1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# О кольцах функций с равномерной сходимостью

*Г. Е. Шилов*

## § 1. Обобщение теоремы Стона

Мы будем рассматривать полное нормированное кольцо $L$, состоящее из комплексно-значных непрерывных функций $x(t)$, определенных на некотором бикомпакте (бикомпактном хаусдорфовом пространстве) $G$, с нормой

$$\|x(t)\| = \max_G |x(t)|. \tag{1}$$

Полнота кольца $L$ по норме (1) означает, очевидно, что совокупность функций $x(t) \in L$ замкнута относительно равномерной сходимости.

Говорят, что в кольце $L$ выполнено *условие отделимости*, если для любых двух различных точек $t_1, t_2 \in G$ в кольце $L$ есть функция $x(t)$, удовлетворяющая неравенству $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Кольцо $L$ называется *симметричным*, если вместе со всякой функцией $x(t)$ в нем содержится и комплексно сопряженная функция $\overline{x(t)}$.

Известная теорема Стона [1; 2, стр. 70—73] утверждает, что *всякое симметричное кольцо $L$ с условием отделимости содержит все непрерывные функции на бикомпакте $G$*.

В общем случае, когда кольцо $L$ удовлетворяет условию отделимости, но не симметрично, оно содержит не все непрерывные функции на бикомпакте $G$. Мы хотим и для этого случая сформулировать некоторую теорему, которая будет естественным обобщением теоремы Стона.

Пусть нам дано некоторое симметричное подкольцо $\mathcal{A}$ кольца $L$ (разумеется, уже не удовлетворяющее условию отделимости; одно такое кольцо, правда мало интересное, существует всегда — именно, подкольцо, образованное константами). Две точки $t_1$ и $t_2$ бикомпакта $G$ мы называем *$\mathcal{A}$-эквивалентными*, если для всякой функции $x(t) \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $x(t_1) = x(t_2)$. Соотношение $\mathcal{A}$-эквивалентности транзитивно и поэтому бикомпакт распадается на некоторую совокупность $\Gamma$ классов $\mathcal{A}$-эквивалентных точек. Каждый отдельный класс $\mathcal{A}$-эквивалентных точек будем обозначать через $\tau$ ($\tau_1$, $\tau_2$ и т. д.). Класс $\tau$, содержащий заданную точку $t \in G$, обозначим через $\tau(t)$. Функции кольца $\mathcal{A}$ можно считать определенными на множестве $\Gamma$: $x(t) \sim x(\tau)$.

При помощи функций $x(\tau)$ в множество $\Gamma$ вводится обычным образом топология; при этом $\Gamma$ становится хаусдорфовым бикомпактным пространством, непрерывным образом исходного бикомпакта $G$, а функции $x(\tau)$ — непрерывными функциями на $\Gamma$ (см., например, [2, стр. 96—98]).

Кольцо $\Lambda$ на бикомпакте $\Gamma$ симметрично и удовлетворяет условию отделимости. Поэтому, в силу теоремы Стона, оно содержит все функции $x(\tau)$, непрерывные на бикомпакте $\Gamma$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть $U \subset G$ некоторая область, содержащая класс $\tau_0 = \tau(t_0)$. Существует такая окрестность $V$ точки $\tau_0 \in \Gamma$, что любой класс $\tau \in V$ целиком принадлежит области $U$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда мы сможем построить последовательность точек $\{\tau_\alpha\}$ (трансфинитно), сходящуюся к точке $\tau_0$ так, что в каждом из классов $\tau_\alpha$ можно будет выбрать по точке $t_\alpha$, не входящей в область $U$. В силу бикомпактности $G$ можно считать, что последовательность $t_\alpha$ сходится к некоторой точке $t_0'$, которая, очевидно, также не будет принадлежать к области $U$. В таком случае класс $\tau_0' = \tau(t_0') \neq \tau_0$. В кольце $\Lambda$ есть функция $x(\tau)$, принимающая в точках $\tau_0$ и $\tau_0'$ различные значения, например равная нулю в точке $\tau_0$ и единице в точке $\tau_0'$. Рассмотрим соответствующую функцию $x(t) \in L$. В точке $t_0'$ она принимает значение 1, и, следовательно, в точках $t_\alpha$, близких к $t_0'$, принимает значения, близкие к 1. С другой стороны, эта функция в точках $t_\alpha$ должна принимать такие же значения, какие принимает функция $x(\tau)$ в точках $\tau_\alpha$. Так как $\tau_\alpha \to \tau_0$, а функция $x(\tau)$ непрерывна на $\Gamma$, то значения $x(t_\alpha) = x(\tau_\alpha)$, должны быть близкими к нулю. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости утверждения леммы.

