Теорема о расщепляемости J-алгебр

В. Г. Ашкинузе

§ 1. Предварительные замечания

Конечная коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ над полем P называется *J-алгеброй,* если для любых a, b из $\mathfrak{A}$ выполняется равенство:

$$a^2\,(ba) = (a^2b)\,a. \tag{1}$$

Если $\mathfrak{A}$ — ассоциативная конечная алгебра с умножением $a \times b$ над полем P характеристики $\neq 2$, то $\mathfrak{A}$ будет J-алгеброй относительно умножения $ab = \frac{1}{2}\,(a \times b + b \times a)$. J-алгебра $\mathfrak{A}$ над полем P характеристики $\neq 2$ называется *представимой,* если существует ассоциативная алгебра $\mathfrak{M}$ над P, содержащая линейное подпространство $\mathfrak{B}$, замкнутое относительно операции $ab = \frac{1}{2}\,(a \times b + b \times a)$ и являющееся относительно умножения ab J-алгеброй, изоморфной $\mathfrak{A}$.

В дальнейшем характеристика поля P будет предполагаться равной нулю. В этом случае имеют место следующие утверждения, доказанные Албертом [1].

1. J-алгебра с одним образующим ассоциативна.
2. Тождеству (1) эквивалентно следующее:

$$[a(bc)]d + [a(bd)]c + [a(cd)]b = (ab)\,(cd) + (ac)\,(bd) + (ad)\,(bc). \tag{2}$$

Из (2) следуют тождества

$$[a(bc)]d + [a(bd)]c + [a(cd)]b = [b(ac)]d + [b(ad)]c + [b(cd)]a, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} 2(ab)\,(ad) &= -\,a^2(bd) + 2[b(ad)]a + (ba^2)\,d = \\ &= -\,a^2(bd) + [a(ab)]d + [a(ad)]b + [a(bd)]a \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

3. Если e — идемпотент J-алгебры $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}_e^{(\lambda)}$ $\left(\lambda = 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ — совокупность тех $a \in \mathfrak{A}$, для которых $ea = \lambda a$, то $\mathfrak{A}$ будет прямой суммой подпространств $\mathfrak{A}_e^{(\lambda)}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_e^{(0)} + \mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})} + \mathfrak{A}_e^{(1)},$$

причем $\mathfrak{A}_e^{(0)}$ и $\mathfrak{A}_e^{(1)}$ — ортогональные подалгебры и

$$\mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})^2} \subseteq \mathfrak{A}_e^{(0)} + \mathfrak{A}_e^{(1)}, \quad \mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})}\mathfrak{A}_e^{(0)} \subseteq \mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})}, \quad \mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})}\mathfrak{A}_e^{(1)} \subseteq \mathfrak{A}_e^{(\frac{1}{2})}. \tag{5}$$

4. Пусть $\mathfrak{A}$ будет J-алгебра с единицей e. Тогда e разлагается в сумму попарно ортогональных и далее не разложимых идемпотентов:

$$e = e_1 + \ldots + e_t.$$

Число t является инвариантом алгебры $\mathfrak{A}$ и называется ее *степенью.* При этом $\mathfrak{A}$ разлагается в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{A} = \sum_{i,\,j=1}^{t}{}' \mathfrak{A}_{ij} \qquad (\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji}), \tag{6}$$

где $\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{A}_{e_i}^{(1)}$, $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{e_i}^{(\frac{1}{2})} \cap \mathfrak{A}_{e_j}^{(\frac{1}{2})}$ при $i \neq j$.

Если i, j, k, l все различны, то

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{A}_{ii}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{ii}, \quad \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{jj} = 0, \quad \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{jk} = 0 \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} = 0, \quad \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jk} \subseteq \mathfrak{A}_{ik}, \quad \mathfrak{A}_{ij}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{jj} \end{matrix}\right\}. \tag{7}$$

5. Для любой J-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей e существует такое конечное расширение R поля P, что в алгебре $\mathfrak{A}_R$ $e = e_1 + \ldots + e_t$, где e_i — попарно ортогональные идемпотенты, и ранг каждой из подалгебр $\mathfrak{A}_{e_i}^{(1)}$ равен 1.

6. J-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *нильпотентной,* если для некоторого натурального числа k всякое произведение из k элементов алгебры $\mathfrak{A}$ равно нулю. Всякая J-алгебра содержит единственный максимальный нильпотентный идеал $\mathfrak{N}$, называемый *радикалом* $\mathfrak{A}$. Фактор-алгебра $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ единственным образом разлагается в прямую сумму простых J-алгебр.

7. Для любого идемпотента $e \in \mathfrak{A}$ радикал подалгебры $\mathfrak{A}_e^{(1)}$ равен $\mathfrak{A}_e^{(1)} \cap \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — радикал алгебры $\mathfrak{A}$.

8. Если $\mathfrak{A}$ — J-алгебра над полем P и R — расширение поля P, то радикал алгебры $\mathfrak{A}_R$ равен $\mathfrak{N}_R$, где $\mathfrak{N}$ — радикал $\mathfrak{A}$.

9. Простые J-алгебры следующих пяти типов называются *разложимыми* (над полем P).

I. J-алгебры с базисом

$$e,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{s+1} \quad (s > 0) \tag{*}$$

и таблицей умножения

$$e^2 = e, \quad eu_i = u_i, \quad u_iu_j = \delta_{ij}e \tag{8}$$

или, что то же самое, J-алгебры с базисом

$$e_1,\ e_2,\ u_2, \ldots,\ u_{s+1} \tag{**}$$

и таблицей умножения

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1e_2 = 0, \quad e_1u_i = e_2u_i = \frac{1}{2}u_i, \quad u_iu_j = \delta_{ij}\ (e_1 + e_2). \tag{9}$$

Базис (**) получается из базиса (*) с помощью преобразования

$$e_1 = \frac{e + u_1}{2}, \quad e_2 = \frac{e - u_1}{2}. \tag{10}$$

II. J-алгебра всех симметрических матриц порядка $t > 2$ с коэфициентами из P.

III. J-алгебра всех матриц порядка $t > 2$ с коэфициентами из P.

IV. J-алгебра $\mathfrak{C}_t$ всех I-симметрических матриц $a = a^I$ порядка $2t$ с коэфициентами из P. Здесь I есть инволюция в ассоциативной алгебре $\mathfrak{M}_{2t}$:

$$a^I = Q a' Q^{-1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V. J-алгебра D всех эрмитовых матриц порядка 3 с коэфициентами из алгебры Кэли над полем P. Под алгеброй Кэли мы понимаем здесь альтернативную алгебру K ранга 8 над полем P с базисом $a_0, a_1, \ldots, a_7$ и таблицей умножения:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	$-a_0$	a_3	$-a_2$	a_5	$-a_4$	a_7	$-a_6$
a_2	a_2	$-a_3$	$-a_0$	a_1	$-a_6$	a_7	a_4	$-a_5$
a_3	a_3	a_2	$-a_1$	$-a_0$	a_7	a_6	$-a_5$	$-a_4$
a_4	a_4	$-a_5$	a_6	$-a_7$	$-a_0$	a_1	$-a_2$	a_3
a_5	a_5	a_4	$-a_7$	$-a_6$	$-a_1$	$-a_0$	a_3	a_2
a_6	a_6	$-a_7$	$-a_4$	a_5	a_2	$-a_3$	$-a_0$	a_1
a_7	a_7	a_6	a_5	a_4	$-a_3$	$-a_2$	$-a_1$	$-a_0$

В K определяется инволюция $x \to \bar{x}$ следующим образом:

$$x = \sum_{i=0}^{7} x_i a_i \to \bar{x} = x_0 a_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i a_i.$$

Степени разложимых J-алгебр типов I, II—IV и V равны соответственно 2, t и 3.

10. Если e — примитивный (т. е. не разложимый в сумму попарно ортогональных идемпотентов) идемпотент разложимой J-алгебры $\mathfrak{A}$, то подалгебра $\mathfrak{A}_e^{(1)}$ имеет ранг 1.

11. J-алгебра $\mathfrak{A}$ над полем P называется *центрально простой,* если при всяком конечном расширении R поля P $\mathfrak{A}_R$ есть простая J-алгебра. Для всякой центрально простой J-алгебры $\mathfrak{A}$ существует *поле разложения,* т. е. такое конечное расширение R поля P, что $\mathfrak{A}_R$ есть разложимая J-алгебра.

Мы скажем, что J-алгебра $\mathfrak{A}$ *расщепляема,* если $\mathfrak{A}$ есть полупрямая сумма: $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}+\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}$ — подалгебра, изоморфная $\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$. Как и в ассоциативном случае, для расщепляемости J-алгебры $\mathfrak{A}$ достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ содержала подалгебру $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$.

