1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам

Ю. М. Березанский

Пусть $f(\theta)$ четная периодическая с периодом 2π функция, а

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} f_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\theta \tag{1}$$

ее разложение в ряд Фурье. Сделаем замену переменного, полагая $\theta = \arccos t$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда разложение (1) перейдет в разложение функции $x(t) = f(\arccos t)$ по ортонормированным полиномам Чебышева 1-го рода, определяемым равенствами $T_0(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n \arccos t$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Подобное разложение называется абсолютно сходящимся, если

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} |f_0| + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-1}^{1} x(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \mu_n < \infty \quad \left(\mu_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}},\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

По аналогии с этим понятием будем называть разложение функции $x(t)$ в ряд по ортонормированным полиномам $P_n(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ μ-абсолютно сходящимся, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-1}^{1} x(t) P_n(t)\, d\sigma(t) \right| \mu_n < \infty, \text{ где } 0 < \mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 < \ldots$$

фиксированная последовательность чисел такая, что $\frac{P_n(t)}{\mu_n}$ равномерно по $t \in [-1, 1]$ ограничены. Примером подобных разложений могут служить разложения по ортонормированным полиномам, являющимся с точностью до множителя зональными функциями некоторых групп (см. [1]).

В статье рассматриваются разложения в μ-абсолютно сходящиеся ряды по полиномам, не являющимся зональными функциями. Основные результаты (см. § 3) о разложениях по полиномам, „близким" к специальным типам ультрасферических полиномов, в частности к полиномам Чебышева и Лежандра, получены при помощи рассмотрения операторов преобразования. Общая теорема о непрерывности таких операторов установлена в § 2; § 1 носит вспомогательный характер.

§ 1. Кольцо $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$, некоторые примеры

1°. Обозначим через Q замкнутое ограниченное множество на вещественной оси $-\infty < t < \infty$, пусть $d\sigma$ неотрицательная конечная мера на нем, а $\{P_0(t), P_1(t), \ldots\}$ ортонормированная, очевидно полная, система полиномов на Q. Рассмотрим неубывающую последовательность положительных чисел $0 < \mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$ такую, что $P_j(t)/\mu_j$ равномерно по $j=0,1,\ldots$ и $t \in Q$ ограничены. Не трудно видеть, что совокупность функций $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j(t)$ $(t \in Q)$, для которых $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \mu_j < \infty$, образует полное нормированное пространство $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ относительно нормы $\|x\| = \sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \mu_j$; отметим, что каждая $x(t) \in \mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ непрерывна.

Будем предполагать, что вместе с

$$x(t),\ y(t) \in \mathcal{A}\{d\sigma, \mu\} \quad \text{и} \quad x(t)\, y(t) \in \mathcal{A}\{d\sigma, \mu\},$$

причем

$$\|xy\| = \|x(t)\, y(t)\| \leqslant \|x\| \|y\|. \tag{1,1}$$

В этом случае пространство $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ является коммутативным нормированным кольцом с единицей [2]1). Замечая, что $\|P_j\| = \mu_j$ $(j=0, 1, \ldots)$, не трудно убедиться, что для того, чтобы $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ было нормированным кольцом, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\|P_j P_k\| \leqslant \mu_j \mu_k \qquad (j, k = 0, 1, \ldots). \tag{2,1}$$

Введем в $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ инволюцию, полагая $x^*(t) = \overline{x(t)}$. Отметим, что кольцо $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$, вообще говоря, несимметрично относительно этой инволюции 2).

Структура пространства максимальных идеалов кольца $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ устанавливается следующей леммой:

Лемма 1.1. *Пространство* $\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ *максимальных (симметрических максимальных) идеалов кольца* $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ *состоит из всех точек* z *комплексной плоскости (вещественной оси) таких, что* $P_j(z)/\mu_j$ $(j=0, 1, \ldots)$ *ограничены; при этом топология в* $\mathfrak{M}$ *обычная и*

$$x(M_z) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j(z) \qquad (z \in \mathfrak{M}). \tag{3,1}$$

---

1) $1 \in \mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$, так как полином $P_0(t)$ ей кратен.

2) Напомним, что кольцо с инволюцией называется симметрическим, если $(e + x^*x)^{-1}$ всегда существует, или, иными словами, если для каждого максимального идеала M $M^* = M$. В общем случае подобные максимальные идеалы называются симметрическими.

В самом деле, пусть комплексное число z_0 таково, что $P_j(z_0)/\mu_j$ ограничены. Отнесем функции $x(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j P_j(t)$ число $x(z_0)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j P_j(z_0)$; соответствие $x \to x(z_0)$, очевидно, мультипликативно и поэтому порождает максимальный идеал. Наоборот, пусть M некоторый максимальный идеал. Так как

$$x(M)=\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j(t)\right)(M)=\sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j[t(M)],$$

то этот максимальный идеал порождается точкой $z=t(M)$ комплексной плоскости. При этом последовательность $P_j(z)/\mu_j$ ограничена, так как $|P_j(z)|=|P_j(M)|\leqslant\|P_j\|=\mu_j$.

Совпадение топологий пространства $\mathfrak{M}$ и комплексной плоскости следует из того, что если $t(M_1)=t(M_2)$ $(M_1,\ M_2\in\mathfrak{M})$, то и $M_1=M_2$, так как t образующая кольца $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$. Наконец, утверждение относительно пространства $\mathfrak{N}$ вытекает из того, что образующая t является эрмитовым (т. е. $t^*=\bar{t}=t$) элементом кольца $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ и поэтому $t(M)$ вещественно, если M симметрический максимальный идеал. Лемма доказана.

Из доказательства леммы вытекают:

Замечание 1. Множество $\mathfrak{M}$ расположено в круге комплексной плоскости радиуса $\|t\|$. Пользуясь выражениями полиномов $P_j(t)$ через моменты $\sigma_k=\int\limits_Q t^k\,d\sigma(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ (см. [3], стр. 26), последнее число легко подсчитать. В самом деле $P_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}$, $P_1(t)=\frac{\sigma_0 t-\sigma_1}{\sqrt{\sigma_0(\sigma_0\sigma_2-\sigma_1^2)}}$, поэтому

$$\|t\|=\left|\int tP_0(t)\,d\sigma(t)\right|\mu_0+\left|\int tP_1(t)\,d\sigma(t)\right|\mu_1\,[1]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}\left[|\sigma_1|\mu_0+|\sigma_0\sigma_2-\sigma_1^2|^{\frac{1}{2}}\mu_1\right]. \qquad (4,1)$$

Замечание 2. Кольцо $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ не содержит радикала. Это непосредственно следует из формулы (3,1), так как при $t\in Q$ $x(M_t)=x(t)$.

