r_m = r_M$, и асимптотически приближаются к оси OY.

---

[1]) Так, что $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{sn}\,(g; k')$, $i\dfrac{H'(ig)}{H(ig)}$, $\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{\theta(u - ig)}{\theta(u + ig)}$ переходят соответственно в $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,u}$, $\sin g = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\mu}$, $\mathrm{ctg}\,g = \sqrt{\dfrac{\mu^2 - \alpha}{\alpha}}$, $\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{\mathrm{ch}(u - ig)}{\mathrm{ch}(u + ig)} = \dfrac{i}{2}\ln\operatorname{arc\,tg}(\mathrm{tg}\,g\ \mathrm{th}\,u)$.

4) $0<\beta=\alpha<1$; тогда $c>0$ и $\alpha=\beta=b=1-\sqrt{1-c}$, $\frac{a_2}{BM^3}=$ $=-[1-(1-\sqrt{1-c})\nu^2]^2$.

В этом случае $p=\mathrm{const}=+\sqrt{1-\sqrt{1-c}}$ и движение гомографическое, описанное в § 16 (случай 1).

5) $0<\beta<\alpha<1$; тогда $0<\beta<1-\sqrt{1-c}<\alpha<c<\frac{15}{16}\left(\frac{c}{2}<b<1-\sqrt{1-c}\right)$, $-1-c\nu^2<\frac{a_2}{BM^3}<-[1-(1-\sqrt{1-c})\nu^2]^2$ и во все время движения $\sqrt{\beta}\leqslant p\leqslant\sqrt{\alpha}$, так что траектории расположены между полупрямыми $\vartheta=\arccos\sqrt{\alpha}$ и $\vartheta=\arccos\sqrt{\beta}$.

Полагая $p=\sqrt{\alpha}\,\mathrm{dn}\,u$, получим заключения и формулы случая 2 § 16 при $\gamma=0$.

27. Плоское движение

Наконец, при $\omega_\xi=\omega_\eta=\omega_\zeta=0$ $(c_1=c_2=0)$ будем иметь плоское движение, при котором точка P_0 движется по неподвижной прямой (OX), а траектории P_1, P_2 симметричны относительно этой прямой. Полагая в формулах случая II $c_2=0\left(c=\frac{15}{16}\right)$, получим соответствующие формулы плоского движения; при этом случаи (5), (7) II и (1) II′ перестают быть возможными, а в случае II_{26} и случай 7. При этом будем иметь:

II. 1) $-\infty<\beta<0<\frac{15}{16}<\alpha<1$, $-\infty<b<\frac{15}{32}$;

2) $\beta=0$, $\alpha=2b=\frac{15}{16}$;

3) $0<\beta<\frac{3}{4}<\alpha<\frac{15}{16}$, $\frac{15}{32}<b<\frac{3}{4}$;

4) $\alpha=\beta=b=\frac{3}{4}$;

6) $\frac{3}{4}<b<\frac{5}{4}$;

8) $\alpha=\beta=b=\frac{5}{4}$;

9) $1<\beta<\frac{5}{4}<b<\alpha<2b-1<+\infty$;

II′. 2) $-\infty<\beta<0<\frac{15}{16}<\alpha<1$;

3) $\beta=0$, $\alpha=2b=c=\frac{15}{16}$;

4) $\alpha=\beta=b=\frac{3}{4}$; 5) $0<\beta<\frac{3}{4}<\alpha<\frac{15}{16}$.

В случаях II 4_6, II_4' конфигурация — эквидистантная.

Поступила 20.I 1951 г. Киев.

[1]) Верхний знак при $p'<0$ и нижний — при $p'>0$.