Как показал Алберт [2], всякая представимая J-алгебра над полем P характеристики 0 расщепляема. В настоящей работе методы Алберта применяются к общему случаю произвольной J-алгебры. Будет доказана следующая теорема.

Всякая J-алгебра над полем R характеристики 0 расщепляема, т. е. является полупрямой суммой своего радикала $\mathfrak{R}$ и некоторой подалгебры, изоморфной фактор-алгебре $\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$.

Обозначения. Через $\mathfrak{R}$ всюду в дальнейшем будет обозначаться радикал J-алгебры $\mathfrak{A}$. Если $a\in\mathfrak{A}$ (или $A\subseteq\mathfrak{A}$), то $\bar{a}$ $(\bar{A})$ будет означать образ элемента a (соответственно множества A) при естественном гомоморфизме $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$.

§ 2. Случай, когда $\mathfrak{A}$ содержит единицу, а фактор-алгебра $\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ является разложимой J-алгеброй степени 2

Пусть $\mathfrak{A}$ — J-алгебра с единицей e.

Лемма 1. *Существует такой полином $f(x)$ с коэфициентами из P, что для любого $a\in\mathfrak{A}$, для которого $\bar{a}^2=\bar{e}$, элемент $b=af(a^2)$ обладает свойствами $\bar{b}=\bar{a}$, $b^2=e$.*

Доказательство. Покажем, что для любого натурального n существует такой полином $f_n(x)$, что $f_n(1)=1$ и $xf_n^2(x)-1$ делится на $(x-1)^n$. В самом деле, можно положить $f_1(x)=1$. Если уже найден $f_i(x)$, то, полагая $g_i=xf_i-1$, $f_{i+1}=f_i-\frac{1}{2}g_i$, получим полином $f_{i+1}(x)$, удовлетворяющий поставленным выше условиям для $n=i+1$. Действительно, очевидно, что $f_{i+1}(1)=1$. Далее, так как $g_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (x-1)^i)$, то

$$xf_{i+1}-1=xf_i^2-xf_ig_i-\frac{1}{4}xg_i^2-1\equiv xf_i^2-1-xf_ig_i \qquad (\mathrm{mod}\ (x-1)^{i+1}).$$

Но

$$xf_i^2-1-xf_ig_i=g_i(1-xf_i)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (x-1)^{i+1}),$$

так как

$$1-xf_i \equiv 0 \pmod{x-1}.$$

Положим теперь $f(x)=f_k(x)$, где натуральное число k выбрано так, чтобы было $y^k=0$ для любого $y \in \mathfrak{N}$. Тогда $\overline{f(a^2)}=\overline{f(e)}=\bar{e}$ и $\bar{b}=\bar{a}\overline{f(a^2)}=\bar{a}$.

Далее, $(a^2-e)^k=y^k=0$. В силу выбора $f(x)$:

$$x^2 f^2(x^2)-1=(x^2-1)^k \varphi(x),$$

откуда $b^2-e=a^2f^2(a^2)-e=(a^2-e)^k\varphi(a)=0$, т. е. $b^2=e$, и лемма 1 доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_0=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ есть разложимая J-алгебра степени 2 над полем P. Тогда $\mathfrak{A}_0$ имеет базис $e_0=\bar{e}$, $u_{01}, \ldots, u_{0q}$ $(q>1)$ с таблицей умножения $e_0u_{0i}=u_{0i}$, $e_0^2=e_0$, $u_{0i}u_{0j}=\delta_{ij}e_0$. Будем выбирать в $\mathfrak{A}$ систему элементов $u_1, u_2, \ldots, u_q$ так, чтобы было $\bar{u}_i=u_{0i}$, $u_iu_j=\delta_{ij}e$. Лемма 1 дает возможность выбрать элемент $u_1 \in \mathfrak{A}$ так, что $\bar{u}_1=u_{01}$, $u_1^2=e$. Допустим, что уже выбраны элементы $u_1, \ldots, u_p$ $(1 \leqslant p<q)$ так, что $\bar{u}_i=u_{0i}$, $u_iu_j=\delta_{ij}e$ $(i, j=1, \ldots, p)$. Возьмем в смежном классе $u_{0p+1} \in \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}=\mathfrak{A}_0$ произвольного представителя a и положим $b=a-u_1(u_1a)$.

Тождество (2) дает:

$$2[u_1(u_1 a)]u_1=-au_1^3+3u_1^2(u_1a)=-a(eu_1)+3e(au_1)=2au,$$

откуда $bu_1=au_1-[u_1(u_1a)]u_1=0$.

Далее, $\bar{b}=u_{0p+1}-[u_{01}(u_{01}u_{0p+1})]u_{01}=u_{0p+1}$. Полагая теперь $c=bf(b^2)$, где f — полином, существование которого утверждается в лемме 1, получим $\bar{c}=u_{0p+1}$, $c^2=e$. Покажем, что $cu_1=0$. В самом деле, мы доказали, что $bu_1=0$. Если уже доказано, что $b^{2k-1}u_1=0$, то

$$b^{2k+1}u_1=[(b^{2k-1}b)b]u_1=-[(b^{2k-1}u_1)b]b-[(bu_1)b]b^{2k-1}+ \\ +b^2(b^{2k-1}u_1)+(bu_1)b^{2k}=0.$$

Таким образом, $b^{2i+1}u_1=0$ для любого натурального i. Но теперь равенство $cu_1=0$ следует из

$$c=bf(b^2)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i b^{2i+1} \qquad (\alpha_i \in P).$$

Пусть элемент $c \in \mathfrak{A}$ выбран так, что $\bar{c}=u_{0p+1}$, $c^2=e$ и $cu_1=cu_2=\ldots=cu_h=0$ $(1 \leqslant h<p)$. Положим $d=c-u_{h+1}(u_{h+1}c)$. Как и выше, будет $u_{h+1}d=0$. При $i=1, \ldots, h$ имеем

$$u_id=u_ic-u_i[u_{h+1}(u_{h+1}c)]=[u_{h+1}(u_ic)]u_{h+1}+[u_{h+1}(u_iu_{h+1})]c- \\ -u_{h+1}^2(u_ic)-2(u_{h+1}u_i)(u_{h+1}c)=0.$$

Полагая $g=df(d^2)$, получим, как и прежде, что $g^2=e$, $\overline{g}=u_{0p+1}$, $gu_1=gu_2=\ldots=gu_{h+1}=0$. Продолжая этот процесс, получим, наконец, такой элемент u_{p+1}, что $\overline{u}_{p+1}=u_{0p+1}$, $u_{p+1}^2=e$, $u_{p+1}u_1=\ldots=u_{p+1}u_p=0$.

Таким образом, доказана возможность последовательного выбора элементов $u_1,\ldots,u_q$ с нужными мультипликативными свойствами. В силу линейной независимости элементов $e_0, u_{01},\ldots,u_{0q}$ элементы $e, u_1,\ldots,u_q$ также линейно независимы и, следовательно, образуют базис подалгебры $\mathfrak{B}$, изоморфной фактор-алгебре $\mathfrak{A}_0=\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$. Это доказывает теорему в предположениях, указанных в заголовке параграфа.

Из приведенного выше доказательства следует, что для любого элемента $u_1\in\mathfrak{A}$, для которого $u_1^2=e$, $\overline{u}_1=u_{01}$, существует линейно независимая система $e, u_1,\ldots,u_q$ такая, что $\overline{u}_i=u_{0i}$, $u_iu_j=\delta_{ij}e$. Отсюда, пользуясь преобразованием (10), получаем, что для любого базиса $e_{01}, e_{02}, u_{02},\ldots,u_{0q}$ алгебры $\mathfrak{A}_0=\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$, с таблицей умножения $e_{01}^2=e_{01}$, $e_{02}^2=e_{02}$, $e_{01}e_{02}=0$, $e_{01}u_i=e_{02}u_{0i}=\dfrac{1}{2}u_{0i}$, $u_{0i}u_{0j}=\delta_{ij}(e_{01}+e_{02})$ и для любого разложения $e=e_1+e_2$ единицы алгебры $\mathfrak{A}$ в сумму двух ортогональных идемпотентов, при котором $\overline{e}_1=e_{01}$, $\overline{e}_2=e_{02}$ существует линейно независимая система $e_1, e_2, u_2,\ldots,u_q$ с таблицей умножения (9).

§ 3. Случай, когда $\mathfrak{A}$ содержит единицу, а фактор-алгебра $\mathfrak{A}_0=\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ является разложимой J-алгеброй степени $t>2$.