Теперь рассмотрим в кольце $L$ идеал $J(\tau_0)$, образованный из всех функций $x(t) \in L$, которые равны нулю на классе $\tau_0$.

Нас будет в основном интересовать кольцо вычетов $L/J(\tau_0)$. Сравнимость двух функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ по идеалу $J(\tau_0)$ означает, что разность $x_1(t) - x_2(t)$ равна нулю на классе $\tau_0$, или, что то же самое, что функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на классе $\tau_0$ совпадают. Поэтому кольцо вычетов $L/J(\tau_0)$ можно рассматривать как кольцо функций $\tilde{x}(t)$, заданных на классе $\tau_0$ и продолжаемых на весь бикомпакт $G$ до функций $x(t) \in L$. Норма каждой функции $\tilde{x}(t)$ согласно определению нормы класса вычетов равна точной нижней грани норм функций $x(t) \in L$, совпадающих на множестве $\tau_0$ с функцией $\tilde{x}(t)$. Покажем, что *эта норма равна максимуму модуля функции* $\tilde{x}(t)$. Пусть $\varepsilon > 0$ заданное число. Найдем область $U \supset \tau_0$ так, чтобы для заданной функции $x(t) \in L$, совпадающей на классе $\tau_0$ с функцией $\tilde{x}(t)$, выполнялось неравенство

$$\max_U |x(t)| < \max_{\tau_0} |x(t)| + \varepsilon.$$

Выберем теперь, используя лемму 1, такую окрестность $V$ точки $\tau_0 \in \Gamma$, чтобы любой класс $\tau(t)$ для $t \in V$ целиком содержался бы в области $U$.

Затем построим в кольце $\mathcal{A}$ функцию $h(\tau)$, обладающую следующими свойствами:

1) $0 \leqslant h(\tau) \leqslant 1$; 2) $h(\tau_0)=1$; 3) $h(\tau)=0$ вне $V$.

Рассмотрим произведение соответствующей функции $h(t) \in R$ на функцию $x(t)$. Так как $h(\tau_0)=1$, это произведение на классе $\tau_0$ совпадает с функцией $x(t)$ и, следовательно, с функцией $\tilde{x}(t)$. По построению $h(\tau)$ это произведение может быть отличным от нуля только в тех точках $t$, которые входят в классы $\tau \in V$. В частности, оно обращается в нуль всюду вне области $U$. При этом, поскольку $0 \leqslant h(\tau) \leqslant 1$,

$$\max_U |x(t)\, h(t)| \leqslant \max_U |x(t)| \leqslant \max_{\tau_0} |x(t)| + \varepsilon,$$

а следовательно, и

$$\max_G |x(t)\, h(t)| \leqslant \max_{\tau_0} |x(t)| + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ может быть взято произвольно малым, то

$$\|\tilde{x}(t)\| \leqslant \max_{\tau_0} |\tilde{x}(t)|. \tag{2}$$

Но из самого определения $\|\tilde{x}(t)\|$ вытекает, что заведомо справедливо и неравенство

$$\|\tilde{x}(t)\| \geqslant \max_{\tau_0} |\tilde{x}(t)|. \tag{3}$$

Комбинируя (2) и (3), находим

$$\|\tilde{x}(t)\| = \max_{\tau_0} |\tilde{x}(t)|,$$

что и требовалось.

Таким образом, *кольцо вычетов $L/J(\tau_0)$ является снова кольцом функций с равномерной сходимостью.*

Теперь мы можем сформулировать теорему, которая обобщает приведенную выше теорему Стона.

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ функция, заданная на бикомпакте $G$ и обладающая следующими свойствами:*

*(1) $f(t)$ на каждом классе $\tau$ является элементом соответствующего кольца $L/J(\tau)$;*

*(2) $f(t)$ непрерывна на всем $G$.*

*Тогда функция $f(t)$ входит в кольцо $L$.*

Остановимся, чтобы доказать предварительно две леммы.

