Об одном обобщении задачи Бубнова

М. Д. Дольберг

В 1912 г. И. Г. Бубнов [1] поставил задачу об устойчивости стержневого набора. Эта задача может быть сведена к задаче о сжатой балке, лежащей на жестких крайних и упругих промежуточных опорах.

Для балки постоянной жесткости, сжатой силой, приложенной на конце, и лежащей на крайних абсолютно жестких шарнирных опорах и равно отстоящих упругих опорах одинаковой жесткости, И. Г. Бубнов установил существование промежутка значений коэфициентов упругости опор, для которых первая критическая сила балки не зависит от коэфициентов жесткости.

Оказалось, что указанным свойством обладают балки, у которых жесткость промежуточных опор не меньше наибольшего корня некоторого алгебраического уравнения; степень этого уравнения равна числу промежуточных опор. Так как решение задачи, данное Бубновым, громоздко, требует больших вычислений и охватывает лишь весьма частный случай общей проблемы, то в последующие годы этот вопрос привлекал внимание ряда исследователей. Укажем здесь на работу П. Ф. Папковича [2], в которой он решил ту же самую задачу, что и Бубнов, но сделал это проще и получил явное представление предельной жесткости в виде ряда.

В случае балки переменного сечения, сжатой силой, приложенной на конце, все опоры которой упруги и имеют различные коэфициенты жесткости, очень простое решение задачи было дано Я. Л. Нудельманом [3]. Однако его решение имеет тот недостаток, что предельные жесткости выражаются через вспомогательные параметры, но исключения их не производится.

В настоящей заметке мы решим задачу Бубнова для балки, сжатой силами, приложенными по всей длине, и дадим в некоторых случаях простой прием вычисления предельных жесткостей. Для задачи, решенной И. Г. Бубновым и П. Ф. Папковичем, предельная жесткость будет вычислена в явном виде.

Будем называть балку, лежащую на двух расположенных на ее концах абсолютно жестких опорах [1]), системой S. Поставим задачу сле-

[1]) Опоры могут быть как шарнирные, так и жесткими заделками.

дующим образом: на систему S нужно наложить n промежуточных упругих опор и подобрать их местоположение так, чтобы первая критическая сила не зависела от жесткостей опор, если эти жесткости принадлежат некоторой, подлежащей определению области, именуемой областью B.

Балку, образованную из S путем наложения n промежуточных упругих опор, назовем системой S_n^α.

Установим следующую теорему.

Теорема 1. *Если жесткости опор системы S_n^α принадлежат B-области, то опоры необходимо должны быть расположены в узлах формы изгиба системы S, а исследуемая критическая сила является критической силой этой системы* [1]).

Пусть промежуточные опоры, жесткости которых равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, находятся в точках с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Обозначим через $y(x)$ функцию прогиба системы S_n^α, через $K(x, s)$ функцию влияния системы S и, считая балку расположенной в интервале $\langle 0, l \rangle$, запишем интегральное уравнение Треффца [5] устойчивости системы S_n^α

$$y'(x) = P \int_0^l K_{11}(x, s)\, y'(s)\, f(s)\, ds - \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y(\xi_i)\, K_{10}(x, \xi_i). \tag{1}$$

Здесь, как обычно, $Pf(x)$ является суммой осевых сумм, взятых по одну сторону от сечения; $K_{ij}(x, s)$, как всегда, означает $\dfrac{\partial^{i+j} K(x, s)}{\partial x^i \partial s^j}$.

Если $y(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то теорема доказана, так как в этом случае уравнение (1) переходит в уравнение Треффца для системы S

$$y'(x) = P \int_0^l K_{11}(x, s)\, y'(s)\, f(s)\, ds,$$

откуда следует, что $y(x)$ есть форма изгиба, а P — критическая сила системы S.

Покажем, что предположение о неравенстве нулю хотя бы одного из значений $y(\xi_i)$ приводит к противоречию с условием теоремы.

Введем в рассмотрение функцию $\Gamma(x, s; P)$ — резольвенту ядра $K_{11}(x, s)$ и построим функцию

$$\Delta(x, s; P) = \int_0^x \int_0^s \Gamma(x, s; P)\, dx\, ds,$$

имеющую простой механический смысл: $\Delta(x, s; P)$ выражает прогиб системы S в точке x под действием поперечной силы, равной единице,

---

[1]) Это предложение является небольшим видоизменением теоремы, доказанной Я. Л. Нудельманом [4].

приложенной в точке s, если балка сжата осевыми силами с законом распределения $-Pf(x)$[1].