Лемма 2. *Пусть u_0 — идемпотент из $\mathfrak{A}_0=\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ и $a\in\mathfrak{A}$ такой, что $\overline{a}=u_0$. Тогда существует такой полином $f(x)$ с коэфициентами из P, что элемент $u=f(a)$ обладает свойствами $\overline{u}=\overline{a}=u_0$, $u^2=u$.*

Доказательство. В силу § 1, п. 1, так как a не нильпотентно, существует идемпотент $u=f(a)$ Для него $\overline{u}=\overline{a}=u_0$. В самом деле, из $\overline{a}=\overline{a^2}=\overline{a^3}=\ldots$ следует $\overline{u}=f(\overline{a})=\alpha\overline{a}=\alpha u_0$ $(\alpha\in P)$. Далее, $\overline{u^2}=\alpha^2u_0^2=\alpha^2u_0$. Из $u=u^2$ получаем $\alpha u_0=\alpha^2u_0$, т. е. $\alpha=\alpha^2$. Так как u — идемпотент, то $u\overline{\in}\mathfrak{N}$, т. е. $\alpha\neq0$. Следовательно, $\alpha=1$, откуда $\overline{u}=u_0$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть $u_{01},\ldots,u_{0n}$ — попарно ортогональные идемпотенты из алгебры $\mathfrak{A}_0=\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$. Тогда $u_{0i}=\overline{u}_i$, где $u_1,\ldots,u_n$ — попарно ортогональные идемпотенты алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Для $n=1$ утверждение леммы уже доказано (лемма 2). Допустим, что лемма доказана для $n=k-1$. Выберем попарно ортогональные идемпотенты $u_1,\ldots,u_{k-1}$, причем $\overline{u}_i=u_{0i}$, положим $u=u_1+\ldots+u_{k-1}$ и возьмем разложение алгебры $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_u^{(1)}+\mathfrak{A}_u^{(\frac{1}{2})}+\mathfrak{A}_u^{(0)}.$$

Ему соответствует разложение алгебры $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$:

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_u^{(1)}} + \overline{\mathfrak{A}_u^{(\frac{1}{2})}} + \overline{\mathfrak{A}_u^{(0)}},$$

совпадающее, как легко видеть, с разложением $\mathfrak{A}_0$ относительно идемпотента $u_0 = \overline{u}$

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_{0u_0}^{(1)} + \mathfrak{A}_{0u_0}^{(\frac{1}{2})} + \mathfrak{A}_{0u_0}^{(0)}.$$

Так как $u_0 = u_{01} + \ldots + u_{0k-1}$, то $u_0 u_{0k} = 0$, т. е.

$$u_{0k} \in \mathfrak{A}_{0u_0}^{(0)} = \overline{\mathfrak{A}_u^{(0)}},$$

а потому $u_{0k} = \overline{b}$, где $b \in \mathfrak{A}_u^{(0)}$. В силу леммы 2 существует такое $u_k = f(b)$, что $u_k^2 = u_k$, $\overline{u}_k = u_{0k}$. Теперь из $u_k = f(b) \in \mathfrak{A}_u^{(0)}$, $u_i \in \mathfrak{A}_u^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ и соотношения $\mathfrak{A}_u^{(1)} \mathfrak{A}_u^{(0)} = 0$ следует $u_k u_1 = \ldots = u_k u_{k-1} = 0$ и лемма 3 доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — J-алгебра с единицей e, а $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{A}_0$ — разложимая J-алгебра степени $t > 2$. Лемма 3 позволяет разложить e в сумму t попарно ортогональных идемпотентов $e = e_1 + \ldots + e_t$. В самом деле, если $e_0 = \overline{e}$ — единица алгебры $\mathfrak{A}_0$, то, по определению степени J-алгебры (§ 1, п. 4), $e_0 = e_{01} + \ldots + e_{0t}$, где e_{0i} — попарно ортогональные идемпотенты. Выбирая теперь согласно лемме 3 такие попарно ортогональные идемпотенты $e_1, \ldots, e_t$ из $\mathfrak{A}$, что $\overline{e}_i = e_{0i}$, и полагая $e' = e_1 + \ldots + e_t$, получим $\overline{e} = \overline{e'}$, т. е. $e - e' = y \in \mathfrak{R}$. Но, с другой стороны, $y^2 = (e - e')^2 = e - e' = y$, а потому $y = 0$, откуда $e = e'$, т. е.

$$e = e_1 + \ldots + e_t.$$

Положим теперь $\mathfrak{B}_{ij} = \mathfrak{A}_{e_i + e_j}^{(1)}$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, t$. Очевидно, $\mathfrak{B}_{ij} = \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$. Пусть $\mathfrak{R}_{ij}$ — радикал алгебры $\mathfrak{B}_{ij}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{B}_{ij}/\mathfrak{R}_{ij}$. Так как в силу § 1, п. 7 $\mathfrak{R}_{ij} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{B}_{ij}$, то $\mathfrak{B}_{ij}/\mathfrak{R}_{ij} \simeq \simeq \overline{\mathfrak{B}_{ij}} = \overline{\mathfrak{A}_{e_i + e_j}^{(1)}} = \mathfrak{A}_{0e_{0i} + e_{0j}}^{(1)} = \mathfrak{A}_{0ii} + \mathfrak{A}_{0ij} + \mathfrak{A}_{0jj}$, где $\mathfrak{A}_{0ii}$, $\mathfrak{A}_{0jj}$, $\mathfrak{A}_{0ij}$ — соответствующие компоненты разложения алгебры $\mathfrak{A}_0$ по идемпотентам $e_{01}, \ldots, e_{0t}$. В силу § 1, п. 10 для любого $x \in \mathfrak{A}_{0ij}$ $x^2 = \alpha e_{0i} + \beta e_{0j}$, где $\alpha, \beta \in P$.

Тождество (1) дает $(x^2 e_{0i}) x = x^2 (e_{0i} x)$. Подсчитаем обе части этого равенства

$$(x^2 e_{0i}) x = [(\alpha e_{0i} + \beta e_{0j}) e_{0i}] x = \alpha e_{0i} x = \frac{1}{2} \alpha x,$$

$$x^2 (e_{0i} x) = \frac{1}{2} (\alpha e_{0i} + \beta e_{0j}) x = \frac{1}{4} \alpha x + \frac{1}{4} \beta x,$$

откуда $\dfrac{1}{4} \alpha x = \dfrac{1}{4} \beta x$, т. е. $\alpha = \beta$. Таким образом, для любого $x \in \mathfrak{A}_{0ij}$

$$x^2 = f(x) \cdot (e_{0i} + e_{0j}),$$

где $f(x)$ — квадратичная форма, определенная в $\mathfrak{A}_{0ij}$ и принимающая значения из поля P. Как известно, в некотором базисе $v_{0ij}^{(2)}, \ldots, v_{0ij}^{(q_{ij})}$ пространства $\mathfrak{A}_{0ij}$ $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=2}^{q_{ij}} \alpha_k \xi_k, \tag{11}$$

где $x = \sum_{k=2}^{q_{ij}} \xi_k v_{0ij}^{(k)}$. Из (11) следует, что $v_{0ij}^{(k)} v_{0ij}^{(l)} = \delta_{kl} \alpha_k (e_{0i} + e_{0j})$. При этом все α_k должны быть отличны от нуля, так как из $\alpha_k = 0$ следует, что линейное подпространство, порожденное элементом $v_{0ij}^{(k)}$, есть нильпотентный идеал в полупростой алгебре $\mathfrak{A}^{(1)}_{0e_{0i}+e_{0j}} = \overline{\mathfrak{B}_{ij}} \cong \mathfrak{B}_{ij}/\mathfrak{N}_{ij}$.

Так как ранг каждой из подалгебр $\mathfrak{A}_{0ii}$ и $\mathfrak{A}_{0jj}$ равен 1, то элементы $e_{0i}, e_{0j}, u_{0ij}^{(2)}, \ldots, u_{0ij}^{(q_{ij})}$ образуют базис алгебры $\mathfrak{A}^{(1)}_{0e_{0i}+e_{0j}} \cong \dfrac{\mathfrak{B}_{ij}}{\mathfrak{N}_{ij}}$. Возьмем расширение R поля P: $R = P(\sqrt{\alpha_2}, \ldots, \sqrt{\alpha_{q_{ij}}})$ и построим базис $e_{0i}, e_{0j}, u_{0ij}^{(2)}, \ldots, u_{0ij}^{(q_{ij})}$ алгебры $(\mathfrak{A}^{(1)}_{0e_{0i}+e_{0j}})_R$ над полем R:

$$u_{0ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} v_{0ij}^{(k)}.$$

Очевидно, базис $e_{0i}, e_{0j}, u_{0ij}^{(2)}, \ldots, u_{0ij}^{(q_{ij})}$ имеет таблицу умножения $e_{0i}^2 = e_{0i}$, $e_{0j}^2 = e_{0j}$, $e_{0i} e_{0j} = 0$, $e_{0i} u_{0ij}^{(k)} = e_{0j} u_{0ij}^{(k)} = \dfrac{1}{2} u_{0ij}^{(k)}$, $u_{0ij}^{(k)} u_{0ij}^{(l)} = \delta_{kl}(e_{0i} + e_{0j})$, т. е. $\left(\dfrac{\mathfrak{B}_{ij}}{\mathfrak{N}_{ij}}\right)_R \cong (\mathfrak{A}^{(1)}_{0e_{0i}+e_{0j}})_R$ есть разложимая J-алгебра степени 2. Так как, в силу § 1, п. 8, радикал J-алгебры $(\mathfrak{B}_{ij})_R$ есть $(\mathfrak{N}_{ij})_R$, то, пользуясь замечанием, сделанным в конце § 2, и замечая, что выбранные нами ортогональные идемпотенты $e_1, \ldots, e_t$ обладают свойством $\overline{e_i} = e_{0i}$, можно в $(\mathfrak{B}_{ij})_R$ выбрать линейно независимую систему

$$e_i,\ e_j,\ u_{ij}^{(2)}, \ldots, u_{ij}^{(q_{ij})} \tag{12}$$

с таблицей умножения

$$e_i^2 = e_i,\ e_j^2 = e_j,\ e_i e_j = 0,\ e_i u_{ij}^{(k)} = e_j u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} u_{ij}^{(k)},\ u_{ij}^{(k)} u_{ij}^{(l)} = \delta_{kl}(e_i + e_j). \tag{13}$$