2°. Как уже указывалось, кольцо $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$, вообще говоря, несимметрично. Поэтому представляет интерес следующая

Теорема 1. *Если числа* μ_j *ограничены, то кольцо* $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ *симметрично.*

Доказательство. Пусть M некоторый максимальный идеал, порождаемый точкой z комплексной плоскости. Нам нужно убедиться в равенстве $x^*(M)=\overline{x(M)}$ $(x\in\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\})$, или, как это вытекает из формулы (3,1), в равенстве $\overline{P_j(z)}=P_j(z)$ $(j=0,1,\ldots)$. Для доказатель-

---

[1] Интегралы распространены по множеству Q. Во всем дальнейшем мы будем опускать обозначение области интегрирования, если такой областью является Q.

ства зафиксируем j, имеем

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N}|P_k(z)|^2}\sum_{k,\,l=0}^{N}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)=$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N}|P_k(z)|^2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)-$$

$$-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N}|P_k(z)|^2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=N+1}^{\infty}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)=P_j(z)-\qquad(5,1)$$

$$-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N}|P_k(z)|^2}\sum_{k=N-j+1}^{N}\;\sum_{l=N+1}^{N+j}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z).$$

Здесь мы воспользовались тем легко проверяемым фактом, что $\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)$ отлично от нуля только при $|j-k|\leqslant l\leqslant j+k$.

Из ограниченности чисел μ_j легко следует, что $P_j(t)$ $(t\in Q)$ и $P_j(z)$ равномерно ограничены, но тогда сумма

$$\sum_{k=N-j+1}^{N}\;\sum_{l=N+1}^{N+j}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)$$

ограничена по N. Вместе с тем, как известно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|P_k(z)|^2$ при невещественном z[1] расходится, поэтому из (5,1) следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N}|P_k(z)|^2}\sum_{k,\,l=0}^{N}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)=P_j(z).$$

С другой стороны, легко видеть, что числа

$$\sum_{k,\,l=0}^{\infty}\int P_j(t)\,P_k(t)\,P_l(t)\,d\sigma(t)\,\overline{P_k(z)}\,P_l(z)$$

вещественны. Этим теорема доказана.

3°. В этом и последующих пунктах мы рассмотрим некоторые примеры колец $\Lambda\{d\sigma,\mu\}$.

Рассмотрим группу вращений, когда m четно, и группу вращений и симметрических отражений, когда m нечетно, m-мерной сферы в $m+1$-мерном эвклидовом пространстве. Как известно [1], системой зональных функций в рассматриваемом случае будет система ортогональных полиномов $U_n^{(m)}(t)$ на сегменте $[-1,1]$ относительно веса $(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\,dt$, нормированных условием $U_n^{(m)}(1)=1$. Пользуясь извест-

---

[1] Если точка z вещественна, то равенство $\overline{P_j(z)}=P_j(z)$ очевидно.

ными соотношениями для полиномов Якоби ([3], стр. 57 и 67), не трудно подсчитать, что

$$\left(\int\limits_{-1}^{1}[U_n^{(m)}(t)]^2\,(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}=\mu_n=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left[\frac{1}{n!}(2n+m-1)\,\Gamma(n+m-1)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (6,1)$$

Как известно [1,4], пространство $\mathcal{A}\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\,dt,\mu\}$ функций на $[-1,1]$, построенное по только что определенным числам μ_n, является нормированным кольцом относительно обычных алгебраических операций, причем пространством максимальных идеалов этого кольца служит сегмент $[-1,1]$.

Отметим, что в частном случае $m=1$, 2, 3 мы получаем соответственно полиномы Чебышева 1-го рода, полиномы Лежандра и полиномы Чебышева 2-го рода.

4°. Предположим, что Q и мера $d\sigma$ таковы, что ортонормированные полиномы $P_j(t)$ равномерно по $j=0, 1,\ldots$ и $t\in Q$ ограничены некоторой константой. В этом случае удается построить целые серии чисел μ_j, для которых пространства $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ являются нормированными кольцами.

В самом деле, при помощи известных формул для суммы синусов легко проверить, что

$$\sum_{l=|j-k|}^{j+k}\frac{\sin(2l+1)z}{\sin z}=\frac{\sin(2j+1)z}{\sin z}\,\frac{\sin(2k+1)z}{\sin z}.$$

Полагая здесь $z=0$ и $z=iB$, $B>0$, получим

$$\sum_{l=|j-k|}^{j+k}(2l+1)=(2j+1)\,(2k+1),\quad \sum_{l=|j-k|}^{j+k}\frac{\operatorname{sh}(2l+1)B}{\operatorname{sh}B}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}(2j+1)B}{\operatorname{sh}B}\,\frac{\operatorname{sh}(2k+1)B}{\operatorname{sh}B}. \qquad (7,1)$$

Применяя известное неравенство Иенсена, из первого из соотношений (7,1) получим

$$\sum_{l=|j-k|}^{j+k}(2l+1)^A\leqslant\left[\sum_{l=|j-k|}^{j+k}(2l+1)\right]^A=(2j+1)^A\,(2k+1)^A\quad (A\geqslant 1). \qquad (8,1)$$

При помощи неравенств (7,1) и (8,1) легко доказать, что

$$\mathcal{A}\{d\sigma,\ K(2j+1)^A\},\quad \mathcal{A}\left\{d\sigma,\ K\frac{\operatorname{sh}(2j+1)B}{\operatorname{sh}B}\right\}$$

$(A>1,\ B>0,\quad K=\sigma_0[\sup\limits_{j,\,t\in Q}|P_j(t)|]^3)$ являются нормированными кольцами.

В самом деле, нам нужно проверить неравенство (2,1). Имеем

$$\begin{gathered}\|P_j P_k\| = \sum_{l=|j-k}^{j+k} \left| \int P_j(t) P_k(t) P_l(t)\, d\sigma(t) \right| K(2l+1)^A \leqslant \\ \leqslant K^2 \sum_{l=|j-k|}^{j+k} (2l+1)^A = K(2j+1)^A\, K(2k+1)^A \qquad (j,\, k=0,\, 1, \ldots),\end{gathered} \tag{9,1}$$

т. е. $\mathcal{A}\{d\sigma,\, K(2j+1)^A\}$ нормированное кольцо. Аналогично убеждаемся, что и $\mathcal{A}\left\{d\sigma,\, K\dfrac{\operatorname{sh}(2j+1)B}{\operatorname{sh} B}\right\}$ нормированное кольцо [1].

5°. Примером полиномов, равномерно ограниченных на интервале ортогональности, могут служить ортонормированные полиномы Якоби $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ при $-1 < \alpha,\ \beta \leqslant -\dfrac{1}{2}$; эти полиномы ортогональны относительно веса $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta\, dt$.