Лемма 2. *Пусть $l(\tau) \geqslant 0$ непрерывная функция на некотором бикомпакте $\Gamma$. Пусть $B_1$ и $B_2$ — замкнутые подмножества бикомпакта $\Gamma$, причем на пересечении $B_1 B_2$ функция $l(\tau)$ обращается в нуль. Утверждается, что существует непрерывная функция $h(\tau)$, равная $l(\tau)$ на $B_1$, равная нулю на $B_2$ и заключенная между 0 и $l(\tau)$ на всем бикомпакте $\Gamma$.*

Доказательство. Функция $l'(\tau)$, определенная на $B_1+B_2$ формулой

$$l'(\tau)=l(\tau) \quad \text{на } B_1,$$
$$l'(\tau)=0 \quad \text{на } B_2,$$

непрерывна на $B_1+B_2$. По лемме Урысона [3, стр. 133—134] она может быть продолжена на весь бикомпакт $\Gamma$ с сохранением непрерывности и неотрицательности. Тогда функция $h(\tau)=\min\{l'(\tau), l(\tau)\}$, очевидно, будет удовлетворять условиям леммы.

В дальнейшем непрерывные функции, все значения которых вещественны и заключены между нулем и единицей, мы будем называть *нормальными*.

Лемма 3. *Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — покрытие бикомпакта $\Gamma$ открытыми множествами. Утверждается, что существуют нормальные функции $h_1(\tau), h_2(\tau), \ldots, h_n(\tau)$, обладающие следующими свойствами:*

(1) $h_k(\tau)=0$ вне $V_k$,

(2) $h_1(\tau)+h_2(\tau)+\ldots+h_n(\tau)=1$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутые множества $Q_k=\Gamma-V_k$, $\Phi_k=\Gamma-(V_{k+1}+\ldots+V_n)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ (в частности, $\Phi_0$ пусто, $\Phi_n=\Gamma$).

Легко проверить, что пересечение $Q_1$ с $\Phi_1$ пусто, а пересечение $Q_k$ с $\Phi_k$ совпадает с множеством $\Phi_{k-1}$. В силу леммы Урысона существует нормальная функция $h_1(\tau)$, равная 1 на $\Phi_1$ и 0 на $Q_1$. Допустим, что уже построены нормальные функции $h_1(\tau), \ldots, h_{k-1}(\tau)$ так, что выполнены условия

(1) $h_j(\tau)=0$ на $Q_j$ $\quad (j=1, 2, \ldots, k-1)$

(2) $h_1(\tau)+\ldots+h_{k-1}(\tau)$ нормальна и равна 1 на $\Phi_{k-1}$.

Функция $l_k(t)=1-h_1(\tau)-\ldots-h_{k-1}(\tau)$ в силу этих предположений также нормальна и на $\Phi_{k-1}$ равна нулю. По лемме 2 существует (очевидно, нормальная) функция $h_k(\tau)$, равная $l_k(\tau)$ на $\Phi_k$ и равная нулю на $Q_k$ и не превосходящая $l_k(\tau)$. Тогда сумма $h_1(\tau)+h_2(\tau)+\ldots+h_{k-1}(\tau)+$ $+h_k(\tau)$ также нормальна и равна 1 на $\Phi_k$. Следовательно, мы можем индуктивным путем фактически построить нормальные функции $h_1(\tau), h_2(\tau), \ldots, h_k(\tau), \ldots, h_n(\tau)$, удовлетворяющие для каждого $k$ условиям (1)—(2). С построением последней из этих функций и констатированием равенства

$$h_1(\tau)+h_2(\tau)+\ldots+h_n(\tau)=1 \quad \text{на} \quad \Phi_n=\Gamma$$

доказательство леммы 3 завершено.

Переходим к доказательству теоремы 1. Выберем число $\varepsilon>0$ и рассмотрим какой-нибудь класс $\tau_0$. По условию, функция $f(t)$ на этом классе совпадает с некоторой функцией $x_0(t)\in L/J(\tau_0)$. Так как и $f(t)$ и $x_0(t)$ непрерывны на $G$, то можно найти область $U_0\supset\tau_0$, в пределах которой выполняется неравенство

$$|f(t)-x_0(t)|<\varepsilon.$$

Согласно лемме 1 у точки $\tau_0 \in \Gamma$ имеется окрестность $V_0$ такая, что из $\tau \in V_0$ вытекает $\tau \subset U$.

Эти окрестности, построенные для каждой точки $\tau_0 \in \Gamma$, образуют покрытие пространства $\Gamma$. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Соответствующие функции в кольце $L$ обозначим через $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$, а области бикомпакта $G$ — через $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Для конечного покрытия $V_1, V_2, \ldots, V_n$ построим нормальные функции $h_1(\tau)$, $h_2(\tau), \ldots, h_n(\tau)$, как указано в лемме 3.