Очевидно, можно считать, что поле R, построенное нами для каждой из подалгебр $\mathfrak{B}_{ij} \subset \mathfrak{A}$, одно и то же для всех i, j. Далее для удобства обозначений мы будем считать, что это поле совпадает с P.

Итак, мы в каждой из подалгебр $\mathfrak{B}_{ij}$ выбрали линейно независимую систему

$$e_i, e_j,\ u_{ij}^{(2)}, \ldots, u_{ij}^{(q_{ij})},$$

для которой выполнены соотношения (13).

Обозначим теперь $u_{1i}^{(2)}$ через $f_{0,1}$ и положим

$$f_{0,i1} = f_{0,1i}, \quad f_{0,ij} = 2 f_{0,1i} f_{0,1j} \qquad (i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, t).$$

Очевидно, $f_{0,ij}=f_{0,ji}$ и $f_{0,ij}\in \mathfrak{A}_{ij}=\mathfrak{A}^{(\frac{1}{2})}_{e_i}\cap\mathfrak{A}^{(\frac{1}{2})}_{e_j}$.

Пусть F_0 — система всех элементов e_i, $f_{0,ij}$.

Лемма 4. *Элементы системы $F_0=\{e_i, f_{0,ij}\}$ перемножаются согласно следующим соотношениям:*

$$
\begin{gathered}
e_i^2=e_i, \quad e_ie_j=0, \quad e_if_{0,ij}=\frac{1}{2}f_{0,ij}, \quad e_if_{0,jk}=0, \\
f_{0,ij}^2=e_i+e_j, \quad f_{0,ij}f_{0,jk}=\frac{1}{2}f_{0,ik}, \quad f_{0,ij}f_{0,kl}=0,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где i, j, k, l все различны и принимают значения от 1 до t.

Доказательство. Уже имеем:

$$e_i^2=e_i,\ e_ie_j=0,\ e_if_{0,ij}=\frac{1}{2}f_{0,ij},\ e_if_{0,jk}=0,\ f_{0,ij}f_{0,kl}=0,$$

$$f_{0,1i}^2=e_1+e_i,\ f_{0,1i}f_{0,1j}=\frac{1}{2}f_{0,ij}.$$

Далее, при $i\neq j$, $i,j\neq 1$, в силу тождества (4):

$$
\begin{gathered}
f_{0,1i}f_{0,ij}=4(f_{0,1i}e_1)(f_{0,1i}f_{0,1j})=-2f_{0,1i}^2(f_{0,1j}e_1)+4[e_1(f_{0,1i}f_{0,1j})]f_{0,1i}+ \\
+2(e_1f_{0,1i}^2)f_{0,1j}=-(e_1+e_i)f_{0,1j}+0+2e_1f_{0,1j}=\frac{1}{2}f_{0,1j}.
\end{gathered}
$$

Если 1, i, j, k все различны, то

$$
\begin{gathered}
f_{0,ij}f_{0,jk}=4(f_{0,1i}f_{0,1j})(f_{0,1j}f_{0,1k})=-2f_{0,1j}(f_{0,1i}f_{0,1k})+2(f_{0,1i}f_{0,1j}^2)f_{0,1k}+ \\
+4[f_{0,1i}(f_{0,1j}f_{0,1k})]f_{0,1j}=0+f_{0,1i}f_{0,1k}+0=\frac{1}{2}f_{0,ik}.
\end{gathered}
$$

Наконец, при $i\neq j$, $i,j>1$:

$$
\begin{gathered}
f_{0,ij}^2=4(f_{0,1i}f_{0,1j})(f_{0,1i}f_{0,1j})=-2f_{0,1i}^2f_{0,1j}^2+4[f_{0,1i}(f_{0,1i}f_{0,1j})]f_{0,1j}+ \\
+2(f_{0,1i}f_{0,1j}^2)f_{0,1i}=-2e_1+e_1+e_j+e_1+e_i=e_i+e_j.
\end{gathered}
$$

Лемма 4 доказана.

Назовем элемент $g\in\mathfrak{A}$ *полярным* к системе F_0, построенной выше, если для некоторых i,j $(i\neq j)$:

$$g\in\mathfrak{A}_{ij}, \quad g^2=e_i+e_j, \quad gf_{0,ij}=0.$$

Пусть элемент g полярен к F_0. Предположим для определенности, что $g\in\mathfrak{A}_{12}$. Обозначим через $\langle g\rangle$ систему элементов g_{ij} $(i\neq j,$ $1\leqslant i,j\leqslant t)$, определяемых следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&g_{12}=g, \quad g_{21}=-g, \\
&g_{1i}=2g_{12}f_{0,2i}, \quad g_{i1}=-g_{1i} \qquad (i=3,\ldots,t), \\
&g_{ij}=2f_{0,1i}g_{1j} \qquad (i\neq j,\ i,j=2,3,\ldots,t).
\end{aligned}
$$

При этом, очевидно, $g_{ij}\in\mathfrak{A}_{ij}$.

Лемма 5. *Пусть элемент* $g \in \mathfrak{A}_{12}$ *поляpен к системе* F_0. *Тогда* $g_{ij}=-g_{ji}$. *Кроме того, элементы системы* $G=F_0\cup\langle g\rangle$ *перемножаются согласно соотношениям* (14) *и следующим:*

$$\left.\begin{array}{l} e_i g_{ij}=e_j g_{ij}=\dfrac{1}{2}g_{ij}, \quad e_k g_{ij}=0 \\[2ex] f_{0,ij}g_{ij}=0, \ f_{0,ij}g_{kl}=0, \quad f_{0,ij}g_{ik}=\dfrac{1}{2}g_{jk} \\[2ex] g_{ij}^2=e_i+e_j, \quad g_{ij}g_{jk}=\dfrac{1}{2}f_{0,jk}, \quad g_{ij}g_{kl}=0 \end{array}\right\}, \tag{15}$$

где i, j, k, l *все различны и принимают значения от* 1 *до* t.

Доказательство. Покажем сначала, что $g_{ij}=-g_{ji}$. Действительно, $g_{i1}=-g_{1i}$ по определению. Далее, в силу тождества (3), при $i>2$,

$$g_{2i}=8f_{0,12}[g_{12}(f_{0,12}f_{0,1i})]=-4f_{0,1i}(g_{12}f_{0,12}^2)+8f_{0,12}[f_{0,1i}(g_{12}f_{0,12})]+$$
$$+4g_{12}(f_{0,1i}f_{0,12}^2)=-4f_{0,1i}g_{12}+2g_{12}f_{0,1i}=-2f_{0,1i}g_{12}=-g_{i2}.$$

При $i,j>2$, $i\neq j$ имеем:

$$g_{ij}=8[g_{12}(f_{0,12}f_{0,1j})]f_{0,1i}=-8[g_{12}(f_{0,12}f_{0,1i})]f_{0,1j}-$$
$$-8[g_{12}(f_{0,1i}f_{0,1j})]f_{0,12}+8[f_{0,1i}(g_{12}f_{0,12})]f_{0,1j}+$$
$$+8[f_{0,1i}(g_{12}f_{0,1j})]f_{0,12}+8[f_{0,1i}(f_{0,12}f_{0,1j})]g_{12}=$$
$$=-8[g_{12}(f_{0,12}f_{0,1i})]f_{0,1j}=-g_{ji}.$$

Будем теперь последовательно рассматривать произведения

A. $\quad g_{12}x,$

B. $\quad g_{1i}x \qquad (3\leqslant i\leqslant t),$

C. $\quad g_{ij}x \qquad (i\neq j,\ 2\leqslant i,j\leqslant t),$

где $x\in G$.