Отметим здесь, что $\Delta(x, s; P)$ разлагается в равномерно сходящийся билинейный ряд

$$\Delta(x, s; P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)\, y_i(s)}{P_i - P}.$$

Здесь P — критические силы системы S, а $y_i(x)$ ее функции прогиба, выбранные так, что $\int\limits_0^l [y'(x)]^2 f(x)\, dx = 1$.

Из выписанного ряда следует, что значения $P = P_i$ будут, вообще говоря, полюсами функции $\Delta(x, s; P)$. Функция $\Delta(\xi, \xi; P)$ будет монотонно возрастать между полюсами и, если точка ξ будет нулем функции $y_i(x)$, то значение $P = P_i$ не будет ее полюсом.

Воспользовавшись функцией $\Delta(x, s; P)$, легко построить уравнения для $y(\xi_j) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta(\xi_j, \xi_i; P)\, y(\xi_i)$.

И в силу того, что по предположению не все $y(\xi_i) = 0$, то P является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \Delta(\xi_1, \xi_1; P) + \dfrac{1}{\alpha_1} & \Delta(\xi_1, \xi_2; P) \ldots \Delta(\xi_1, \xi_n; P) \\ \Delta(\xi_2, \xi_1; P) & \Delta(\xi_2, \xi_2; P) + \dfrac{1}{\alpha_2} \ldots \Delta(\xi_2, \xi_n; P) \\ \Delta(\xi_n, \xi_1; P) & \Delta(\xi_n, \xi_2; P) \ldots \Delta(\xi_n, \xi_n; P) + \dfrac{1}{\alpha_n} \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1] Если на балку, помимо осевых сил, действуют поперечные силы $dQ(x)$, то интегральное уравнение продольно-поперечного изгиба имеет вид

$$y'(x) = \int\limits_0^l K_{11}(x, s)\, y'(s)\, f(s)\, ds + \int\limits_0^l K_{10}(x, s)\, dQ(s),$$

решая которое, найдем:

$$y'(x) = \int\limits_0^l \int\limits_0^s \Gamma(x, t; P)\, dt\, dQ(s)$$

или

$$y(x) = \int\limits_0^l \Delta(x, s; P)\, dQ(s),$$

откуда следует сказанное.

Введем следующие обозначения для матриц:

$$E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right) = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\alpha_1} 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 \frac{1}{\alpha_2} \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n} \end{matrix} \right\|$$

$$\varDelta\left(\begin{matrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_k \\ s, \xi_1, \ldots, \xi_k \end{matrix}\middle| P\right) = \left\| \begin{matrix} \varDelta(x, s; P) & \varDelta(x, \xi_1; P) \ldots \varDelta(x, \xi_k; P) \\ \varDelta(\xi_1, s; P) & \varDelta(\xi_1, \xi_1; P) \ldots \varDelta(\xi_1, \xi_k; P) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varDelta(\xi_k, s; P) & \varDelta(\xi_k, \xi_1; P) \ldots \varDelta(\xi_k, \xi_k; P) \end{matrix} \right\|$$

и запишем в этих обозначениях уравнение критических сил

$$\operatorname{Det}\left[\varDelta\left(\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \end{matrix}\middle| P\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)\right] = 0. \tag{2}$$

Диференцируя левую часть уравнения (2) последовательно по всем α_i и замечая, что по условию теоремы P от α_i не зависит, мы приходим к противоречию.

Итак, доказано, что необходимым условием независимости критической силы системы S_n^α от жесткостей опор является расположение этих опор в узлах формы изгиба системы S. При этом оказывается, что исследуемая критическая сила и форма изгиба, ей соответствующая, для систем S_n^α, S_n и S совпадают (S_n означает S_n^∞). Для ответа на вопрос, в узлах какой формы изгиба системы S нужно подставлять промежуточные опоры, чтобы первая критическая сила системы S_n^α обладала нужными свойствами, следует провести ряд дополнительных исследований.

Весьма существенное значение в задачах о наложении на систему связи имеет вопрос о числе узлов форм изгиба. В задачах, где исследованию подвергаются системы, лежащие лишь на шарнирных жестких опорах, расположенных на концах балки, а сама балка сжата только одной силой, приложенной на границе, указанный вопрос решается без труда, так как в этом случае диференциальное уравнение продольного изгиба будет второго порядка, поведение фундаментальных функций которого хорошо изучено. Поэтому для указанных простых систем справедливо следующее утверждение: форма изгиба, соответствующая n-ой критической силе, имеет точно $n-1$ простых узлов.

Аналогичное утверждение, вообще говоря, неправильно, если на балку действуют сжимающие силы, приложенные по всей длине.

Простой пример, приведенный О. Блюменталем [6], показывает, что можно подобрать такие осевые нагрузки, при которых первая форма потери устойчивости имеет узел.