Составим разность

$$f(t) - \sum h_k(t)\, x_k(t).$$

Так как $\Sigma h_k(t) \equiv 1$, то

$$\left| f(t) - \sum h_k(t)\, x_k(t) \right| = \left| \sum h_k(t)\,[f(t) - x_k(t)] \right| \leqslant \sum h_k(t) \left| f(t) - x_k(t) \right|. \quad (4)$$

В каждой точке $t$ могут быть отличными от нуля лишь такие слагаемые в сумме (4), для которых $t \subset U_k$. Но для этих слагаемых по построению $|f(t) - x_k(t)| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что в любой точке $t \in G$ сумма (4) не превосходит $\varepsilon$. Итак, всюду на $G$ имеет место неравенство

$$\left| f(t) - \sum h_k(t)\, x_k(t) \right| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, а функции $h_k(t)\, x_k(t)$ принадлежат кольцу $L$, то функция $f(t)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из кольца $L$. Так как $L$ полно, то $f(t) \in L$, что и требовалось.

## § 2. Применение к задаче о подкольцах кольца $C$ на единичном круге комплексной плоскости

Обозначим через $A$ кольцо всех функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| \leqslant 1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, и через $C$ кольцо всех непрерывных функций в круге $|z| \leqslant 1$; кольцо $A$ является замкнутым (относительно равномерной сходимости) подкольцом кольца $C$.

Обозначим через $\{A, \Sigma\}$ наименьшее замкнутое подкольцо кольца $C$, содержащее все кольцо $A$ и еще некоторую заданную совокупность $\Sigma$ непрерывных функций.

Например, если совокупность $\Sigma$ состоит из одной единственной функции $f(z) = Re\, z = x$, то $\{A, x\}$, очевидно, совпадает со всем кольцом $C$, так как содержит и $x$ и $iy = z - x$. Если совокупность $\Sigma$ состоит из одной функции $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\{A, |z|\}$ заведомо не совпадает с кольцом $C$. Действительно, если ограничиться окружностью $|z| = 1$, то при переходе к кольцу $\{A, |z|\}$ на этой окружности к запасу функций кольца $A$ фактически ничего не присоединяется, а этот запас, как известно, далеко не содержит всех непрерывных функций на окружности

$|z|=1$ (в то время как запас функций кольца $C$ на окружности $|z|=1$ содержит все непрерывные функции на этой окружности).

*Мы выведем в этом параграфе необходимое и достаточное условие равенства $\{A, \Sigma\}=C$, в предположении, что функции, входящие в совокупность $\Sigma$, вещественны.*

Назовем замкнутое множество $S$, лежащее в круге $|z|\leqslant 1$, *допустимым*, если выполняются следующие условия:

(1) $S$ не содержит внутренних точек;

(2) из всякой точки $z_0 \overline{\in} S$ можно провести непрерывную линию, не пересекающую $S$ и доходящую до окружности $|z|=1$.

Пусть $S$ некоторое замкнутое множество, расположенное в единичном круге. Введем для полиномов $P(z)$ норму по формуле

$$\|P(z)\|=\max_S |P(z)|$$

и произведем по этой норме пополнение; обозначим полученное нормированное кольцо (составленное, очевидно, из непрерывных функций на множестве $S$) через $R(S)$. Докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Кольцо $R(S)$ совпадает с кольцом $C(S)$ всех непрерывных функций на множестве $S$ тогда и только тогда, когда $S$ допустимо.*

Доказательство. Если $S$ допустимо, то, по известной теореме М. А. Лаврентьева [4; 5, стр. 418], каждая непрерывная функция, определенная на $S$, является пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов от $z$; таким образом, кольцо $R(S)$ в этом случае содержит все непрерывные функции.

Если $S$ не допустимо и, например, имеет внутреннюю точку $z_0$, то каждая функция $f(z) \in R(S)$ аналитична в окрестности точки $z_0$; таким образом, $R(S) \neq C(S)$. Остается рассмотреть случай, когда $S$ ограничивает некоторую область $U$, не имеющую выхода к окружности $|z|=1$. В этом случае множество максимальных идеалов кольца $R(S)$ содержит $S$ и все точки множества $U$ [6]. Но если бы мы имели $R(S)=C(S)$, то множество максимальных идеалов кольца $R(S)$ состояло бы *только* из точек множества $S$, как это имеет место для всякого кольца $C(S)$ на любом бикомпакте $S$ [2, стр. 55]. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости утверждения леммы.