A. Имеем

$$g_{12}e_1=g_{12}e_2=\frac{1}{2}g_{12}, \quad g_{12}e_i=0, \quad g_{12}f_{0,12}=0, \quad g_{12}f_{0,1i}=\frac{1}{2}g_{i2},$$
$$g_{12}f_{0,2i}=\frac{1}{2}g_{1i}, \quad g_{12}f_{0,ij}=g_{12}g_{ij}=0, \quad g_{12}^2=e_1+e_2 \qquad (i,j>2).$$

Далее, при $i>2$

$$g_{12}g_{1i}=4g_{12}[(g_{12}f_{0,2i})e_i]=$$
$$=-2f_{0,2i}(g_{12}^2e_i)+4(g_{12}f_{0,2i})(g_{12}e_i)+2g_{12}^2(f_{0,2i}e_i)=\frac{1}{2}f_{0,2i}$$

$$g_{12}g_{i2}=4g_{12}[(f_{0,1i}g_{12})e_i]=$$
$$=-2f_{0,1i}(g_{12}^2e_i)+4(g_{12}f_{0,1i})(g_{12}e_i)+2g_{12}^2(f_{0,1i}e_i)=\frac{1}{2}f_{0,}$$

В. При $j, k \neq 1, i$ имеем:

$$g_{1i} e_1 = g_{1i} e_i = \frac{1}{2} g_{1i}, \quad g_{1i} e_j = 0, \quad g_{1i} f_{0, jk} = 0,$$

$$g_{1i} f_{0, 1j} = \frac{1}{2} g_{ji}, \quad g_{1i} g_{jk} = 0, \quad g_{1i} g_{12} = \frac{1}{2} f_{0, 2i}.$$

Найдем $g_{1i} f_{0, ij}$ при $j \neq 1, i$. Если $j > 2$, то

$$\begin{aligned} g_{1i} f_{0, ij} &= 4 [e_1 (g_{12} f_{0, 2i})] f_{0, ij} = -4 [e_1 (g_{12} f_{0, ij})] f_{0, 2i} - \\ &\quad - 4 [e_1 (f_{0, 2i} f_{0, ij})] g_{12} + 4 (e_1 g_{12}) (f_{0, 2i} f_{0, ij}) + \\ &\quad + 4 (e_1 f_{0, 2i}) (g_{12} f_{0, ij}) + 4 (e_1 f_{0, ij}) (g_{12} f_{0, 2i}) = \\ &= 4 (e_1 g_{12}) (f_{0, 2i} f_{0, ij}) = \frac{1}{2} g_{1j}. \end{aligned}$$

Если же $j = 2$, то

$$\begin{aligned} g_{1i} f_{0, ij} &= g_{1i} f_{0, i2} = 4 [e_1 (g_{12} f_{0, 2i})] f_{0, 2i} = -2 (e_1 f_{0, 2i}^2) g_{12} + 2 f_{0, 2i}^2 (e_1 g_{12}) + \\ &\quad + 4 (f_{0, 2i} e_1) (f_{0, 2i} g_{12}) = (e_2 + e_i) g_{12} = \frac{1}{2} g_{12} = \frac{1}{2} g_{ij}. \end{aligned}$$

Покажем, что $g_{1i} f_{0, 1i} = 0$. В самом деле

$$\begin{aligned} g_{1i} f_{0, 1i} &= 4 (g_{12} f_{0, 2i}) (f_{0, 12} f_{0, 2i}) = -2 f_{0, 2i}^2 (g_{12} f_{0, 12}) + 4 [g_{12} (f_{0, 12} f_{0, 2i})] + \\ &\quad + 2 (g_{12} f_{0, 2i}^2) f_{0, 12} = 4 [g_{12} (f_{0, 12} f_{0, 2i})] f_{0, 12} = g_{i2} f_{0, 12}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} g_{1i} f_{0, 1i} &= 4 (g_{12} f_{0, 2i}) (f_{0, 12} f_{0, 2i}) = -2 f_{0, 2i}^2 (g_{12} f_{0, 12}) + 4 [f_{0, 12} (f_{0, 2i} g_{12})] f_{0, 2i} + \\ &\quad + 2 (f_{0, 12} f_{0, 2i}^2) g_{0, 12} = 4 [f_{0, 12} (f_{0, 2i} g_{12})] f_{0, 2i} = g_{2i} f_{0, 2i} = -g_{i2} f_{0, 2i}. \end{aligned}$$

Следовательно, $g_{1i} f_{0, 1i} = 0$.

Найдем теперь $g_{1i} g_{ij}$ $(j \neq 1, i)$. Если $j > 2$, то

$$\begin{aligned} g_{1i} g_{ij} &= 4 (g_{12} f_{0, 2i}) (g_{1j} f_{0, 1i}) = -4 (g_{12} f_{0, 1i}) (g_{1j} f_{0, 2i}) - 4 (g_{12} g_{1j}) (f_{0, 1i} f_{0, 2i}) + \\ &\quad + 4 [g_{12} (g_{1j} f_{0, 1i})] f_{0, 2i} + 4 [g_{12} (g_{1j} f_{0, 2i})] f_{0, 1i} + \\ &\quad + 4 [g_{12} (f_{0, 1i} f_{0, 1j})] g_{1j} = -f_{0, 2j} f_{0,12} = -\frac{1}{2} f_{0, 1j}. \end{aligned}$$

При $j = 2$ будет:

$$\begin{aligned} g_{1i} g_{ij} &= g_{1i} g_{i2} = 4 (g_{12} f_{0, 2i}) (g_{12} f_{0, 1i}) = -2 g_{12}^2 (f_{0, 2i} f_{0, 1i}) + 4 [f_{0, 1i} (f_{0, 2i} g_{12})] g_{12} + \\ &\quad + 2 (f_{0, 1i} g_{12}^2) f_{0, 2i} = -(e_1 + e_2) f_{0, 12} + f_{0, 2i} f_{0, 1i} = -\frac{1}{2} f_{0,12} = -\frac{1}{2} f_{0, 1j}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} g_{1i} g_{1j} &= 4 (g_{12} f_{0, 2i}) (g_{12} f_{0, 2j}) = -2 g_{12}^2 (f_{0, 2i} f_{0, 2j}) + 2 [g_{12} (f_{0, 2i} f_{0, 2j})] g_{12} + \\ &\quad + 2 [g_{12} (g_{12} f_{0, 2i})] f_{0, 2j} + 2 [g_{12} (g_{12} f_{0, 2j})] f_{0, 2i} = \frac{1}{4} f_{0, ij} + \frac{1}{4} f_{0, ij} = \frac{1}{2} f_{0, ij}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$g_{1i}=4(g_{12}f_{0,2i})(g_{12}f_{0,2i})=-2g_{12}^2f_{0,2i}^2+4[g_{12}(g_{12}f_{0,2i})]f_{0,2i}+$$
$$+2(g_{12}f_{0,2i}^2)g_{12}=-2e_2+e_2+e_i+e_1+e_2=e_1+e_i.$$

C. Теперь легко получаются соотношения (при $1<k\neq i, j$):

$$g_{ij}f_{0,ij}=4(f_{0,1i}g_{1j})(f_{0,1i}f_{0,1j})=-2f_{0,1i}^2(g_{1j}f_{0,1j})+$$
$$+4[g_{1j}(f_{0,1i}f_{0,1j})]f_{0,1i}+2(g_{1j}f_{0,1i}^2)f_{0,1j}=0,$$
$$g_{ij}f_{0,ik}=4(f_{0,1i}g_{1j})(f_{0,1i}f_{0,1k})=-2f_{0,1i}^2(g_{1j}f_{0,1k})+$$
$$+4[g_{1j}(f_{0,1i}f_{0,1k})]f_{0,1i}+2(g_{1j}f_{0,1i}^2)f_{0,1k}=\frac{1}{2}g_{kj},$$
$$g_{ij}^2=4(f_{0,1i}g_{1j})(f_{0,1i}g_{1j})=-2f_{0,1i}^2g_{1j}^2+4[g_{1j}(f_{0,1i}g_{1j})]f_{0,1i}+$$
$$+2(g_{1j}f_{0,1j}^2)g_{1j}=e_i+e_j,$$
$$g_{ij}g_{ik}=4(f_{0,1i}g_{1j})(f_{0,1i}g_{1k})=-2f_{0,1i}^2(g_{1j}g_{1k})+$$
$$+4[g_{1j}(f_{0,1i}g_{1k})]f_{0,1i}+2(g_{1j}f_{0,1i}^2)g_{1k}=\frac{1}{2}f_{0,jk}.$$

Доказательство леммы 5 закончено.

