Задача Дирихле для эллиптической системы линейных диференциальных уравнений 2-го порядка на плоскости

А. И. Вольперт

Рассмотрим однородную эллиптическую систему линейных диференциальных уравнений 2-го порядка общего вида на плоскости

$$\sum_{l=1}^{p}\left(a_{kl}^{20}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}+2a_{kl}^{11}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x\,\partial y}+a_{kl}^{02}\frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2}+a_{kl}^{10}\frac{\partial u_l}{\partial x}+a_{kl}^{01}\frac{\partial u_l}{\partial y}+a_{kl}^{00}u_l\right)=0,$$
$$(k=1,\ldots,p)$$

где $a_{kl}^{ij}=a_{kl}^{ij}(x, y)$ — непрерывно диференцируемые четыре раза функции в некоторой области D или в матричной записи:

$$S(u)\equiv A^{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2A^{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A^{02}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A^{10}\frac{\partial u}{\partial x}+A^{01}\frac{\partial u}{\partial y}+A^{00}u=0, \qquad (1)$$

где

$$A^{ij}=\begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & \ldots & a_{1p}^{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}^{ij} & \ldots & a_{pp}^{ij} \end{pmatrix}, \qquad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}.$$

Под эллиптичностью понимается: детерминант матрицы

$$A(x, y; \alpha_1, \alpha_2)=A^{20}(x, y)\alpha_1^2+2A^{11}(x, y)\alpha_1\alpha_2+A^{02}(x, y)\alpha_2^2$$

есть форма положительно определенная (по α_1, α_2) при $(x, y)\in D$.

Пусть задана m-связная конечная область $T\subset D$, ограниченная гладким в смысле Гельдера контуром [1]. Под регулярным в области T столбцом понимается столбец, удовлетворяющий системе (1) и имеющий в T вторые непрерывные производные. В настоящей работе рассматривается следующая

З а д а ч а Д и р и х л е. Найти столбец $u(x, y)$, регулярный в области T, непрерывный в $T+L$ и удовлетворяющий граничному условию

$$u^+(t)=f(t) \qquad (t\in L),$$

где $f(t)$ — заданный непрерывный в смысле Гельдера на L столбец. Здесь и в дальнейшем принято обозначение: $u^+(t)$ — предельное значение столбца $u(x, y)$, когда точка $(x, y)\in T$ стремится к точке t контура L.

[1]) См., например, Векуа [4], стр. 11.

Решение задачи Дирихле строится при помощи фундаментальных матриц (φ), построенных Я. Б. Лопатинским [1, 2], и ищется в виде интеграла

$$u(x, y) = \int_L K(\xi, \eta; x, y)\,\mu(\xi, \eta)\,ds, \tag{2}$$

который можно рассматривать как обобщение потенциала двойного слоя на данную систему. Подробная запись матрицы $K(\xi, \eta; x, y)$ через коэфициенты уравнения (1) и фундаментальную матрицу $\varphi(\xi, \eta; x, y)$ будет дана ниже.

Если матрицы коэфициентов при старших производных уравнения (1) удовлетворяют условию на контуре

$$\det \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^{-1}(t, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t, \alpha)\,d\alpha \neq 0 \tag{3}$$

для всех точек $t \in L$, где

$$A(t, \alpha) = A^{20}(t)\,\alpha^2 + 2A^{11}(t)\,\alpha + A^{02}(t),$$

Γ — контур в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$, охватывающий все корни полинома $\det A(t, \alpha)$, лежащие в этой полуплоскости, то для определения столбца $\mu(\xi, \eta)$, входящего в выражения (2), строится система интегральных уравнений Фредгольма, т. е. задача Дирихле сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма (в указанном смысле).

Очевидно, условие (3) может быть представлено также в следующем виде:

$$\det \sum_\alpha \operatorname{Res}\left[A^{-1}(t, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t, \alpha)\right] \neq 0 \qquad (t \in L),$$

где сумма берется по всем нулям полинома $\det A(t, \alpha)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$.

Левая часть выражения (3) является „логарифмическим вычетом“ матрицы $A(t, \alpha)$.

При $p=1$ [т. е. в случае одного уравнения (1)], очевидно, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^{-1}(t, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t, \alpha)\,d\alpha = 1.$$

Доказывается, что и в случае $p > 1$ при условии обращения в нуль на контуре L коэфициентов при смешанных производных (т. е. $A^{11}(t)=0$ при $t \in L$) имеет место аналогичное равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^{-1}(t, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t, \alpha)\,d\alpha = E, \tag{4}$$

где E — единичная матрица, т. е. условие (3) выполняется. В частности, это верно, если старшие члены — операторы Лапласа. Легко также показать, что если система имеет треугольную или диагональную форму относительно старших членов, то условие (3) выполняется.

В качестве примера рассматривается система уравнений, встречающаяся в плоской теории упругости ортотропного тела.