Очевидно, что, если неизвестно число узлов формы изгиба, отвечающей данной критической силе, то мы не можем решить вопрос, в узлы какой формы изгиба системы S следует подставлять упругие опоры для решения задачи Бубнова.

При нагрузках общего вида нам удалось доказать следующее положение [7], [8].

Если при замене крайней шарнирной абсолютно жесткой опоры на абсолютно жесткое защемление или при обратной операции ни одна из критических сил исходной системы не совпадает ни с одной из критических сил полученной системы и если все опоры балки, число которых произвольно, абсолютно жесткие, то

Теорема 2. а) *n-ой критической силе системы S_k отвечает одна и только одна форма изгиба, имеющая, за исключением узлов на промежуточных опорах, точно $n-1$ узел, считая узлы по их кратности. (Узел не может быть выше второй кратности.)*

б) *Если на систему S_k наложена дополнительная абсолютно жесткая опора, то n-ая критическая сила системы S_{k+1} тогда и только тогда достигает значения $n+1$ критической силы системы S_k, когда дополнительная связь попадает в узел $n+1$-формы изгиба системы S_k.*

В вышеуказанной работе [8] были найдены условия для нагрузки и жесткости балки, чтобы выполнялись требования теоремы 2.

В дальнейшем мы будем считать теорему 2 справедливой и будем считать, кроме того, что $n+1$-ая форма изгиба системы S имеет лишь простые узлы [1]). Из сказанного следует

Теорема 3. *Для того чтобы первая критическая сила системы S_n^α не зависела от α_i $(i=1, \ldots, n)$, опоры необходимо должны быть в узлах $n+1$-ой формы изгиба системы S.*

Действительно, в силу теоремы 2 формы изгиба системы S, обладающие числом узлов, не меньшим чем n, отвечают критическим силам P_m, для которых $m \geqslant n+1$. Если мы предположим, что опоры попадают в узлы m-ой формы изгиба системы S и что $m > n+1$, то увидим, что исследуемой критической силе P_m будет отвечать форма изгиба системы S_n, имеющая $m-n-1$ узлов, не считая узлов на опорах. Следовательно, P_m не может быть первой критической силой системы S_n.

Очевидно, что увеличение жесткостей может вызвать лишь увеличение первой критической силы системы S_n^α. Поэтому первая критическая сила системы S_n^α будет и подавно меньше P_m. Теорема доказана.

Укажем на некоторые свойства функции $\Delta(x, s; P)$.

Из (2) следует, что если на какую-либо систему наложена одна дополнительная жесткая связь в точке ξ, то критические силы образованной системы удовлетворяют уравнению

$$\Delta(\xi, \xi; P) = 0. \tag{3}$$

[1]) Можно показать, что если $n+1$-ая форма изгиба системы S имеет краткий узел, то задача Бубнова не имеет решения. В этом случае B-область вырождается в точку.

Однако корни этого уравнения дают не все критические силы образованной системы. Если дополнительная опора попала в узел какой-либо формы изгиба исходной системы, то, как было показано, соответствующая этой форме критическая сила будет также критической силой образованной системы, однако не будет, вообще говоря, корнем уравнения (3).

Для системы S_k можно доказать при условии выполнения теоремы 2 следующее:

Теорема 4. *Если ξ узел i-ой формы изгиба балки, лежащей на произвольном числе жестких опор, а P_i — соответствующая этой форме критическая сила, то Δ-функция этой балки удовлетворяет условию*

$$\Delta(\xi, \xi; P_i) < 0.$$

Наложим в точке ξ на рассматриваемую балку дополнительную жесткую опору. Тогда, как известно, критические силы P_i^* вновь образованной системы удовлетворяют неравенствам (9)

$$P_{i-1} \leqslant P_{i-1}^* \leqslant P \leqslant P_i^* \leqslant P_{i+1}. \tag{4}$$

На основании второй части теоремы 2 заключаем, что в рассматриваемом случае $P_{i-1}^* = P_i$; что же касается относительных критических сил, то они определяются из уравнения (3).

Внутрь промежутка $\langle P_{i-1}, P_i \rangle$ в силу неравенств (4) не может попасть ни один корень уравнения (3). Заметим, что левая часть уравнения (2) в правой окрестности точки P_{i-1} отрицательна, а поэтому необходимо выполнение условия

$$\Delta(\xi, \xi; P_i) \leqslant 0.$$

Если бы оказалось, что $\Delta(\xi, \xi; P_i) = 0$, то это означало бы что система с дополнительной опорой имеет две формы изгиба, отвечающие критической силе P_i[1], что противоречит теореме 2. Поэтому

$$\Delta(\xi, \xi; P_i) < 0.$$

Из этой теоремы непосредственно заключаем:

Теорема 5. *Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ координаты узлов $n+1$-ой формы изгиба системы S, отвечающей критической силе P_{n+1}, то квадратичная форма*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Delta(\xi_i, \xi_j; P_{n+1}) U_i U_j$$

является отрицательно определенной.