Пусть g и h — ортогональные полярные к системе F_0 элементы, принадлежащие одному и тому же $\mathfrak{A}_{ij}$, например $\mathfrak{A}_{12}$, и пусть $\{g_{ij}\}=\langle g\rangle$, $\{h_{ij}\}=\langle h\rangle$. Тогда, если i, j, k, l все различны, то

$$h_{ij}g_{ik}=4(f_{0,li}h_{lj})(f_{0,li}g_{lk})=-2f_{0,li}^2(h_{lj}g_{lk})+$$
$$+4[h_{lj}(f_{0,li}g_{lk})]f_{0,li}+2(h_{lj}f_{0,li}^2)g_{lk}=h_{lj}g_{lk}.$$

Этим оправдано следующее определение элементов c_{ij}:

$$c_{ij}=2h_{ki}g_{kj}\qquad(i\neq j,\ k\neq i, j).\tag{16}$$

Мы будем далее обозначать систему $\{c_{ij}\}$ элементов c_{ij}, определяемых формулой (16), через $\langle\langle h; g\rangle\rangle$.

Л е м м а 6. *Если $g, h\in\mathfrak{A}_{12}$ — ортогональные полярные к системе F_0 элементы и $\{c_{ij}\}=\langle\langle h; g\rangle\rangle$, то элемент $c=c_{12}$ полярен к F_0,*

$$\{c_{ij}\}=\langle c\rangle,\quad c_{ij}g_{ij}=c_{ij}h_{ij}=g_{ij}h_{ij}=0\qquad(i\neq j,\ 1\leqslant i, j\leqslant t)$$

и

$$\{g_{ij}\}=\langle\langle c, h\rangle\rangle,$$
$$\{h_{ij}\}=\langle\langle g, c\rangle\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что

$$g_{ij}h_{ij}=0\qquad(i\neq j,\ i, j=1,\ldots, t).\tag{17}$$

В самом деле, так как $g_{12}h_{12}=gh=0$, то при $i>2$

$$g_{1i}h_{1i}=4(g_{12}f_{0,2i})(h_{12}f_{0,2i})=-2f_{0,2i}^2(g_{12}h_{12})+2[f_{0,2i}(g_{12}h_{12})]f_{0,2i}+$$
$$+2[f_{0,2i}(f_{0,2i}g_{12})]h_{12}+2[f_{0,2i}(f_{0,2i}h_{12})]g_{12}=0.$$

Далее, при $i, j > 1$:

$$g_{ij} h_{ij} = 4(g_{i1} f_{0,1j})(h_{i1} f_{0,1j}) = -2f_{0,1j}^2 (g_{i1} h_{i1}) + 2[f_{0,1j}(g_{i1} h_{i1})] f_{0,1j} + $$
$$+ 2[f_{0,1j}(f_{0,1j} g_{i1})] h_{i1} + 2[f_{0,1j}(f_{0,1j} h_{i1})] g_{i1} = 0.$$

Найдем произведения вида $c_{ij} h_{ik}$, $g_{ij} c_{ik}$ $(i \neq j,\ k \neq i, j)$:

$$c_{ij} h_{ik} = 4(h_{ik} g_{jk})(h_{ik} e_i) = -2h_{ik}^2 (g_{jk} e_i) + 2[h_{ik}(g_{jk} e_i)] h_{ik} +$$
$$+ 2[h_{ik}(h_{ik} e_i)] g_{jk} + 2[h_{ik}(h_{ik} g_{jk})] e_i = 2[h_{ik}(h_{ik} e_i)] g_{jk} = \frac{1}{2} g_{jk},$$
$$g_{ij} c_{ik} = 4(f_{0,ki} g_{kj})(h_{ij} g_{kj}) = -2g_{kj}^2 (f_{0,ki} h_{ij}) + 4[h_{ij}(g_{kj} f_{0,ki})] g_{kj} +$$
$$+ 2(h_{ij} g_{kj}^2) f_{0,ki} = -(e_k + e_j) h_{kj} + \frac{1}{2} h_{kj} = \frac{-1}{2} h_{kj} = \frac{1}{2} h_{jk}.$$

Элемент $c_{12} = c$ полярен к системе F_0. В самом деле, очевидно, $c_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$. Кроме того,

$$c_{12}^2 = 4(h_{31} g_{32})(h_{31} g_{32}) = -2h_{31}^2 g_{32}^2 + 4[h_{31}(h_{31} g_{32})] g_{32} + 2(h_{31} g_{32}^2) h_{31} = e_1 + e_2,$$
$$c_{12} f_{0,12} = 4(h_{31} g_{32})(f_{0,12} e_2) = -4(h_{31} f_{0,12})(g_{32} e_2) - 4(h_{31} e_2)(f_{0,12} g_{32}) +$$
$$+ 4[g_{32}(e_2 h_{31})] f_{0,12} + 4[g_{32}(e_2 f_{0,12})] h_{31} + 4[g_{32}(h_{31} f_{0,12})] e_2 = 0.$$

Далее, система $\{c_{ij}\} = \langle c_{12} \rangle = \langle c \rangle$. Действительно:

$$2c_{12} f_{0,2i} = 8(h_{1i} g_{2i})(h_{1i} h_{12}) = -4h_{1i}^2 (g_{2i} h_{12}) +$$
$$+ 8[g_{2i}(h_{1i} h_{12})] h_{1i} + 4(g_{2i} h_{1i}^2) h_{12} = c_{1i};$$
$$c_{i1} = 8(f_{0,1i} h_{k1})(f_{0,1i} g_{ki}) = -4f_{0,1i}^2 (h_{k1} g_{ki}) +$$
$$+ 8[h_{k1}(f_{0,1i} g_{ki})] f_{0,1i} + 4(h_{k1} f_{0,1i}^2) g_{ki} = -c_{1i};$$
$$2f_{0,1i} c_{1j} = 8(g_{1j} g_{ij})(h_{i1} g_{ij}) = -4g_{ij}^2 (g_{1j} h_{i1}) + 8[h_{i1}(g_{ij} g_{1j})] g_{ij} +$$
$$+ 4(h_{i1} g_{ij}^2) g_{1j} = 2c_{ij} - c_{ij} = c_{ij}.$$

Наконец, аналогично (17) легко получить равенства

$$c_{ij} g_{ij} = c_{ij} h_{ij} = 0 \qquad (i \neq j,\ 1 \leq i,\ j \leq t).$$

Лемма 6 доказана.

Далее в этом параграфе мы будем предполагать, что поле P содержит корень a уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Лемма 4 показывает, что линейное подпространство $\mathfrak{B}_{II} \subseteq \mathfrak{A}$, порожденное системой F_0 (очевидно, линейно независимой), есть подалгебра, изоморфная J-алгебре симметрических матриц порядка с коэфициентами из P. Изоморфизм устанавливается соответствием между базисами

$$e_i \to e_{ii},$$
$$f_{0,ij} \to e_{ij} + e_{ji}$$

(здесь, как и далее, e_{ij} — обычные матричные единицы).

Следовательно, если $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ есть разложимая J-алгебра типа II, то $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}_{II} \simeq \mathfrak{A}_0$.

Если для любых i, j $(i \neq j)$ элементы $\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{f}_{0,ij}$ образуют базис J-алгебры $\bar{\mathfrak{B}}_{ij} \simeq \dfrac{\mathfrak{B}_{ij}}{\mathfrak{N}_{ij}}$, то $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_{II} \simeq \mathfrak{B}_{II}$. Отсюда следует, что если $\mathfrak{A}_0$ есть разложимая J-алгебра типа III, IV или V, то некоторое $\mathfrak{B}_{ij}$ (например, $\mathfrak{B}_{12}$) содержит такой элемент $f_{1,12}$, что

$$f_{1,12}e_1 = f_{1,12}e_2 = \frac{1}{2}f_{1,12}, \quad f_{1,12}^2 = e_1 + e_2, \quad f_{0,12}f_{1,12} = 0. \tag{18}$$

Соотношения (18) показывают, что элемент $f_{1,12}$ поляреи к F_0. В силу леммы 5 линейное подпространство $\mathfrak{B}_{III} \subseteq \mathfrak{A}$, порожденное системой $F_0 \cup \langle f_{1,12} \rangle$, будет подалгеброй, изоморфной J-алгебре всех матриц порядка t с коэфициентами из P. Изоморфизм устанавливается соответствием между базисами

$$e_i \to e_{ii} \qquad i = 1, \ldots, t.$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{0,ij} \to e_{ij} + e_{ji} \\ f_{1,ij} \to \alpha e_{ij} - \alpha e_{ji} \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant t,$$

где $\alpha \in P$, $\alpha^2 = -1$.

Следовательно, если $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ есть разложимая J-алгебра типа III, то $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}_{III} \simeq \mathfrak{A}_0$.

