О числе L-функций, имеющих нули в некотором прямоугольнике

К. А. Родосский

Оценка сверху числа L-функций, имеющих нули вблизи прямой $\sigma=1$, впервые была дана Ю. В. Линником [2], [3] и является важной частью принадлежащего ему доказательства того, что

$$\overline{\lim_{D\to\infty}} \frac{\ln P_{\min}(l, D)}{\ln D} < \infty,$$

где $P_{\min}(l, D)$ есть наименьшее простое число в прогрессии $nD+l$, $(l, D)=1$ ([3], а также [5]).

Мы применили видоизмененную оценку Ю. В. Линника к изучению асимптотического поведения функции Чебышева $\psi(x, D, l)$ при переменном D и $\ln x \gg \ln D \cdot \ln\ln D$ [4]. В этой работе дается удобная для применений оценка числа L-функций, имеющих нули в некотором прямоугольнике.

Доказательство выгодно отличается от прежних своей простотой и дает возможность легко оценить все встречающиеся постоянные. Идея основной леммы 2 любезно сообщена автору Ю. В. Линником.

Мы вводим следующие обозначения:

$$\tau(n, D)=\sum_{\frac{d}{n}} 1, \; d>D,$$

Δ и T действительные числа, причем $0{,}9 \leqslant \Delta < 1$, $-\infty < T < \infty$ и $T_1=|T|+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Остальные обозначения разъясняются в указанной выше литературе и в тексте.

Теорема. *Пусть* $\ln D > 40$ *и* $Q(T, \Delta)$ *есть число тех L-функций с характерами по* $\operatorname{mod} D$, *которые имеют нули в прямоугольнике* (R)

$$\Delta \leqslant \sigma < 1; \quad |t-T| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (R)$$

Тогда

$$Q(T, \Delta) < 445000 \ln^8 DT_1 (D^2T_1)^{\frac{3}{\Delta}(1-\Delta)}.$$

Доказательство основывается на следующих леммах:

Лемма 1. 1) $\sum\limits_{n\leqslant x}\tau(n, D) < x\ln x$ *при* $D\geqslant 5$;

2) *при* $D\geqslant 5$, $(l, D)=1$, $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}\tau(n, D) < D^{-1}x\ln x$;

3) *при* $\ln x > 40$, $0\leqslant y\leqslant 0{,}01\,x$

$$\sum_{x+1\leqslant n\leqslant x+y}\tau(n) < 1{,}03\,y\ln x+8{,}01\sqrt{x}.$$

Доказательство. Рассмотрим 2), так как 1) доказывается аналогично.

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}\tau(n, D)=\sum_{\substack{\nu=1\\ d\nu\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}^{xD^{-1}}\sum_{d>D}^{x\nu^{-1}}1 < \frac{x}{D}\sum_{\nu=1}^{xD^{-1}}\frac{1}{\nu} < \frac{x\ln x}{D}.$$

Для доказательства 3) используется тождество (см. [1])

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}\right]-[\sqrt{x}]^2.$$

Лемма 2. *Пусть* $\chi(n)$ — *неглавный характер по* $\mathrm{mod}\,D$ *и* $\varrho=\beta+i\tau$ *есть нуль* $L(s,\chi)$, *лежащий в прямоугольнике* (R). *Тогда при* $m=\left[T_1^{\frac{1}{\Delta}}D^{\frac{2}{\Delta}}\right]$ *имеем*

$$\left|\sum_{\nu>D}^{m}\frac{\chi(\nu)\tau(\nu, D)}{\nu^{\varrho}}\right| > \frac{4}{9}.$$

Доказательство. Так как ряд, изображающий $L(\varrho, \chi)$, сходится, то

$$\left|\sum_{k\leqslant\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}\right|=\left|\sum_{k>\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}\right|=\left|\varrho\int_{\left[\frac{m}{n}\right]+1}^{\infty}\sum_{\frac{m}{n}<k\leqslant\xi}\chi(k)\frac{d\xi}{\xi^{\varrho+1}}\right| < \frac{T_1D}{2\beta}\,\frac{n^{\beta}}{m^{\beta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{n=1}^{D}\frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^{\varrho}}\sum_{k\leqslant\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}\right| < \frac{T_1D}{2\beta}\cdot\frac{D-1}{\left[T_1^{\frac{1}{\Delta}}D^{\frac{2}{\Delta}}\right]^{\beta}} < \frac{5}{9}.$$