В самом деле, для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ $(\alpha,\, \beta > -1)$, нормированных условием $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \dbinom{n+\alpha}{n}$, справедлива асимптотическая оценка (см. [3], стр. 163)

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |P_n^{(\alpha,\beta)}(t)| \sim \begin{cases} n^\gamma & \left(\gamma = \max(\alpha,\, \beta) \geqslant -\dfrac{1}{2}\right., \\ n^{-\frac{1}{2}} & \left(\gamma < -\dfrac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{10,1}$$

Так как

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \left[\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+1)\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)}\right]^{\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) \qquad (n=0,\, 1, \ldots)$$

(см. [3], стр. 67), то при помощи формулы Стирлинга для Γ функций заключаем, что

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t) \sim n^{\frac{1}{2}}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(t). \tag{11,1}$$

Из (10,1) и (11,1) следует, что

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)| \sim \begin{cases} n^{\gamma+\frac{1}{2}} & \left(\gamma \geqslant -\dfrac{1}{2}\right), \\ 1 & \left(\gamma < -\dfrac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{12,1}$$

---

[1] Небезинтересно заметить, что, применяя к построенным кольцам замечание 1 к лемме 1,1, можно вывести следующие оценки для ортогональных полиномов. Пусть $\{P_n(t)\}$ система ортонормированных относительно $d\sigma$ равномерно ограниченных константой M полиномов на ограниченном множестве вещественной оси, а $A \geqslant 1$, $B > 0$. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|P_n(z)|}{n^A} = \infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|P_n(z)|}{e^{nB}} = \infty$ для $|z| > R$, где соответственно

$$R = M^3 \sigma_0^{\frac{1}{2}} \left[|\sigma_1| + 3^A\, |\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2|^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{и} \quad R = M^3 \sigma_0^{\frac{1}{2}} \left[|\sigma_1| + \frac{\operatorname{sh}\frac{3}{2}B}{\operatorname{sh}\frac{B}{2}} |\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2|^{\frac{1}{2}}\right],$$

а σ_k — моменты меры $d\sigma$.

Из (12,1) вытекает утверждаемое.

Сказанное позволяет рассматривать кольца

$$\mathcal{A}\{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt,\ K(2j+1)^A\}$$

и

$$\mathcal{A}\left\{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt,\ K\frac{\operatorname{sh}(2j+1)\,B}{\operatorname{sh}B}\right\}$$

$\left(-1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2},\ A\geqslant 1,\ B>0\right)$. Покажем, что максимальными идеалами этих колец являются соответственно отрезок $[-1,1]$ и область комплексной плоскости, выделяемая неравенством $|z+(z^2-1)^{\frac12}|\leqslant e^{2B}$.

В самом деле, для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ справедлива следующая асимптотическая формула ([3], стр. 190):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\approx(z-1)^{-\frac{\alpha}{2}}(z+1)^{-\frac{\beta}{2}}\left[(z+1)^{\frac12}+(z-1)^{\frac12}\right]^{\alpha+\beta}(z^2-1)^{-\frac14}\times$$

$$\times(2\pi n)^{-\frac12}\left[z+(z^2-1)^{\frac12}\right]^{n+\frac12} \tag{13,1}$$

для z, лежащих вне замкнутого интервала $[-1,1]$. Из (11,1) и (13,1) следует, что при фиксированном $z\,\overline{\in}\,[-1,1]$

$$\frac{\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{K(2n+1)^A}\sim\frac{\left[z+(z^2-1)^{\frac12}\right]^{n+\frac12}}{K(2n+1)^A}. \tag{14,1}$$

Так как при $z\,\overline{\in}\,[-1,1]$ $|z+(z^2-1)^{\frac12}|>1$, то из (14,1) вытекает, что в первом случае пространством максимальных идеалов служит сегмент $[-1,1]$. Второй случай рассматривается аналогично.

6°. В этом пункте будут рассмотрены полиномы более общие, чем рассмотренные в пункте 5°.

Мы будем пользоваться незначительным уточнением теоремы Корауса об ограниченных ортонормированных полиномах ([3], стр. 157). Приведем требуемое утверждение. Предварительно установим одно тождество, которое будет использовано и в дальнейшем.

Пусть $\{P_j(t)\}$ $(t\in Q)$ ортонормированная относительно $d\sigma$ система полиномов, а $\{\tilde{P}_j(t)\}$ — система полиномов, ортонормированная относительно веса $h(t)\,d\sigma(t)$, где $h(t)$ некоторая неотрицательная функция. Положим $K_n(z,s)=\sum\limits_{k=0}^{n}P_k(z)\,P_k(s)$, так как каждый полином $\tilde{P}_n(t)$ разлагается по первым $n+1$ полиномам системы $\{P_j(t)\}$, то для любого комплексного z

$$\tilde{P}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\int\tilde{P}_n(s)\,P_k(s)\,d\sigma(s)\,P_k(z)=\int K_n(z,s)\,\tilde{P}_n(s)\,d\sigma(s). \tag{15,1}$$

Очевидно, $K_n(z, s) = P_n(z) P_n(s) + K_{n-1}(z, s)$, поэтому из (15,1) получим, что при любом $t \in Q$

$$h(t)\tilde{P}_n(z) = h(t) P_n(z) \int P_n(s)\tilde{P}_n(s)\,d\sigma(s) + h(t)\int K_{n-1}(z, s)\tilde{P}_n(s)\,d\sigma(s) = \tag{16, 1}$$

$$= h(t) P_n(z) \int P_n(s)\tilde{P}_n(s)\,d\sigma(s) + \int K_{n-1}(z, s)\tilde{P}_n(s)[h(t) - h(s)]\,d\sigma(s).$$

Здесь последнее равенство написано на том основании, что $K_{n-1}(z, s)$ при фиксированном z как полином $n-1$ степени относительно s ортогонален относительно веса $h(t)\,d\sigma(t)$ полиному $\tilde{P}_n(s)$. На основании тождества Кристоффеля-Дарбу ([3], стр. 42)

$$K_{n-1}(z, s) = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{P_n(z)P_{n-1}(s) - P_{n-1}(z)P_n(s)}{z-s}$$

(a_j — старший коэфициент P_j) из (16,1) получаем, что для любых комплексного z и $t \in Q$ при $h(t) \neq 0$

$$\tilde{P}_n(z) = A_n(z, t) P_n(z) + B_n(z, t) P_{n-1}(z) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{17,1}$$

где

$$A_n(z, t) = \int P_n(s)\tilde{P}_n(s)\,d\sigma(s) + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{h(t)}\int \frac{h(t) - h(s)}{z-s}\tilde{P}_n(s)P_{n-1}(s)\,d\sigma(s),$$

$$B_n(z, t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{h(t)}\int \frac{h(t) - h(s)}{z-s}\tilde{P}_n(s)P_n(s)\,d\sigma(s)$$

$$(n = 0, 1, \ldots;\ P_{-1}(s) = 0).$$

Это и есть требуемое тождество.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Если $h(t) > 0$ ($t \in Q$) удовлетворяет условию Липшица, то $A_n(t, t)$, $B_n(t, t)$ и $A_n(z_0, t)$, $B_n(z_0, t)$ при фиксированном z_0, лежащем вне Q, равномерно по n и $t \in Q$ ограничены.*