Если $\mathfrak{A}_0$ есть разложимая J-алгебра типа IV или V, то, как и выше, некоторое $\mathfrak{B}_{ij}$ (например, $\mathfrak{B}_{12}$) содержит элемент $f_{2,12}$, полярный к системе F_0 и ортогональный к $f_{1,12}$. Линейное подпространство $\mathfrak{B}_{IV} \subseteq \mathfrak{A}$, порожденное системой $F_0 \cup \langle f_{1,12} \rangle \cup \langle f_{2,12} \rangle \cup \{f_{3,ij}\}$, где $\{f_{3,ij}\} = \langle\langle f_{2,12}; f_{1,12} \rangle\rangle$ будет подалгеброй, изоморфной J-алгебре $\mathfrak{C}_t$, определенной в § 1, п. 9. Действительно, выберем в $\mathfrak{C}_t \subseteq \mathfrak{M}_{2t} \subseteq \mathfrak{M}_t \times \mathfrak{M}_2$ базис

$$x_i = e'_{ii}(e''_{11} + e''_{22}) \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij} = (e'_{ij} + e'_{ji})(e''_{11} + e''_{22}) \\ u_{ij} = (e'_{ij} - e'_{ji})(\alpha e''_{11} - \alpha e''_{22}) \\ v_{ij} = (e'_{ij} - e'_{ji})(\alpha e''_{12} - \alpha e''_{21}) \\ w_{ij} = (e'_{ij} - e'_{ji})(e''_{21} - e''_{12}) \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant t,$$

где e'_{ij} $(i, j = 1, \ldots, t)$ — базис в $\mathfrak{M}_t$, а e''_{kl} $(k, l = 1, 2)$ — базис в $\mathfrak{M}_2$, и установим соответствие

$$e_i \to x_i \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

$$\left.\begin{array}{ll} f_{0,ij} \to y_{ij}, & f_{1,ij} \to u_{ij} \\ f_{2,ij} \to v_{ij}, & f_{3,ij} \to w_{ij} \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant t.$$

В силу леммы 6 это соответствие определяет изоморфизм $\mathfrak{B}_{IV}$ на $\mathfrak{C}_t$.

Таким образом, если $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ есть разложимая J-алгебра типа IV, то $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}_{IV} \cong \mathfrak{A}_0$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_0$ есть разложимая J-алгебра типа V. Тогда по тем же причинам, что и выше, некоторое $\mathfrak{B}_{ij}$ (для определенности снова предположим, что $\mathfrak{B}_{12}$) содержит элемент $f_{4,12}$, полярный к системе F_0 и ортогональный к элементам $f_{1,12}$, $f_{2,12}$, $f_{3,12}$. Положим

$$\left.\begin{aligned} \langle f_{4,12}\rangle &= \{f_{4,ij}\} \\ \langle\langle f_{4,12};\ f_{1,12}\rangle\rangle &= \{f_{5,ij}\} \\ \langle\langle f_{2,12};\ f_{4,12}\rangle\rangle &= \{f_{6,ij}\} \\ \langle\langle f_{4,12};\ f_{3,12}\rangle\rangle &= \{f_{7,ij}\} \end{aligned}\right\}; \tag{19}$$

здесь i, j различны и принимают значения от 1 до $t=3$.

Имеем:

$$\begin{gathered} f_{2,ik}f_{5,ik} = -f_{2,ik}f_{5,ki} = -4(f_{1,ji}f_{3,jk})(f_{1,ji}f_{4,jk}) = 2f_{1,ji}^2(f_{3,jk}f_{4,jk}) - \\ -2[f_{1,ji}(f_{1,ji}f_{3,jk})]f_{4,jk} - 2[f_{1,ji}(f_{1,ji}f_{4,jk})]f_{3,jk} - \\ -2[f_{1,ji}(f_{3,ik}f_{4,jk})]f_{1,ji} = -(f_{1,ji}f_{2,ik})f_{4,jk} - (f_{1,ji}f_{5,ki})f_{3,jk} = 0. \end{gathered}$$

Аналогично этому легко получить, что

$$f_{k,ij}f_{l,ij} = 0$$

при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$; $k \neq l$, $k, l = 1, \ldots, 7$.

Теперь при $i \neq j$, $k \neq i, j$ получаем

$$\begin{gathered} f_{5,ki}f_{2,kj} = +4(f_{1,ji}f_{4,jk})(f_{1,ji}f_{3,ik}) = -2f_{1,ji}^2(f_{3,ik}f_{4,jk}) + \\ +4[f_{3,ik}(f_{1,ji}f_{4,jk})]f_{1,ji} + 2(f_{3,ik}f_{1,ji}^2)f_{4,jk} = -2f_{3,ik}f_{4,jk} + \\ +f_{3,ik}f_{4,jk} = -\frac{1}{2}f_{7,ji} = \frac{1}{2}f_{7,ij}, \end{gathered}$$

т. е.

$$\{f_{7,ij}\} = \langle\langle f_{5,12};\ f_{2,12}\rangle\rangle. \tag{20}$$

Таким же образом находим

$$\left.\begin{aligned} \{f_{7,ij}\} &= \langle\langle f_{6,12};\ f_{1,12}\rangle\rangle \\ \{f_{6,ij}\} &= \langle\langle f_{3,12};\ f_{5,12}\rangle\rangle \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Соотношения (19), (20), (21) вместе с леммами 5 и 6 показывают, что линейное подпространство $\mathfrak{B}_V \subseteq \mathfrak{A}$, порожденное системой $F = F_0 \cup \bigcup_{k=1}^{7} \{f_{k,ij}\}$, является подалгеброй, изоморфной J-алгебре D. Изоморфизм устанавливается соответствием между базисами

$$e_i \to a_0 e_{ii} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\left.\begin{aligned} f_{0,ij} &\to a_0(e_{ij} + e_{ji}) \\ f_{k,ij} &\to a_k(e_{ij} - e_{ji}) \end{aligned}\right\} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \quad k = 1, \ldots, 7.$$

Следовательно, если $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ есть разложимая J-алгебра типа V, то $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}_V \cong \mathfrak{A}_0$.

Итак, мы доказали, что если $\mathfrak{A}$ есть J-алгебра с единицей и $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ — разложимая J-алгебра, то при некотором расширении R поля P алгебра $\mathfrak{A}_R$ содержит подалгебру $\mathfrak{B}$, изоморфную $\mathfrak{A}_0$.

Назовем J-алгебру $\mathfrak{B}$ расщепляющей, если всякая J-алгебра с единицей, для которой $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{B}$, расщепляема.

Так как построенное нами расширение R поля P не зависело от алгебры $\mathfrak{A}$ и определялось фактор-алгеброй $\mathfrak{A}_0 = \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$, то полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Для всякой разложимой J-алгебры $\mathfrak{A}_0$ существует такое конечное расширение R поля P, что $(\mathfrak{A}\ )_R$ есть расщепляющая J-алгебра.

§ 4. Доказательство теоремы в общем случае

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{A}$ — полупростая J-алгебра над полем P. Тогда существует такое конечное расширение R поля P, что $\mathfrak{A}_R$ есть прямая сумма центрально простых J-алгебр над полем R.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму в предположении, что $\mathfrak{A}$ — простая J-алгебра. Заметим, что для простых J-алгебр ранга 1 лемма тривиальна, и предположим ее доказанной для простых J-алгебр, ранг которых меньше чем ранг $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ не центрально проста, то существует такое расширение R' поля P, что алгебра $\mathfrak{A}_{R'}$ не проста. Так как $\mathfrak{A}_{R'}$ полупроста, то $\mathfrak{A}_{R'} = \mathfrak{B}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{B}_m$ $(m > 1)$, где $\mathfrak{B}_i$ — простые J-алгебры над R'. По предположению, для каждой из алгебр $\mathfrak{B}_i$ существует такое конечное расширение R_i поля R', что $(\mathfrak{B}_i)_{R_i}$ есть прямая сумма центрально простых J-алгебр: $(\mathfrak{B}_i)_{R_i} = \dot{\sum\limits_j} \mathfrak{C}_{ij}$. Беря теперь в качестве R композит всех полей R_i, получим:

$$\mathfrak{A}_R = \dot{\sum_{i,\,j}} (\mathfrak{C}_{ij})_R,$$

где $(\mathfrak{C}_{ij})_R$ — центрально простые J-алгебры над полем R.