Используя тождество

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^{\varrho}}\sum_{k\leqslant\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}=1,$$

мы получаем, что

$$\left|\sum_{n>D}^{m}\frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^{\varrho}}\sum_{k\leqslant\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}\right| > \frac{4}{9}.$$

Но так как

$$\sum_{n>D}^{m}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{\varrho}}\sum_{k\leq\frac{m}{n}}\frac{\chi(k)}{k^{\varrho}}=\sum_{n>D}^{m}\sum_{nk\leq m}\frac{\mu(n)\chi(nk)}{(nk)^{\varrho}}=\sum_{\nu>D}^{m}\frac{\chi(\nu)\tau(\nu, D)}{\nu^{\varrho}},$$

то лемма 2 доказана.

Обозначим $\nu^{-iT}\tau(\nu, D)=a_{\nu}$.

Лемма 3. *Для каждого* $L(s, \chi)$, χ — *неглавный характер по* $\bmod D$, *имеющего нуль в прямоугольнике* (R), *найдется такое* $X_{\chi}\in[D, m]$, *что*

$$\left|\sum_{D<\nu\leq X_{\chi}}a_{\nu}\chi(\nu)\right|>(4{,}002)^{-1}\ln^{-\frac{5}{4}}X_{\chi}\cdot X_{\chi}^{\beta}.$$

Доказательство. Предполагая, что при любом $\xi\in[D, m]$, имеем

$$\left|\sum_{D<\nu\leq\xi}a_{\nu}\chi(\nu)\right|\leq(4{,}002)^{-1}\ln^{-\frac{5}{4}}\xi\cdot\xi^{\beta},$$

мы получаем

$$\left|\sum_{\nu>D}^{m}\frac{a_{\nu}\chi(\nu)}{\nu^{\varrho-iT}}\right|=\left|(\varrho-iT)\int_{D}^{m}\sum_{D<\nu\leq\xi}a_{\nu}\chi(\nu)\frac{d\xi}{\xi^{\varrho+1-iT}}+m^{-\varrho+iT}\sum_{D<\nu\leq m}a_{\nu}\chi(\nu)\right|<$$

$$<2\sqrt{5}\,(4{,}002)^{-1}\ln^{-\frac{1}{4}}D<\frac{4}{9},$$

а это противоречит лемме 2.

Переходим к доказательству теоремы. Допустим, что в прямоугольнике (R) имеют нули Q_1 L-функций из числа $\varphi(D)-1$ всех L-функций по $\bmod D$ с неглавными характерами. Допустим, что $Q_1>444500\ln^{8}DT_1\ (D^{2}T_1)^{\frac{3}{\Delta}(1-\Delta)}$. (Если верно противоположное неравенство, то теорема доказана, так как $Q(T, \Delta)\leq(Q_1+1)$). Разделим сегмент $[D, m]$ на сегменты

$$\left[\frac{m}{2}, m\right];\ \left[\frac{m}{2^{2}}, \frac{m}{2}\right];\dots\left[D, \frac{m}{2^{\nu-1}}\right].$$

Очевидно, что число этих сегментов $\nu<\ln m\cdot(\ln 2)^{-1}$. Тогда в один из этих сегментов попадет $Q_2>\ln 2\cdot Q_1(\ln m)^{-1}$ чисел X_{χ}, принадлежащих различным L-функциям. Этот сегмент мы и будем в дальнейшем рассматривать. Очевидно, что он имеет вид $[Y, Y_1]$, где $Y_1\leq 2Y$ и $Y\in\left[D, \frac{m}{2}\right]$. Возьмем $H=9^{-1}\ln^{-\frac{5}{4}}Y\cdot Y^{\Delta}$ и построим новые сегменты $[X_{\chi}-H, X_{\chi}]$ и $[X_{\chi}, X_{\chi}+H]$. Один из двух этих сегментов, целиком лежащий в $[Y, Y_1]$, назовем $S(\chi)$. Используя лемму 1 (3), для каждого $x \in S(\chi)$ получаем следующие неравенства:

$$\left|\sum_{D<\nu\leq x} a_\nu\chi(\nu)\right| > \left|\sum_{D<\nu\leq X_\chi} a_\nu\chi(\nu)\right| - \sum_{\nu\in[X_\chi; x]} |a_\nu\chi(\nu)| >$$

$$> \frac{X_\chi^\Delta}{4{,}002\ln^{\frac{5}{4}} X_\chi} - \frac{1{,}03\,Y^\Delta}{9\ln^{\frac{5}{2}} Y}\ln X_\chi - 8{,}01\sqrt{X_\chi} >$$

$$> \frac{(x-H)^\Delta}{4{,}002\ln^{\frac{5}{4}} x} - \frac{1{,}03\,x^\Delta}{9\ln^{\frac{5}{2}} x}\ln(x+H) - 8{,}01\sqrt{x+H} > \frac{x^\Delta}{5\ln^{\frac{5}{4}} x},$$

так как $\ln x > 40$.

Общая длина всех сегментов $S(\chi)$ для всех наших характеров равна $Q_2H = 9^{-1}\ln^{-\frac{5}{2}} Y\cdot Y^\Delta Q_2$, и они расположены на сегменте $[Y, Y_1]$, длина которого не превосходит Y. Следовательно, они перекрываются в количестве

$$Q_3 > Q_2HY^{-1} = 9^{-1}\ln^{-\frac{5}{2}} Y\cdot Y^{\Delta-1} Q_2.$$

Следовательно, по меньшей мере для Q_3 L-функций найдется общая точка $X_\chi = X_0$ такая, что

$$\left|\sum_{D<\nu\leq X_0} a_\nu\chi(\nu)\right| > 5^{-1}\ln^{-\frac{5}{4}} X_0\cdot X_0^\Delta$$

для всех Q_3 характеров χ_α. Для таких характеров из последнего неравенства мы получаем:

$$\sum_{\chi_\alpha}\left|\sum_{D<\nu\leq X_0} a_\nu\chi(\nu)\right|^2 > 25^{-1}\ln^{-\frac{5}{2}} X_0\cdot X_0^{2\Delta}\cdot Q_3. \tag{1}$$

С другой стороны, суммируя по всем характерам $\operatorname{mod} D$ и пользуясь леммой I, (1), (2), мы получаем:

$$\sum_{(\chi)}\left|\sum_{D<\nu\leq X_0} a_\nu\chi(\nu)\right|^2 = \sum_{D<\nu\leq X_0} a_\nu \sum_{D<\mu\leq X_0}\bar{a}_\mu\sum_{(\chi)}\chi(\nu)\bar{\chi}(\mu) \leq$$

$$\leq D\sum_{D<\nu\leq X_0}|a_\nu|\sum_{\substack{D<\mu\leq X_0\\ \mu\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ D)}}|a_\mu| \leq X_0^2\ln^8 X_0, \tag{2}$$

так как $|a_\nu| \leq \tau(\nu, D)$.

Сравнивая оценки (1) и (2), находим

$$Q_3 < 25\ln^{\frac{9}{2}} X_0\cdot X_0^{2(1-\Delta)}.$$

Отсюда находим для $Q(T, \Delta)$

$$Q(T, \Delta) \leq Q_1 + 1 < 444600\ln^8 DT_1(D^2T_1)^{\frac{3}{\Delta}(1-\Delta)},$$

и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, гл. II (1949).
2. Ю. В. Линник, Матем. сборник, т. 15 (57), № 1 (1944).
3. Ю. В. Линник, Матем. сборник, т. 15 (57), № 2, 3 (1944).
4. К. А. Родосский, Известия Академии наук, сер. матем., 13 (1949).
5. Н. Г. Чудаков и К. А. Родосский, Успехи матем. наук, т. IV (1949).

Поступила 28.II 1951 г.

Саратов.