Для доказательства леммы оценим $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ и $J_{nk} = \int |P_n(s)\tilde{P}_k(s)|\,d\sigma(s)$. Как известно ([3], стр. 41) $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \int sP_{n-1}(s)P_n(s)\,d\sigma(s)$, откуда при помощи неравенства Буняковского вытекает, что $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ограничены некоторой константой α. Для оценки J_{nk}, также воспользовавшись неравенством Буняковского, получим

$$J_{nk} = \int \frac{1}{\sqrt{h(s)}}|P_n(s)||\tilde{P}_k(s)|\sqrt{h(s)}\,d\sigma(s) \leqslant \frac{1}{\sqrt{h}}\int |P_n(s)||\tilde{P}_k(s)|\sqrt{h(s)}\,d\sigma(s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\int |P_n(s)|^2\,d\sigma(s)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int |\tilde{P}_k(s)|^2 h(s)\,d\sigma(s)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \beta$$

$$(h = \min_{s \in Q} h(s);\quad n, k = 0, 1, \ldots).$$

Принимая во внимание эти оценки и неравенства

$$\left|\frac{h(t)-h(s)}{t-s}\right| \leqslant \gamma, \quad h \leqslant h(s) \leqslant H,$$

получим

$$|A_n(t,\ t)| \leqslant J_{nn} + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{h} \int \left|\frac{h(t)-h(s)}{t-s}\right| |\tilde{P}_n(s) P_{n-1}(s)|\, d\sigma(s) \leqslant \delta,$$

$$|B_n(t,\ t)| \leqslant \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{h} \int \left|\frac{h(t)-h(s)}{t-s}\right| |\tilde{P}_n(s) P_n(s)|\, d\sigma(s) \leqslant \varepsilon.$$

Ограниченность $A_n(z_0,\ t)$, $B_n(z_0,\ t)$ устанавливается аналогично, если только заметить, что $\left|\frac{1}{z_0-s}\right| \leqslant \varkappa \quad (s \in Q)$. Лемма доказана.

Отсюда и из соотношения (17,1) вытекает

Следствие (теорема Корауса). *Если полиномы* $\{P_j(t)\}$ *равномерно ограничены, то и полиномы* $\{\hat{P}_j(t)\}$ *равномерно ограничены.*

Рассмотрим систему ортонормированных полиномов $\{\hat{P}_j^{(\alpha,\beta,h)}(t)\}$ относительно веса $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta h(t)\, dt$ $\left(-1 < \alpha,\ \beta \leqslant -\frac{1}{2},\ -1 \leqslant t \leqslant 1\right)$, где $h(t) > 0$ удовлетворяет условию Липшица. При помощи теоремы Корауса заключаем, что эти полиномы равномерно ограничены, поэтому имеет смысл рассматривать нормированные кольца

$$\mathcal{A}\{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta h(t)\, dt, \quad K(2j+1)^A\}$$

и

$$\mathcal{A}\left\{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta h(t)\, dt, \quad K\frac{\operatorname{sh}(2j+1)B}{\operatorname{sh} B}\right\}.$$

Пространствами максимальных идеалов этих колец служат соответственно отрезок $[-1,\ 1]$ и область комплексной плоскости, выделяемая неравенством $|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}| \leqslant e^{2B}$. В самом деле, применим лемму 2.1, принимая в ней за системы $\{P_j(t)\}$ и $\{\hat{P}_j(t)\}$ соответственно системы $\{\hat{P}_j^{(\alpha,\beta,h)}(t)\}$ и $\{\hat{P}_j^{(\alpha,\beta)}(t)\}$ (это возможно, так как $\frac{1}{h(t)} > 0$ удовлетворяет условию Липшица).

Пусть z_0 фиксированная точка комплексной плоскости. В силу (17,1) получим

$$\frac{|\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z_0)|}{(2n+1)^A} \leqslant |A_n(z_0,\ t)| \frac{|\hat{P}_n^{(\alpha,\beta,h)}(z_0)|}{(2n+1)^A} + |B_n(z_0,\ t)| \frac{|\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta,h)}(z\ )|}{(2n+1)^A} \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\frac{|\hat{P}_n^{(\alpha,\beta,h)}(z_0)|}{(2n+1)^A} + \frac{|\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta,h)}(z_0)|}{(2n-1)^A}\right].$$

Поэтому, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|\hat{P}_n^{(\alpha,\beta,h)}(z_0)|}{(2n+1)^A} < \infty$, т. е. если z_0 порождает максимальный идеал кольца $\mathcal{A}\{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta h(t)\, dt,\ \ K(2j+1)^A\}$, то и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z_0)|}{(2n+1)^A} < \infty$, т. е. z_0 порождает максимальный идеал кольца

$\mathcal{A}\{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt,\ \ K(2j+1)^A\}$, и, следовательно, $z_0\in[-1,1]$. Первая часть утверждения доказана, вторая устанавливается аналогично.

Замечая, что ряды $\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|(2j+1)^A$, $\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|\dfrac{\operatorname{sh}(2j+1)B}{\operatorname{sh}B}$ сходятся или расходятся соответственно вместе с рядами $\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|j^A$, $\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|\,e^{j2B}$, и применяя известную теорему теории нормированных колец, получаем следующий аналог теоремы Винера-Леви:

Теорема 2. *Если функция* $x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}x_jP_j^{(\alpha,\beta,h)}(t)$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$ *такова, что ряд* $\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|j^A$, $A\geqslant 1$ $\left(\sum_{j=0}^{\infty}|x_j|e^{jB},\ B>0\right)$ *сходится, то и функция* $f[x(t)]$, *где* $f(z)$ *регулярна на множестве значений* $x(t)$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$ $\left(x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}x_jP_j^{(\alpha,\beta,h)}(t),\ |t+(t^2-1)^{\frac{1}{2}}|\leqslant e^B\right)$ *обладает тем же свойством.*

§ 2. Операторы преобразования [1])

1°. В дальнейшем нам часто будет удобно мыслить пространство $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ не как пространство функций $x(t)$, а как пространство их коэфициентов Фурье. При такой интерпретации $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ является совокупностью всех последовательностей $\{x_0,x_1,\ldots\}$, для которых $\sum_j|x_j|\mu_j<\infty$ [2]), причем $\|x\|=\sum_j|x_j|\mu_j$.