Для доказательства рассмотрим систему S_k, полученную из системы S наложением жестких связей в точках $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Так как сила P_{n+1} будет критической для системы S_k, а точка ξ_{k+1} будет узлом ее формы изгиба, то в силу теоремы 4

$$\Delta_k(\xi_{k+1}, \xi_{k+1}; P_{n+1}) < 0. \tag{5}$$

[1]) Подробно об этом см. цитированную работу [7].

С другой стороны, функция влияния системы S_k^α выражается через функцию влияния системы S следующим образом [10]. (Пользуемся вышеприведенными обозначениями.)

$$K_k^\alpha(x, s) = \frac{\operatorname{Det}\left[K\begin{pmatrix} x, & \xi_1 \ldots \xi_k \\ s, & \xi_1 \ldots \xi_k \end{pmatrix} + E\left(0, \frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]}{\operatorname{Det}\left[K\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_k \\ \xi_1, \ldots, \xi_k \end{pmatrix} + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]},$$

откуда, воспользовавшись формулами Батмена [11], найдем [1])

$$\Delta_k^\alpha(x, s; P) = \frac{\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix} x, & \xi_1 \ldots \xi_k \\ s, & \xi_1 \ldots \xi_k \end{matrix}\middle| P\right) + E\left(0, \frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]}{\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_k \\ \xi_1, \ldots, \xi_k \end{matrix}\middle| P\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]},$$

и из (5) после перестановки строк и столбцов найдем ($\alpha_i = \infty$)

$$\frac{\operatorname{Det} \Delta\left(\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_{k+1} \\ \xi_1, \ldots, \xi_{k+1} \end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)}{\operatorname{Det} \Delta\left(\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_k \\ \xi_1, \ldots, \xi_k \end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)} < 0,$$

что вместе с условием

$$\Delta(\xi_1, \xi_1; P_{n+1}) < 0$$

доказывает теорему.

Если промежуточные опоры расставлены в точках ξ_i ($i = 1, \ldots, n$) — узлах $n+1$-ой формы изгиба системы S, то нижеследующая теорема дает критерий принадлежности жесткостей опор области B.

Теорема 6. *Для того чтобы жесткости промежуточных опор принадлежали B-области, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма*

$$\sum_{i, j=1}^{n} \Delta(\xi_i, \xi_j; P_{n+1}) U_i U_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} U_i^2 \tag{I}$$

была отрицательна, т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$(-1)^k \operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix} \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \\ \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_{i_1}}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{i_k}}\right)\right] \geqslant 0. \tag{6}$$

Докажем достаточность условий (6). Как было показано при доказательстве теоремы 1, критические силы системы с k упругими связями определяются из уравнения

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_k \\ \xi_1, \ldots, \xi_k \end{matrix}\middle| P\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_k}\right)\right] = 0$$

---

[1]) Формула Батмена имеется в книге Л. Б. Канторовича и В. И. Крылова [12] „Приближенные методы высшего анализа", Гостехиздат, 1949.

Для получения полного спектра критических сил следует прибавить к корням этого уравнения критические силы системы S, отвечающие формам изгиба, в узлах которых подставлены опоры. Если на систему S наложена одна опора в точке ξ_1 жесткости α, то уравнение критических сил для системы S_1 будет

$$\Delta(\xi_1, \xi_1; P) + \frac{1}{\alpha_1} = 0. \tag{7}$$

На основании неравенства (4) заключаем, что если P_{n+1} является критической силой системы S_1^α, то в интервал $\langle P_n, P_{n+2} \rangle$ может попасть лишь один корень уравнения (7). Правая часть уравнения (7) положительна в левой окрестности точки P_{n+2}. Это вместе с первым из условий (6) доказывает, что корень уравнения (7), лежащий в интервале $\langle P_n, P_{n+2} \rangle$, не меньше чем P_{n+1}. Последнее означает [см. неравенство (4)], что P_{n+1} будет n-ой критической силой системы S_1^α. Наложим затем вторую упругую связь жесткости α_2 в точке ξ_2. В силу того, что точка ξ_2 — узел одной из форм изгиба системы S_1^α, P_{n+1} будет критической силой системы S_2^α. Остальные критические силы этой системы определяются из уравнения

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \xi_2\\ \xi_1, \xi_2\end{matrix}\middle| P\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right)\right] = 0,$$

которое удобно представить в таком виде:

$$\frac{\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \xi_2\\ \xi_1, \xi_2\end{matrix}\middle| P\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, 0\right)\right]}{\Delta(\xi_1, \xi_1; P) + \frac{1}{\alpha_1}} + \frac{1}{\alpha_2} = 0,$$