Введем следующее определение.

Две точки $z_1$ и $z_2$, находящиеся в единичном круге $|z|\leqslant 1$, мы назовем *$\Sigma$-эквивалентными*, если для всякой функции $f(z)\in\Sigma$ имеет место равенство $f(z_1)=f(z_2)$.

Соотношение $\Sigma$-эквивалентности, очевидно, транзитивно, и поэтому весь круг $|z|\leqslant 1$ разбивается на классы взаимно $\Sigma$-эквивалентных точек. В частности, если $\Sigma$ состоит из одной единственной функции $f_0(z)$, то каждый класс представляет собою некоторое множество уровня функции $f_0(z)$. В общем случае каждый класс является некоторым замкнутым множеством в круге $|z|\leqslant 1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы имело место равенство $\{A, \Sigma\} = C$, необходимо и достаточно, чтобы каждый класс $\Sigma$-эквивалентных точек был бы допустимым множеством.*

Доказательство необходимости условия. Предположим, что некоторый класс $S$ $\Sigma$-эквивалентных точек не является допустимым. Тогда, в силу леммы 4, существует функция $f(z) \in C(S)$, которая не может быть получена как предел последовательности полиномов, равномерно сходящейся на множестве $S$. Функцию $f(z)$ можно продолжить как непрерывную функцию на весь круг $|z| \leqslant 1$. Покажем, что она не может принадлежать к кольцу $\{A, \Sigma\}$.

Допуская противное, мы смогли бы указать последовательность функций вида

$$F_n(z) = P_1^{(n)}(z) f_1^{(n)}(z) + \ldots + P_{m_n}^{(n)}(z) f_{m_n}^{(n)}(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

равномерно при $|z| \leqslant 1$ сходящуюся к $f(z)$; при этом $P_k^{(n)}(z)$ — полиномы от $z$, $f_k^{(n)}(z)$ — элементы подкольца, порожденного функциями совокупности $\Sigma$. В частности, эта последовательность сходилась бы равномерно и на множестве $S$. Но на множестве $S$ все функции $f_k^{(n)}(z)$ обращаются в константы; мы получили бы, таким образом, последовательность полиномов от $z$, равномерно сходящуюся на множестве $S$ в функции $f(z)$, что противоречит предположению.

Доказательство достаточности условия. Кольцо $L = \{A, \Sigma\}$ состоит из непрерывных функций, заданных на бикомпакте $G = \{|z| \leqslant 1\}$. Применим к нему результат теоремы 1, используя в качестве подкольца $\Gamma$ подкольцо, порожденное функциями совокупности $\Sigma$. В этом случае классы $\Gamma$-эквивалентных точек будут совпадать с классами $\Sigma$-эквивалентных точек. В силу теоремы 1 кольцо $\{A, \Sigma\}$ содержит каждую непрерывную функцию $F(z)$, принадлежащую к кольцу $L/J(S)$ на каждом классе $S$. Но мы видели в § 1, что каждое кольцо вычетов представляет собою кольцо функций на множестве $S$, которые продолжаются на весь бикомпакт $G$ до функций из кольца $L$. Таким образом, в данном случае кольцо $L/J(S)$ заведомо содержит все полиномы $P(z)$. Далее, мы видели, что кольцо $L/J(S)$ замкнуто относительно равномерной сходимости на множестве $S$. Поэтому в данном случае, в силу предположенной допустимости множества $S$ и используя лемму 4, мы получаем, что кольцо $L/J(S)$ содержит все непрерывные функции на множестве $S$. Применяя результат теоремы 1, мы получаем, что любая непрерывная функция в круге $|z| \leqslant 1$ входит в кольцо $L$, что и требуется.

Один очень частный случай этой теоремы — именно, когда совокупность $\Sigma$ состоит из двух сопряженных гармонических функций — указан недавно Я. И. Хургиным [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Stone, Applications of the theory of Boolean Rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937).

2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца. Успехи матем. наук, 1 : 2 (12) (1946).

3. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937.

4. М. А. Лаврентьев, К теории конформных отображений, Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова, Отдел математический, т. 5, изд. Академии наук СССР, 1934.

5. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.

6. Г. Е. Шилов, О нормированных кольцах с одной образующей, Математический сборник, 21 (63) : 1 (1947).

7. Я. И. Хургин, О подкольцах кольца непрерывных функций в круге. Ученые записки Московского гос. университета, серия математическая, т. 3 (1950).

Поступила 20.IV 1951 г. Киев.