Рассмотрим два пространства $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ и $\mathcal{A}\{d\tilde\sigma,\tilde\mu\}$. Очевидно, всегда можно считать, что множество Q для них общее. Нормы в этих пространствах будем обозначать соответственно через $\|\;\|$ и $\|\;\tilde{\|}$. Следуя Б. М. Левитану [5], будем называть оператором преобразования U, действующим из $\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}$ в $\mathcal{A}\{d\tilde\sigma,\tilde\mu\}$, оператор, определяемый матрицей $(u_{jk})_0^\infty=\left(\int\tilde P_j(t)P_k(t)\,d\tilde\sigma(t)\right)_0^\infty$ при помощи формулы

$$(Ux)_j=\sum_k u_{jk}x_k=\int x(t)\tilde P_j(t)\,d\tilde\sigma(t)\qquad (j=0,1\ldots;\ x\in\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\}).$$

Таким образом, оператор U относит последовательности коэфициентов Фурье функции $x(t)$ по системе $\{P_j(t)\}$ ее последовательность коэфициентов Фурье по системе $\{\tilde P_j(t)\}$.

Удобно считать, что оператор U не изменяет саму функцию $x(t)$, а лишь перенормирует пространство: норму $\|x\|$ заменяет на норму $\|x\tilde{\|}$; при таком подходе непрерывность оператора U эквивалентна неравенству $\|x\tilde{\|}\leqslant A\|x\|$ $(x\in\mathcal{A}\{d\sigma,\mu\})$, где A некоторая константа. Не

---

[1]) Результаты этого и следующего параграфов приведены автором без доказательств в [4].

[2]) В дальнейшем мы будем писать $\sum_j\alpha_j$ вместо $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j$.

трудно показать, что для непрерывности оператора U необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_j |u_{jk}| \tilde{\mu}_j \leqslant A\mu_k \qquad (k=0, 1, \ldots). \tag{1, 2}$$

Обозначим через V оператор преобразования, действующий из $\mathcal{A}\{d\tilde{\sigma}, \tilde{\mu}\}$ в $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$; предположение непрерывности обоих операторов U и V эквивалентно следующему неравенству для норм: $\frac{1}{B}\|x\| \leqslant \leqslant \|x\|^{\sim} \leqslant A\|x\|$ $(x \in \mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$; A, B — константы), т. е. топологической эквивалентности пространств $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$ и $\mathcal{A}\{d\tilde{\sigma}, \tilde{\mu}\}$; отметим, что $UV=VU=E$.

Очевидно, если оба оператора U и V непрерывны, а одно из пространств, например $\mathcal{A}\{d\sigma, \mu\}$, является нормированным кольцом, то и второе будет нормированным кольцом. При этом для выполнения неравенства (1,1) в этом кольце нужно ввести вместо нормы $\|\ \|^{\sim}$ эквивалентную ей норму $K\|\ \|^{\sim}$, где $K=AB^2$, т. е. рассматривать не пространство $\mathcal{A}\{d\tilde{\sigma}, \tilde{\mu}\}$, а пространство $\mathcal{A}\{d\tilde{\sigma}, K\tilde{\mu}\}$.

2°. В этом пункте мы докажем основную теорему о непрерывности операторов преобразования, при этом в качестве исходного пространства мы будем рассматривать пространство $\mathcal{A}\{p(t)\,dt, \mu\}$, построенное по диференциальному весу $p(t)dt$ ($p(t) \geqslant 0$ — суммируемая функция).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}\{p(t)\,dt, \mu\}$ является нормированным кольцом, $h(t) > 0$ $(t \in Q)$ имеет ограниченную первую производную, $\frac{1}{h(t)} \in \mathcal{A}\{p(t)\,dt, \mu\}$ и*

$$\left| \int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\,p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant k_j \qquad (j=0, 1, \ldots) \tag{2,2}$$

равномерно по $s \in Q$, причем $\sum_j k_j < \infty$. Тогда операторы преобразования U и V для пространств $\mathcal{A}\{p(t)\,dt, \mu\}$ и *$\mathcal{A}\{h(t)\,p(t)\,dt, \mu\}$*[1] *непрерывны. Если полиномы $P_j(t)$ равномерно ограничены, то условие* (2,2) *можно заменить более слабым:*

$$\sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\,p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant K < \infty \qquad (s \in Q). \tag{3,2}$$

Доказательство[2]. Прежде всего заметим, что при любом $s \in Q$ $\frac{h(t)-h(s)}{t-s} \in \mathcal{A}\{p(t)\,dt, \mu\}$, а отсюда легко вытекает, что и

---

[1] Из (17,1) и леммы 2.1 легко следует, что $\frac{\tilde{P}_j(t)}{\mu_j}$ равномерно ограничены, так что пространство $\mathcal{A}\{h(t)\,p(t)\,dt, \mu\}$ имеет смысл.

[2] Относительно обозначений и оценок, применяемых при доказательстве, см. стр. 418—420.

$h(t) \in A\{p(t)\,dt, \mu\}$. Докажем непрерывность оператора V. Положим $T_{lm}(t) = \frac{a_{l-1}}{a_l} \frac{1}{h(t)} \int \frac{h(t) - h(s)}{t-s} \tilde{P}_l(s) P_m(s) p(s)\,ds$[1], имеем

$$\sum_j \left| \int T_{lm}(t) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_j \left| \int \frac{1}{h(t)} \left(\int \frac{h(t) - h(s)}{t-s} \tilde{P}_l(s) P_m(s) p(s)\,ds \right) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j =$$

$$= \alpha \sum_j \left| \int \tilde{P}_l(s) P_m(s) \left(\int \frac{1}{h(t)} \frac{h(t) - h(s)}{t-s} P_j(t) p(t)\,dt \right) p(s)\,ds \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int | \tilde{P}_l(s) P_m(s) | \sum_j \left| \int \frac{1}{h(t)} \frac{h(t) - h(s)}{t-s} P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j p(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int | \tilde{P}_l(s) P_m(s) | \left\| \frac{1}{h} \right\| \left\| \frac{h(t) - h(s)}{t-s} \right\| p(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \left(\sum_j k_j \right) \left\| \frac{1}{h} \right\| I_{ml} \leqslant \alpha \left(\sum_j k_j \right) \left\| \frac{1}{h} \right\| \beta = M. \tag{4,2}$$

Нам нужно доказать [см. (1,2)] неравенство

$$\sum_j |v_{jk}| \mu_j = \sum_j \left| \int P_j(t) \tilde{P}_k(t) p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant B\mu_k \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Выражая $\tilde{P}_k$ через P_k [см. (17,1)], полагая $\int P_k(s) \tilde{P}_k(s) p(s)\,ds = R_k$ и учитывая (4,2), получим

$$\sum_j |v_{jk}| \mu_j = \sum_j \left| \int P_j(t) \tilde{P}_k(t) p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \left| \int A_k(t, t) P_k(t) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j +$$

$$+ \sum_j \left| \int B_k(t, t) P_{k-1}(t) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j =$$

$$= \sum_j \left| \int [R_k + T_{kk-1}(t)] P_k(t) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j +$$

$$+ \sum_j \left| \int T_{kk}(t) P_{k-1}(t) P_j(t) p(t)\,dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \| R_k + T_{kk-1} \| \| P_k \| + \| T_{kk} \| \| P_{k-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant (I_{kk} + M) \mu_k + M\mu_{k-1} \leqslant (\beta + M) \mu_k + M\mu_k = (\beta + 2M) \mu_k \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

что и требовалось.