или в принятых обозначениях

$$\Delta_1^\alpha(\xi_2, \xi_2; P) + \frac{1}{\alpha_2} = 0. \tag{8}$$

P_{n+1} не является полюсом функции $\Delta_1^\alpha(\xi_2, \xi_2; P)$, однако может случиться, что P_{n+1} будет корнем функции $\Delta(\xi_1, \xi_1; P) + \frac{1}{\alpha_1}$. Поэтому P_{n+1} неизбежно в этом случае является корнем уравнения (8), т. е. P_{n+1} будет критической силой второй кратности системы S_2^α. Из неравенств (4) заключаем, что P_{n+1} одновременно является $n-1$-ой и n-ой критической силой системы S_2.

Если

$$\Delta(\xi_1, \xi_1; P_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_1} \neq 0,$$

то из условия отрицательности квадратичной формы следует

$$\Delta_1^\alpha(\xi_2, \xi_2; P_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_2} \leqslant 0.$$

и так как P_{n+1} является n-ой критической силой системы S_1^α, то рассуждения, аналогичные прежним, приводят к заключению, что P_{n+1} является $n-1$-ой критической силой системы S_2^α.

Повторяя указанный процесс, мы найдем, что P_{n+1} представляет первую критическую силу системы S_n^α, что и доказывает достаточность условий (8) для принадлежности жесткостей к B-области[1)].

Для доказательства необходимости условий теоремы рассмотрим уравнение, определяющее критические силы системы S_n^α

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_n\\ \xi_1,\ldots,\xi_n\end{matrix}\middle| P\right)+E\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right)\right]=0. \tag{9}$$

Корни этого уравнения, как было показано, меняются с изменением α_i, поэтому первая критическая сила системы S_n^α не может содержаться среди корней этого уравнения и должна быть не больше его наименьшего корня.

Следовательно, B-область определяется условием

$$P_{n+1}\leqslant\nu(\alpha_i), \tag{10}$$

где $\nu(\alpha_i)$ наименьший корень уравнения (9).

В силу того, что все корни уравнения (9) растут с ростом хотя бы одного из параметров α_i, следует, что если неравенство (10) выполняется для некоторых значений α_i, то оно подавно будет выполняться для значений α_i больше указанных.

Покажем, что выражение

$$(-1)^n\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_n\\ \xi_1,\ldots,\xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right)\right] \tag{11}$$

для α_i, принадлежащих B-области, не отрицательно.

Предположим противное, т. е. что для значений $\alpha_i^0\in B$ выражение (11) отрицательно и напомним, что из теоремы 5 следует положительность (11) при $\alpha_i=\infty$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда в силу непрерывности определителя по α_i найдем, что при значениях α_i, больших α_i^0, определитель обращается в нуль, что приводит к противоречию.

Итак,

$$(-1)^n\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_n\\ \xi_1,\ldots,\xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right)\right]\geqslant 0$$

для α_i, лежащих в B-области.

Устремляя все значения α_i, за исключением α_n, к бесконечности и заменяя α_n на $\alpha_n+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, найдем, что

$$(-1)^n\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_n\\ \xi_1,\ldots,\xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E\left(0,\ldots,\frac{1}{\alpha_n+\varepsilon}\right)\right]>0. \tag{12}$$

---

1) Отметим, что приведенное доказательство нигде не опирается на теорему 2. Поэтому условие (6) является достаточным для принадлежности жесткостей B-области при нагрузках самого общего вида.

Обратим внимание на то, что все члены последовательности главных миноров рассматриваемого определителя, взятые с соответствующими знаками, положительны (теорема 5). Поэтому все его главные миноры также положительны. Отсюда следует, в частности, отрицательность выражения

$$\Delta(\xi_n, \xi_n; P_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_n + \varepsilon}$$

для всех α_n из B-области и при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\Delta(\xi_n, \xi_n; P_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_n} \leqslant 0.$$

Очевидно, что аналогичное заключение может быть сделано для всех элементов главной диагонали матрицы

$$\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right). \tag{13}$$

Из положительности взятых с соответствующими знаками главных миноров определителя (12) следует, кроме того, что

$$(1)^{n-1} \operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \\ \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(0, \dots, \frac{1}{\alpha_{n-1} + \varepsilon}\right)\right] \geqslant 0.$$

Отсюда, применяя прежний прием, не трудно заключить, что все главные миноры, взятые с соответствующими знаками матрицы

$$\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(0, \dots, \frac{1}{\alpha_{n-1} + \varepsilon_1}, \frac{1}{\alpha_n + \varepsilon_2}\right) \quad \begin{matrix}\varepsilon_1 > 0, \\ \varepsilon_2 > 0,\end{matrix}$$

положительны. В частности, будет положителен минор

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_{n-1}, \xi_n \\ \xi_{n-1}, \xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_{n-1} + \varepsilon_1}, \frac{1}{\alpha_n + \varepsilon_2}\right)\right]$$

для α_{n-1} и α_n, принадлежащих B-области, и любых положительных ε_1 и ε_2.