Лемма 8. *Для всякой J-алгебры $\mathfrak{A}$ над полем P существует такое конечное расширение R поля P, что алгебра $\mathfrak{A}_R$ расщепляема.*

Доказательство. Из леммы 7 и п. 11 § 1 следует, что существует такое конечное расширение R поля P, что $(\mathfrak{A}_0)_R = \dfrac{\mathfrak{A}_R}{\mathfrak{N}_R} = \sigma_{01} + \ldots + \sigma_{0m}$, где σ_{0i} — разложимые J-алгебры над полем R. В силу § 3 поле R можно выбрать так, чтобы все σ_{0i} были расщепляющими J-алгебрами. Обозначим единицу алгебры σ_{0i} через e_{0i}, выберем, пользуясь леммой 3, в смежных классах e_{0i} попарно ортогональных идемпотентных представителей e_i и положим $\mathfrak{A}_i = (\mathfrak{A}_R)^{(1)}_{e_i}$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_R \cap \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Тогда $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{N}_i} \simeq \overline{\mathfrak{A}}_i = (\mathfrak{A}_{0R})^{(1)}_{e_{0i}} = \sigma_{0i}$. Так как, кроме того, e_i есть единица $\mathfrak{A}_i$, то всякое $\mathfrak{A}_i$ содержит подалгебру $\sigma_i \simeq \frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{N}_i} \simeq \sigma_{0i}$.

Покажем, что подалгебры $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_R$ образуют в $\mathfrak{A}_R$ прямую сумму. В самом деле, из $e_i \in (\mathfrak{A}_R)^{(0)}_{e_j}$ при $i \neq j$ следует $e_i\mathfrak{A}_j = 0$, $\mathfrak{A}_j \subseteq (\mathfrak{A}_R)^{(0)}_{e_i}$, откуда

$$\mathfrak{A}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathfrak{A}_j \subseteq (\mathfrak{A}_R)^{(1)}_{e_i} \cap (\mathfrak{A}_R)^{(0)}_{e_i} = 0,$$

$$\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j \subseteq (\mathfrak{A}_R)^{(1)}_{e_i} \cdot (\mathfrak{A}_R)^{(0)}_{e_i} = 0.$$

Так как $\sigma_i \subseteq \mathfrak{A}_i$, то подалгебра σ, порожденная всеми σ_i, будет их прямой суммой, т. е. $\mathfrak{A}_R \supseteq \sigma = \dot{\sum\limits_i} \sigma_i \simeq \dot{\sum\limits_i} \sigma_{0i} = \frac{\mathfrak{A}_R}{\mathfrak{N}_R}$.

Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_R$ расщепляема, и лемма 8 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, сформулированной в § 1. Для алгебр ранга 1 теорема очевидна. Пусть теорема уже доказана для J-алгебр, ранг которых меньше n, и пусть $\mathfrak{A}$ есть J-алгебра ранга n над полем P характеристики 0. Возможны два случая:

I. $\mathfrak{N}^2 \neq 0$. Докажем сначала лемму.

Лемма 9. *Для всякой J-алгебры $\mathfrak{A}$ линейное подпространство $\mathfrak{N}_1$ элементов x из $\mathfrak{N}$, являющихся полными делителями нуля в $\mathfrak{N}$, есть идеал (очевидно, отличный от нуля при $\mathfrak{N} \neq 0$) в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{A}$ содержит единицу $e = e_1 + \ldots + e_t$, где $e_1, \ldots, e_t$ — попарно ортогональные идемпотенты, причем каждое $\mathfrak{A}^{(1)}_{e_i} = \mathfrak{A}_{ii}$ имеет ранг 1 над P. Покажем, что подпространство $\mathfrak{N}_1$ есть прямая сумма своих пересечений с подпространствами $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}^{(\frac{1}{2})}_{e_i} \cap \mathfrak{A}^{(\frac{1}{2})}_{e_j}$ $(i \neq j)$. Заметим, что если $x \in \mathfrak{A}$, $x = \sum\limits_{i,j=1}^{t} x_{ij}$, где $x_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$, то, как легко проверить,

$$x_{ii} = 2(xe_i)e_i - xe_i, \quad x_{ij} = 4(xe_i)e_j \qquad (i \neq j). \tag{22}$$

Если теперь $x \in \mathfrak{N}_1$, то для любого i должно быть $x_{ii} = 0$, так как в противном случае было бы $x_{ii} = \alpha e_i = 2(xe_i)e_i - xe_i \in \mathfrak{N}$ $(\alpha \neq 0)$, т. е. $e_i \in \mathfrak{N}$, что невозможно. Далее в силу (22) при $i \neq j$: $x_{ij} \in \mathfrak{N}$. Кроме того, если $y \in \mathfrak{N}$, то

$$x_{ij}y = 4[(xe_i)e_j]y = -4[(xy)e_j]e_i - 4[(e_iy)e_j]x +$$

$$+ 4[(e_ie_j)x]y + 4[(ye_i)x]e_j + 4[(ye_j)x]e_i = 0,$$

т. е. $x_{ij} \in \mathfrak{N}_1$.

Таким образом, существует такой базис $x_1, \ldots, x_s$ подпространства $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{A}$, что всякое x_i лежит в некотором $\mathfrak{A}_{pq}$ $(p \neq q)$.

Выберем теперь такой базис $a_1, \ldots, a_n$ алгебры $\mathfrak{A}$, чтобы всякое a_j лежало в некотором $\mathfrak{A}_{kl}$ $(1 \leqslant k, l \leqslant t)$ и покажем, что при любых x_i, a_j произведение x_ia_j есть полный делитель нуля в $\mathfrak{N}$. Пусть $x_i \in \mathfrak{A}_{pq}$.

Если $a_j \in \mathfrak{A}_{kl}$, где $k, l \neq p, q$, то $x_ia_j = 0$.

Если $a_j \in \mathfrak{A}_{pq}$, то снова $x_i a_j = 0$, так как в противном случае было бы $x_i a_j = \alpha e_p + \beta e_q$ $(\alpha, \beta \in P)$, где, например, $\alpha \neq 0$. Но тогда $e_p = \frac{1}{\alpha}(x_i a_j) e_p \in \mathfrak{N}$, что невозможно.

Наконец, при $a_j \in \mathfrak{A}_{pq'}$, где $q' \neq q$ и $y \in \mathfrak{N}$ имеем:

$$(x_i a_j) y = 2[(x_i e_q) a_j] y = -2[(x_i y) a_j] e_q - 2[(e_q y) a_j] x_i + \\ + 2[(e_q a_j) x_i] y + 2[(y e_q) x_i] a_j + 2[(y a_j) x_i] e_q = 0.$$

Таким образом, всегда $x_i a_j \in \mathfrak{N}_1$ и, следовательно, в рассмотренном частном случае $\mathfrak{N}_1$ есть идеал в $\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — произвольная J-алгебра с единицей. Взяв конечное расширение R поля P так, чтобы алгебра $\mathfrak{A}_R$ удовлетворяла сделанному выше предположению (что всегда возможно, в силу § 1, п. 5), получим, что совокупность $\mathfrak{K}_1$ полных делителей нуля в радикале $\mathfrak{K} = \mathfrak{N}_R$ алгебры $\mathfrak{A}_R$ есть идеал в $\mathfrak{A}_R$. Но тогда $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{A}$ есть идеал в $\mathfrak{A}$.

Если же $\mathfrak{A}$ не содержит единицы, то, присоединяя формально к $\mathfrak{A}$ единицу e, получим J-алгебру $\mathfrak{A}^+$, радикал которой, как легко видеть, совпадает с радикалом $\mathfrak{N}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Определенное выше подпространство $\mathfrak{N}_1$, будучи идеалом в $\mathfrak{A}^+$, будет идеалом и в $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^+$. Лемма 9 доказана.

Положим теперь $\mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}_1}$. Тогда радикал $\mathfrak{N}'$ алгебры $\mathfrak{A}'$ равен $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}_1}$ и фактор-алгебра $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{N}'} \simeq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}_0$. Так как $\mathfrak{N}_1 \neq 0$, то $\mathfrak{A}'$ имеет ранг $< n$ и, по индуктивному предположению, $\mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{B}' \simeq \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{N}'} \simeq \mathfrak{A}_0$. Пусть $\mathfrak{B}$ — полный прообраз подалгебры $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{A}'$ при естественном гомоморфизме $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}_1}$. Тогда $\mathfrak{N}_1$ есть радикал $\mathfrak{B}$ и $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}_1} = \mathfrak{B}' \simeq \mathfrak{A}_0$. Так как при $\mathfrak{N}^2 \neq 0$ будет $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ и снова по индуктивному предположению $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{C} \simeq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}_1} \simeq \mathfrak{A}_0$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ содержит подалгебру $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{A}_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$.

II. $\mathfrak{N}^2 = 0$. Пользуясь леммой 8, возьмем расширение R поля P так, чтобы алгебра $\mathfrak{A}_R$ содержала подалгебру $\mathfrak{B} \simeq \frac{\mathfrak{A}_R}{\mathfrak{N}_R}$. Оставшаяся часть доказательства проводится в этом случае так же, как и для ассоциативных алгебр, так как там рассматриваются произведения не более чем двух элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Albert, Structure theory for Jordan algebras, Annals of Math., 48 (1947), 546—573.

2. A. A. Albert, The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras, Annals of Math., 48 (1947), 1—7.

Поступила 28.IX 1950 г.

Москва.