---

[1] Мы всюду считаем, что $\frac{h(t) - h(s)}{t-s}$ при $t=s$ равно $\frac{dh}{dt}$.

Доказательство непрерывности оператора U несколько сложнее. При фиксированных $k,\ l=0,\ 1,\ \ldots$ имеем

$$\sum_j \left| \int T_{jj-l}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_j \left| \int \left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} \tilde{P}_j(s)\, P_{j-l}(s)\, p(s)\, ds \right) P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j =$$

$$= \alpha \sum_j \left| \int \tilde{P}_j(s)\, P_{j-l}(s) \left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right) p(s)\, ds \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \int \left| \tilde{P}_j(s) \sqrt{h(s)}\, P_{j-l}(s) \left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right) \right| p(s)\, ds\, \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \left| \int \tilde{P}_j^2(s)\, h(s)\, p(s)\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\int P_{j-l}^2(s) \left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right)^2 p(s)\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \mu_j. \tag{5,2}$$

Функция от $s \in Q$ $\left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right)^2$, очевидно, непрерывна. Пусть s_{jk} точка, в которой она достигает максимума. Тогда из (5,2) при помощи (2,2) получим

$$\sum_j \left| \int T_{jj-l}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s_{jk})}{t-s_{jk}} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right| \left[\int P_{j-l}^2(s)\, p(s)\, ds \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s_{jk})}{t-s_{jk}} P_j(t)\, P_k(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j = \tag{6,2}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s_{jk})}{t-s_{jk}} \left(\sum_m \int P_j(s)\, P_k(s)\, P_m(s)\, p(s)\, ds\, P_m(t) \right) p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_j \sum_m \left| \int P_j(s)\, P_k(s)\, P_m(s)\, p(s)\, ds \right| \left| \int \frac{h(t)-h(s_{jk})}{t-s_{jk}} P_m(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \sum_m \sum_j \left| \int P_j(s)\, P_k(s)\, P_m(s)\, p(s)\, ds \right| \frac{k_m}{\mu_m} \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \left(\sum_m k_m \right) \mu_k = N\mu_k \qquad (k=0,\ 1 \ldots).$$

При помощи (17,1) и (6,2) получим

$$\sum_j |u_{jk}|\, \mu_j = \sum_j \left| \int \tilde{P}_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \left| \int A_j(t,\ t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j +$$

$$+\sum_j \left| \int B_j(t,t)\, P_{j-1}(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j =$$

$$= \sum_j \left| \int [R_j + T_{jj-1}(t)]\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j +$$

$$+ \sum_j \left| \int T_{jj}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j |R_j| \left| \int P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j +$$

$$+ \sum_j \left| \int T_{jj-1}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j +$$

$$+ \sum_j \left| \int T_{jj}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \beta \|h\| \|P_k\| + 2N\mu_k = (\beta\|h\| + 2N)\,\mu_k \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Этим первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы устанавливается аналогично, только неравенство (6,2) доказывается проще:

$$\sum_j \left| \int T_{jj-l}(t)\, P_j(t)\, P_k(t)\, h(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_j \left| \int \bar{P}_j(s)\, P_{j-l}(s) \left(\int \frac{h(t)-h(s)}{t-s}\, P_k(t)\, P_j(t)\, p(t)\, dt \right) p(s)\, ds \right| \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \alpha C^2 \int p(s) \left[\sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s)}{t-s}\, P_k(t)\, P_j(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha C^2 \|P_k\| \int p(s) \left[\sum_j \left| \int \frac{h(t)-h(s)}{t-s}\, P_j(t)\, p(t)\, dt \right| \mu_j \right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \alpha C^2 K \int p(s)\, ds\, \mu_k \qquad (k=0,\ 1,\ldots).$$

Здесь мы воспользовались теоремой Коrауса и положили

$$|P_j(t)|,\quad |\bar{P}_j(t)| \leqslant C \qquad (j=0,\ 1,\ldots;\ t \in Q).$$

Теорема доказана.

§ 3. Применение к ультрасферическим полиномам

1°. Рассмотрим ультрасферические полиномы $\hat{U}_n^{(m)}(t)$ $(m=1,\ 2,\ldots;$ $-1 \leqslant t \leqslant 1)$, ортонормированные относительно веса $(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\, dt$. Как уже указывалось на стр. 416, пространство $A\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt, \mu\}$, где μ определены формулой (6,1), совпадающее с совокупностью функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды по зональным функциям группы движений m-мерной сферы, является нормированным кольцом. Не трудно видеть, что при фиксированном m

$$\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left[\frac{1}{n!}(2n+m-1)\,\Gamma(n+m-1)\right]^{\frac{1}{2}}\sim n^{\frac{m-1}{2}},$$

поэтому пространство $A\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\ \mu\}$ топологически эквивалентно пространству $A\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\ n^{\frac{m-1}{2}}\}$. При помощи теоремы 3 может быть установлена

Теорема 4. *Пусть $h(t)$ положительная функция, а U и V — операторы преобразования, построенные для пространств $A\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\ n^{\frac{m-1}{2}}\}$ и $A\{h(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\ n^{\frac{m-1}{2}}\}$, где $m=1, 2, \ldots$ При $m=2, 3, \ldots$ операторы U и V непрерывны, если $h(t)$ имеет ограниченную производную порядка $\left[\frac{m+5}{2}\right]$; при $m=1$ эти операторы непрерывны, если $h(t)$ имеет ограниченную производную второго порядка.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 1.3. *Пусть $m=2, 3, \ldots$, если функция $f(t)$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$ имеет ограниченную производную порядка $\gamma=\left[\frac{m+3}{2}\right]$, то справедлива оценка*

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t)\,\hat{U}_n^{(m)}(t)\,(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt\right|\leqslant\frac{1}{n^{\gamma}}K_{\gamma}M_{\gamma}(f)\qquad(n=1, 2, \ldots),\qquad(1,3)$$

где K_γ — некоторая константа, а $M_\gamma(f)=\sup\limits_{k=0, 1, \ldots, \gamma;\ -1\leqslant t\leqslant 1}|f^{(k)}(t)|$.

Предварительно докажем лемму для $m=2$, в этом случае $\gamma=2$. Обозначим через $P_n(t)$ полиномы Лежандра, нормированные условием $P_n(1)=1$.