Поэтому

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_{n-1}, \xi_n \\ \xi_{n-1}, \xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}}, \frac{1}{\alpha_n}\right)\right] \geqslant 0.$$

Аналогично можно доказать неотрицательность всех главных миноров второго порядка матрицы (13). Устремляя к бесконечности жесткости всех опор, за исключением трех и т. д., мы докажем, что все главные миноры матрицы (13), взятые с соответствующим знаком, не отрицательны, что и доказывает отрицательность формы (1).

Граница B-области определяется гиперповерхностью

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right) + E\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right)\right] = 0$$

при условиях

$$\alpha_i \geqslant 0; \quad (-1)^k \operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}\\ \xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E\left(\frac{1}{\alpha_{i_1}},\ldots,\frac{1}{\alpha_{i_k}}\right)\right]\geqslant 0$$

$$k=1,\ldots,n-1.$$

Для исследования свойств B-области удобно перейти от жесткостей опор к их податливостям — $k_i=\frac{1}{\alpha_i}$ и рассматривать область B коэфициентов податливости.

Можно утверждать:

а) B-область не пустая, так как окрестность точки $k_i=0$ содержится в области;

б) B-область не содержит бесконечно удаленных точек и ограничена координатными плоскостями $k_i=0$ и той из ветвей поверхности

$$\operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_n\\ \xi_1,\ldots,\xi_n\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E(k_1,\ldots,k_n)\right]=0,$$

для которой

$$(-1)^k \operatorname{Det}\left[\Delta\left(\begin{matrix}\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}\\ \xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}\end{matrix}\middle| P_{n+1}\right)+E(k_{i_1},\ldots,k_{i_k})\right]=0$$

$$k=1,\ldots,n-1;$$

в) B-область односвязна.

Эти три положения очевидны. Докажем еще, что

г) B-область выпукла.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если две точки $k^{(1)}(k_1^{(1)},\ldots,k_n^{(1)})$ и $k^{(2)}(k_1^{(2)},\ldots,k_n^{(2)})$ лежат в области B, то в этой области будет лежать также любая точка k, делящая в положительном отношении отрезок $k^{(1)}$, $k^{(2)}$.

Координаты точки k — $k_i=\frac{k_i^{(1)}+pk_i^{(2)}}{1+p}$; $(p>0)$ должны, следовательно, удовлетворять неравенствам (6), в которых $\frac{1}{\alpha_i}$ заменены на k_i, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Delta(\xi_i,\xi_j;P_{n+1})U_iU_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^{(1)}+pk_i^{(2)}}{1+p}U_i^2$$

должна быть отрицательна, что, очевидно, имеет место, так как формы

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Delta(\xi_i,\xi_j;P_{n+1})U_iU_j+\sum_{i=1}^{n}k_i^{(1)}U_i^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Delta(\xi_i,\xi_j;P_{n+1})U_iU_j+\sum_{i=1}^{n}k_i^{(2)}U_i^2$$

неотрицательны по условию и $p>0$. Предложение доказано.

Из свойства выпуклости B-области вытекает одно практически важное следствие. Область, заключенная между координатными плоскостями и гиперплоскостью, проходящей через точки пересечения граничной поверхности с осями координат, целиком заключена в B-области. Если a_i — отрезки, отсекаемые граничной поверхностью на координатных осях, то, в силу сказанного, податливости опор, подчиненные условию $\sum \frac{k_i}{a_i} - 1 \leqslant 0$, будут заведомо решать задачу Бубнова. a_i имеет наглядный механический смысл. Вычисляя, найдем

$$a_i = - \frac{\operatorname{Det} \Delta \begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}\!\!\left| P_{n+1} \right)}{\operatorname{Det} \Delta \begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \ \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n \\ \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \ \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}\!\!\left| P_{n+1} \right)} > 0,$$

откуда видно, что a_i равно прогибу в точке ξ_i системы S_n, сжатой силой P_{n+1}, у которой отброшена опора в точке ξ_i и заменена отрицательной единичной силой.

Численное определение значений коэфициентов, входящих в формулы (6), представляет значительные вычислительные трудности и выполняется приближенными методами. Однако в тех случаях, когда сжимающая сила приложена лишь на конце, вычисления значительно упрощаются, а в случае, рассмотренном самим Бубновым, проводятся до конца.

Если на систему S [1] действует лишь сжимающая сила, приложенная на границе, то функция $\Delta(x, S; P)$, как известно, удовлетворяет уравнению:

$$B(x)\Delta_{20}(x, s; P) + P\Delta(x, s; P) = -M(x, s), \tag{14}$$

где $B(x)$ — жесткость балки на изгиб, а $M(x, s)$ — изгибающий момент в точке x от единичной поперечной силы, приложенной в точке S, при граничных условиях

$$\Delta(0, s: P) = \Delta(e, s: P) = 0.$$

Изгибающий момент $M(x, s)$, как легко понять, является функцией Грина оператора $y''(x)$ при граничных условиях $y(0) = y(l) = 0$. Перейдем от уравнения (14) к эквивалентному ему интегральному уравнению

$$\Delta(x, s: P) = P \int_0^l M(x, t)\Delta(t, s: P)\frac{dt}{B(t)} + \int_0^l M(x, t)M(t, s)\frac{dt}{B(t)}$$

и введем в рассмотрение резольвенту ядра $M(x, s) - \gamma(x, s: P)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\gamma(x, s: P) = M(x, s) + P \int_0^l M(x, t)\gamma(t, s: P)\frac{dt}{B(t)}, \tag{15}$$

[1]) Опоры предполагаются шарнирными.

откуда

$$\Delta(x, s: P) = \int_0^l \gamma(x, t: P) M(t, s) \frac{dt}{B(t)}$$

и, как видно из уравнения (15),

$$\Delta(x, s: P) = \frac{1}{P} [\gamma(x, s: P) - M(x, s)].$$

Покажем, что если ξ_i и ξ_j координаты узлов $y_{n+1}(x)$ $n+1$-ой формы изгиба системы S, то

$$\gamma(\xi_i, \xi_j; P_{n+1}) = 0.$$

В рассматриваемом случае функции изгиба и критические силы являются фундаментальными функциями и собственными числами краевой задачи

$$L_y = y''(x) + \frac{P}{B(x)} y(x) = 0, \tag{16}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{17}$$

Функция $\gamma(x, s: P)$ будет функцией Грина оператора L_y, а поэтому, если P является собственным числом оператора, то $\gamma(x, s: P)$ не существует. Тем не менее, если $s = \xi_j$ координата узла $y_{n+1}(x)$, то существует предел функции $\gamma(x, \xi_j: P)$ при $P \to P_{n+1}$, который равен $\gamma(x, \xi_j; P_{n+1})$.

$\gamma(x, \xi_j; P_{n+1})$, как это следует из общих положений, непрерывна в промежутке $\langle 0, l \rangle$, удовлетворяет в промежутках $\langle 0, \xi_j \rangle$ и $\langle \xi_j, l \rangle$ уравнению (16) и граничным условиям (17). Ее первая производная претерпевает в точке $x = \xi_j$ разрыв

$$\gamma_{10}(\xi_j - 0, \xi_j; P_{n+1}) - \gamma_{10}(\xi_j + 0, \xi_j; P_{n+1}) = 1$$

и, наконец, она ортогональна функции $y_{n+1}(x)$.

Если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ система фундаментальных интегралов уравнения

$$y''(x) + \frac{P_{n+1}}{B(x)} y(x) = 0,$$

то в силу сказанного ранее

$$\gamma(x, \xi_j; P_{n+1}) = \begin{cases} c_1 u_1(x) + d_1 u_2(x) & x \leqslant \xi_j, \\ c_2 u_1(x) + d_2 u_2(x) & x \geqslant \xi_j \end{cases}$$

в качестве $u_1(x)$ можно, очевидно, выбрать $y_{n+1}(x)$. Тогда из первого граничного условия следует, что $d_1 = 0$, и так как $y_{n+1}(x)$ равно нулю при $x = l$, то из второго граничного условия следует, что

$$d_2 u_2(l) = 0;$$

$u_2(l) \neq 0$ — ввиду того, что два линейно независимых интеграла уравнения Штурма-Лиувилля не могут иметь общий нуль, а поэтому $d_2 = 0$.

Итак,

$$\gamma(x, \xi_j; P_{n+1}) = \begin{cases} c_1 y_{n+1}(x) \\ c_2 y_{n+1}(x). \end{cases}$$

Отсюда видно без дальнейших вычислений, что

$$\gamma(\xi_i, \xi_j; P_{n+1}) = 0,$$

если ξ_i нуль функции $y_{n+1}(x)$. Следовательно,

$$\Delta(\xi_i, \xi_j; P_{n+1}) = -\frac{1}{P_{n+1}} M(\xi_i, \xi_j) = -G(\xi_i, \xi_j).$$

Вспомнив вид диференциального уравнения деформации струны, мы заключаем отсюда, что $G(\xi_i \xi_j)$ является коэфициентом влияния струны, растянутой силой P_{n+1}.