Применяя известное соотношение (см. [3], стр. 84)

$$\frac{d}{dt}[P_{n+1}(t)-P_{n-1}(t)]=(2n+1)P_n(t)$$

и замечая, что $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ $(n=0, 1, \ldots)$ ([3], стр. 80), получим

$$\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,dt=\frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} f(t)\,d[P_{n+1}(t)-P_{n-1}(t)]=$$

$$=\frac{f(t)}{2n+1}[P_{n+1}(t)-P_{n-1}(t)]\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} f'(t)[P_{n+1}(t)-P_{n-1}(t)]\,dt=$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \int_{-1}^{1} f'(t)\, d\,[P_n(t) - P_{n-2}(t)] -$$

$$- \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \int_{-1}^{1} f'(t)\, d\,[P_{n+2}(t) - P_n(t)] =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \left\{ f'(t)\,[P_n(t) - P_{n-2}(t)] \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(t)\,[P_n(t) - P_{n-2}(t)]\, dt \right\} -$$

$$- \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ f'(t)\,[P_{n+2}(t) - P_n(t)] \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(t)\,[P_{n+2}(t) - P_n(t)]\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \int_{-1}^{1} f''(t)\,[P_{n+2}(t) - P_n(t)]\, dt -$$

$$- \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \int_{-1}^{1} f''(t)\,[P_n(t) - P_{n-2}(t)]\, dt \qquad (n = 2, 3, \ldots). \qquad (2,3)$$

Замечая, что $\hat{U}_n^{(2)}(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\; P_n(t)$ [см. (6,1)] и

$$\int_{-1}^{1} f''(t)\, \hat{U}_k^{(2)}(t)\, dt \leqslant \left(\int_{-1}^{1} f''^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

из (2,3) заключаем, что существует такая константа $\frac{1}{2} K_2$, что

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\, \hat{U}_n^{(2)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} K_2}{n^2} \left(\int_{-1}^{1} f''^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

откуда и вытекает (1,3) для $m = 2$.

Рассмотрим случай $m = 3$, при этом $\gamma = 3$. В этом случае ортогональными полиномами служат полиномы Чебышева 2-го рода. Обозначим через $P_n(t)$ такие полиномы, нормированные условием $P_n(1) = n + 1$. Как известно ([3], стр. 28), $P_n(t) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}$, $t = \cos \theta \,(n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому, делая замену переменных и интегрируя по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, P_n(t) \sqrt{1 - t^2}\, dt = \int_{0}^{\pi} f(\cos \theta) \sin \theta \sin (n+1)\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} \int_{0}^{\pi} [f(\cos \theta) \sin \theta]''' \cos (n+1)\theta\, d\theta \qquad (n = 0, 1, \ldots). \qquad (3,3)$$

Так как $\hat{U}_n^{(3)}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n(t)$ $(n=0, 1, \ldots)$, то из (3,3) вытекает существование такой константы K_3, что

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} f(t)\hat{U}_n^{(3)}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{(n+1)^3}\sup_\theta |[f(\cos\theta)\sin\theta]'''| \leqslant \frac{K_3 M_3(f)}{n^3} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Таким образом, лемма доказана и при $m=3$.

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что если неравенство (1,3) имеет место при некотором $m=2, 3, \ldots$, то оно имеет место и при $m'=m+2$.

Положим $\alpha=\frac{m}{2}-1\geqslant 0$, $\lambda=\alpha+\frac{1}{2}=\frac{m-1}{2}>0$ $(m=2, 3, \ldots)$ и обозначим через $P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)$ ультрасферические полиномы относительно веса $(1-t^2)^\alpha dt=(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt$, нормированные условием $P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$, а через $P_n^{(\lambda)}(t)$ — те же полиномы, но нормированные условием $P_n^{(\lambda)}(1)=$ $=\binom{n+2\lambda-1}{n}=\binom{n+2\alpha}{n}$. Тогда (см. [3], стр. 80)

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)=\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)}P_n^{(\lambda)}(t) \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{4,3}$$

Из (4,3) при помощи формулы Стирлинга заключаем, что

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)\sim n^{-\alpha}P_n^{(\lambda)}(t)=n^{1-\frac{m}{2}}P_n^{(\lambda)}(t). \tag{5,3}$$

Из (5,3) и (11,1) вытекает соотношение

$$\hat{U}_n^{(m)}(t)\sim n^{\frac{3-m}{2}}P_n^{(\lambda)}(t). \tag{6,3}$$

Пусть $f(t)$ диференцируемая функция. Применяя справедливое при $\lambda\neq 0$ соотношение $\frac{d}{dt}P_n^{(\lambda)}(t)=2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t)$ (см. [3], стр. 81) и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)P_n^{(\lambda+1)}(t)(1-t^2)^{\alpha+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\alpha+1}dP_{n+1}^{(\lambda)}(t)=\frac{1}{2\lambda}f(t)(1-t^2)^{\alpha+1}P_{n+1}^{(\lambda)}(t)\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-1}^{1}[f'(t)(1-t^2)^{\alpha+1}-2(\alpha+1)tf(t)(1-t^2)^\alpha]P_{n+1}^{(\lambda)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-1}^{1}[2(\alpha+1)tf(t)-(1-t^2)f'(t)]P_{n+1}^{(\lambda)}(t)(1-t^2)^\alpha dt \quad (n=0,1,\ldots). \tag{7,3}$$

Положим

$$F_m(t) = \frac{1}{2\lambda}\left[2(\alpha+1)tf(t)-(1-t^2)f'(t)\right].$$

Тогда из (7,3) вытекает, что

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, n^{\frac{1-m}{2}} P_n^{(\lambda+1)}(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = n^{\frac{1-m}{2}} \int_{-1}^{1} F_m(t) P_{n+1}^{(\lambda)}(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt \sim$$

$$\sim \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} F_m(t)(n+1)^{\frac{3-m}{2}} P_{n+1}^{(\lambda)}(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt.$$

Отсюда и из (6,3) получаем

$$\int_{-1}^{1} f(t)\hat{U}_n^{(m+2)}(t)(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}-1} dt \sim \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} F_m(t)\hat{U}_{n+1}^{(m)}(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt. \quad (8,3)$$

Предположим теперь, что функция $f(t)$ имеет ограниченную производную порядка $\gamma' = \left[\frac{(m+2)+3}{2}\right]$. Тогда функция $F_m(t)$ имеет ограниченную $\gamma'-1 = \left[\frac{m+3}{2}\right]$-ю производную, и поэтому в силу предположения индукции

$$\left|\int_{-1}^{1} F_m(t)U_{n+1}^{(m)}(t)(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\gamma}} K_\gamma M_\gamma(F_m)$$

$$\left(n=0,\ 1,\ldots;\ \gamma=\left[\frac{m+3}{2}\right]\right). \quad (9,3)$$

Очевидно $M_\gamma(F_m) \leqslant CM_{\gamma'}(f)$, где C некоторая, не зависящая от f константа. Поэтому из (8,3) и (9,3) вытекает, что существует константа K_γ' такая, что

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t)\hat{U}_n^{(m+2)}(t)(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}-1} dt\right| < \frac{1}{n^{\gamma'}} K_{\gamma'} M_{\gamma'}(f) \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

т. е. неравенство (1,3) справедливо и для $m'=m+2$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если функция* $f(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ *имеет ограниченную* $n+1$*-ю производную, то функция от* $t\ \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ *имеет* n*-ю производную, равномерно ограниченную по* $t,\ s \in [-1,\ 1]$.

Для доказательства леммы воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Получим

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(s) + \frac{f''(s)}{2!}(t-s) + \ldots + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(t-s)^{n-1} + \frac{\int_s^t (t-r)^n f^{(n+1)}(r)\,dr}{n!\,(t-s)}. \quad (10,3)$$

Из (10,3) явствует, что достаточно доказать неравенство

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{n!\,(t-s)}\int\limits_s^t (t-r)^n f^{(n+1)}(r)\,dr\right| \leqslant C \qquad (t,\, s \in [-1,\, 1]).$$

Замечая, что

$$\frac{d^j}{dt^j}\left(\frac{1}{n!}\int\limits_s^t (t-r)^n f^{(n+1)}(r)\,dr\right) = \frac{1}{(n-j)!}\int\limits_s^t (t-r)^{n-j} f^{(n+1)}(r)\,dr$$

и

$$\frac{d^j}{dt^j}\frac{1}{t-s} = \frac{(-1)^j j!}{(t-s)^{j+1}},$$

при помощи формулы Лейбница получим

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{n!\,(t-s)}\int\limits_s^t (t-r)^n f^{(n+1)}(r)\,dr\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{(t-s)^{k+1}}\int\limits_s^t (t-r)^k f^{(n+1)}(r)\,dr\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}K,$$

где константа K такова, что $|f^{(n+1)}(r)| \leqslant K$ $(-1 \leqslant r \leqslant 1)$.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы, причем предварительно рассмотрим случай $m=2,\, 3,\, \ldots$. Нам нужно проверить выполнение условий теоремы 3 (ее первой части) при $\mu_n = n^{\frac{m-1}{2}}$[1]. Из леммы 1.3 заключаем, что если $f(t)$ имеет ограниченную $\left[\frac{m+3}{2}\right]$-ю производную, то

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\tilde{U}_n^{(m)}(t)\,(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\,dt\right| n^{\frac{m-1}{2}} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}K_\gamma M_\gamma(f) & (m \text{ четно}), \\ \dfrac{1}{n^2}K_\gamma M_\gamma(f) & (m \text{ нечетно}). \end{cases} \tag{11,3}$$

Из неравенства (11,3) и сделанных предположений вытекает, что $\frac{1}{h(t)} \in A\left\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\, n^{\frac{m-1}{2}}\right\}$. Как следует из леммы 2.3, $\frac{h(t)-h(s)}{t-s}$ имеет равномерно по s ограниченные производные всех порядков до $\left[\frac{m+3}{2}\right]$ включительно. Поэтому в (11,3) при $f(t) = \frac{h(t)-h(s)}{t-s}$ правые

---

[1] Условия теоремы 3, очевидно, достаточно проверить для пространства $A\left\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\, n^{\frac{m-1}{2}}\right\}$, а не для $A\left\{(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}dt,\, \mu\right\}$, где μ_n определены равенством (6,1).

части не зависят от s, откуда и вытекает справедливость неравенства (2,2). Этим теорема при $m=2,\ 3,\ \ldots$ доказана.

Рассмотрим случай $m=1$. Так как $\hat{U}_n^{(1)}(t) = \mu_n \cos n \arccos t$ $\left(\mu_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}},\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$, то для диференцируемой функции $f(t)$ имеем

$$f_n = \int_{-1}^{1} f(t)\, \hat{U}_n^{(1)}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cos n\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\cos\theta) \sin n\theta \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f'(\cos\theta) \sin\theta \sin n\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f'(\cos\theta) \sin\theta \sin n\theta\, d\theta \qquad (n=1,\ 2, \ldots).$$

Откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \int_0^{\pi} f'(\cos\theta) \sin\theta \sin n\theta\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f'(\cos\theta) \sin\theta \sin n\theta\, d\theta \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} f'^2(\cos\theta) \sin^2\theta\, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12,3}$$

Пусть $h(t) > 0$ имеет ограниченную вторую производную. Тогда из (12,3) следует, что $\frac{1}{h(t)} \in \mathcal{A}\{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,\ 1\}$. Кроме того, в силу леммы 2.3 $\frac{h(t)-h(s)}{t-s}$ имеет равномерно по s ограниченную первую производную, и поэтому при помощи (12,3) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-1}^{1} \frac{h(t)-h(s)}{t-s} \hat{U}_n^{(1)}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left| \int_{-1}^{1} \frac{h(t)-h(s)}{t-s} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| +$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dt} \frac{h(t)-h(s)}{t-s} \right]_{t=\cos\varphi}^2 \sin^2\varphi\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C < \infty \qquad (-1 \leqslant s \leqslant 1).$$

Таким образом, условия теоремы 3 (второй ее части) выполняются. Следовательно, операторы U и V непрерывны. Теорема полностью доказана.

Обозначим через $\hat{U}_n^{(m,h)}(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ ортонормированные полиномы относительно веса $h(t)\,(1-t^2)^{\frac{m}{2}-1}\,dt$. Из предыдущего вытекает

Теорема 5. *Пусть* $m=1, 2, \ldots$, а $h(t) > 0$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ *имеет ограниченную производную второго порядка* (*при* $m=1$) *или порядка* $\left[\frac{m+5}{2}\right]$ (*при* $m=2, 3, \ldots$). *Если* $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \hat{U}_n^{(m)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(h)} \hat{U}_n^{(m,h)}(t)$, *то ряды* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|\, n^{\frac{m-1}{2}}$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(h)}|\, n^{\frac{m-1}{2}}$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Отсюда, в частности, вытекает аналог теоремы Винера-Леви для разложений по ортонормированным полиномам $\hat{U}_n^{(m,h)}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, чч. I, II, Укр. матем. журн., 1 : 4 (1949) и 2 : 1 (1950).

2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Успехи мат. наук 1 : 2 (12) (1946).

3. G. Szegö, Orthogonal polynomials, New-Jork, 1939.

4. Ю. М. Березанский, Гиперкомплексные системы с дискретным базисом, ДАН, 81, № 3 (1951).

5. Б. М. Левитан, Об обобщенных положительно определенных и обобщенных почти периодических последовательностях, ДАН, 58, № 6 (1947).

Поступила 5.III 1951 г.

Киев.