Критерий принадлежности жесткостей к B-области будет в данном случае состоять в положительности формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} G(\xi_i, \xi_j) u_i u_j - \sum_{i=1} \frac{1}{\alpha_i} u_i^2$$

или, что будет удобнее, в условии

$$\sum_{i, j=1}^{n} G(\xi_i, \xi_j) \alpha_i \alpha_j v_i u_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^2 \geqslant 0.$$

Обозначим матрицу

$$G = G\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix},$$

$$E_\alpha = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

и рассмотрим уравнение

$$v = \lambda G E_\alpha v, \tag{18}$$

которое, как известно, имеет нетривиальное решение при n-значениях параметра λ. Обозначим их в порядке возрастания $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Соответствующие этим значениям векторы выберем ортогональными и нормированными в том смысле, что

$$(v^{(k_1)}, E_\alpha v^{(k_2)}) = \begin{cases} 0 & k_1 \neq k_2, \\ 1 & k_1 \neq k_2. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда, если $v_i^{(k)}$ является i-ой компонентой вектора $v^{(k)}$, то

$$G(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{v_i^{(k)} v_j^{(k)}}{\lambda_k}.$$

Произвольный вектор u с компонентами u_i $(i=1, \ldots, n)$ представим в виде комбинации векторов $v^{(k)}$

$$u = \sum_{k=1}^{n} c_k v^{(k)},$$

где в силу (19) $c_k = (u, E_\alpha v^{(k)})$.

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{n} G(\xi_i, \xi_j)\, u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k^2}{\lambda_k}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Таким образом, критерий принадлежности жесткостей к B-области будет выглядеть так:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_k} - 1\right) c_k^2 \geqslant 0$$

для всевозможных значений C_k. Последнее возможно тогда и только тогда, когда наибольшее из собственных значений — λ_n удовлетворяет условию $\lambda_n \leqslant 1$. Граница B-области определяется равенством $\lambda_n = 1$.

Так как числа $G(\xi_i, \xi_j)$ являются коэфициентами влияния струны растянутой силой P_{n+1}, то уравнение (18) является уравнением колебаний невесомой струны, загруженной в точках ξ_i массами, величины которых равны α_i. Если известны узлы $n+1$-ой формы изгиба системы S и заданы жесткости опор α_i, то, производя каким-либо приближенным методом вычисление высшей частоты указанной струны, мы сможем всегда ответить на вопрос о принадлежности жесткостей к B-области.

В случае, рассмотренном И. Г. Бубновым и П. Ф. Папковичем, вычисления проводятся до конца.

Если $B(x) = \text{const}$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, то моделирующая струна, загруженная равными массами в равноотстоящих точках, будет иметь частоты, квадраты которых вычисляются по известным формулам [13]

$$\lambda_k = 4\frac{P_{n+1}}{\alpha l}(n+1)\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Условие принадлежности жесткости к B-области будет состоять в выполнении неравенства

$$\alpha \geqslant 4(n+1)\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{P_{n+1}}{l},$$

или после подстановки значения P_{n+1}

$$\alpha \geqslant 4(n+1)^3\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{\pi^2 B}{l^3}.$$

Предельная жесткость определяется равенством

$$\alpha = 4(n+1)^3\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{\pi^2 B}{l^3}.$$

В заключение заметим, что простым повторением приведенных рассуждений можно решить задачу о принадлежности жесткостей промежуточных опор к B-области по отношению к первой частоте колебания системы S_n^α. Ответ на вопрос будет содержаться в тех же теоремах, но только функцию $\Delta(x, s : P)$ следует всюду заменить на $\Gamma(x, s : \lambda)$ — функцию влияния амплитудных смещений вибрирующей балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, т. I, 1912.

2. П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. II, 1941.

3. Я. Л. Нудельман, Прикладная математика и механика, т. III, вып. IV, 1936.

4. Я. Л. Нудельман, Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, 1949.

5. E. Trefftz, ZAMM, B. 3, 1923.

6. O. Blümenthal, ZAMM, B. 17, H. 4, 1937.

7. М. Д. Дольберг, Записки н.-и. института математики и механики и Харьковского математического об-ва, т. XXII, 1951.

8. М. Д. Дольберг, ДАН, т. XXI, № 5, 1950.

9. Я. Л. Нудельман, Труды Одесского ун-та, т. I, 1937.

10. М. Г. Крейн и Я. Л. Нудельман, Труды Одесского ун-та, т. I, 1937.

11. H. Batheman, Messengers of Mathematics, 37 (12) 1908.

12. Л. Б. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.

13. Рэлей, Теория звука, 1940.

Поступила 3.IV 1951 г.

Харьков.