1. Рассмотрим сопряженный оператор к оператору $S(u)$:

$$S^*(v) = \frac{\partial^2 (vA^{20})}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 (vA^{11})}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 (vA^{02})}{\partial y^2} - \frac{\partial (vA^{10})}{\partial x} - \frac{\partial (vA^{01})}{\partial y} + vA^{00},$$

где $v=(v_1, \ldots, v_p)$.

Имеет место формула

$$vS(u) - S^*(v)\,u = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}, \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} B_1 = vA^{20}\dfrac{\partial u}{\partial x} + vA^{11}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial (vA^{20})}{\partial x}\,u - \dfrac{\partial (vA^{11})}{\partial y}\,u + vA^{10}u, \\[2ex] B_2 = vA^{02}\dfrac{\partial u}{\partial y} + vA^{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial (vA^{02})}{\partial y}\,u - \dfrac{\partial (vA^{11})}{\partial x}\,u + vA^{01}u. \end{cases} \tag{6}$$

Под u и v можно понимать произвольные, дважды диференцируемые матрицы соответствующих размеров. Если u и v дважды непрерывно диференцируемы в области T, то формула (5) может быть представлена в виде

$$\iint\limits_T [S^*(v)\,u - vS(u)]\,dx\,dy = \int\limits_L [B_1 \cos(\nu x) + B_2 \cos(\nu y)]\,ds, \tag{7}$$

где ν — внутренняя нормаль.

2. В дальнейшем будут использованы следующие свойства фундаментальной матрицы $\varphi(\xi, \eta; x, y)$, доказанные Я. Б. Лопатинским [1, 2].

Пусть D_0 — конечная замкнутая область такая, что $T + L \subseteq D_0 \subset D$. Тогда в области D_0 строится фундаментальная матрица $\varphi(\xi, \eta; x, y)$ ((x, y), $(\xi, \eta) \in D_0$) со следующими свойствами:

1) $\quad S_{xy}(\varphi) = 0$

2) $\quad S^*_{\xi\eta}(\varphi) = 0 \quad$ (при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$),

т. е. столбцы матрицы φ представляют собой решения системы (1) по переменным (x, y), а строки матрицы φ решения сопряженной системы по переменным (ξ, η).

3) Для всякого столбца $u(\xi, \eta)$, имеющего непрерывные вторые производные в окрестности точки (x, y), справедлива формула:

$$u(x, y) = \lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{C_\varrho} [B_1(u, \varphi) \cos(\nu\xi) + B_2(u, \varphi) \cos(\nu\eta)]\,ds, \tag{8}$$

где C_ϱ — окружность с центром в (x, y) радиуса ϱ, ν — внутренняя нормаль.

4) При тех же предположениях:

$$\frac{1}{2}u(x, y) = \lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{C'_\varrho}[B_1(u, \varphi)\cos(\nu\xi)+B_2(u, \varphi)\cos(\nu\eta)]\,ds, \tag{9}$$

где C'_ϱ — полуокружность с центром в (x, y) радиуса ϱ.

5) Элементы матрицы $\varphi(\xi, \eta; x, y)$ имеют логарифмическую особенность, а первые производные — особенность 1-го порядка при $(\xi, \eta)=(x, y)$.

Полагая $\zeta=\xi+i\eta$, $z=x+iy$, будем в дальнейшем писать $\varphi(\zeta, z)$ вместо $\varphi(\xi, \eta; x, y)$.

3. Из этих свойств вытекают такие непосредственные следствия:

Формула (7) запишется (при $z\in T+L$):

$$\int\limits_L[B_1(u, \varphi)\cos(\nu\xi)+B_2(u, \varphi)\cos(\nu\eta)]\,ds = \\ = -\iint\limits_T\varphi(\zeta, z)\,S_{\xi\eta}(u)\,d\xi\,d\eta. \tag{10}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} C_1(\zeta, z) &= -\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{20}(\zeta)]}{\partial\xi}-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{11}(\zeta)]}{\partial\eta}+\varphi(\zeta, z)A^{10}(\zeta),\\ C_2(\zeta, z) &= -\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{02}(\zeta)]}{\partial\eta}-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{11}(\zeta)]}{\partial\xi}+\varphi(\zeta, z)A^{01}(\zeta)\end{aligned} \tag{11}$$

и положить в (10) $u(\zeta)=E$ (единичная матрица), то получим

$$\int\limits_L[C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)]\,ds = \\ = -\iint\limits_T\varphi(\zeta, z)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{12}$$

Формула (8) запишется так:

$$u(z)=\lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{C_\varrho}[C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)]\,u(\zeta)\,ds. \tag{13}$$

Формула (9):

$$\frac{1}{2}u(z) = \lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{C'_\varrho}[C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)]\,u(\zeta)\,ds. \tag{14}$$

При $z\in T$

$$u(z)=\int\limits_L[B_1(u, \varphi)\cos(\nu\xi)+B_2(u, \varphi)\cos(\nu\eta)]\,ds+ \\ +\iint\limits_T\varphi(\zeta, z)\,S_{\xi\eta}(u)\,d\xi\,d\eta. \tag{15}$$

В частности, положив $u=E$, получим

$$E=\int_L [C_1(\zeta,z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta,z)\cos(\nu\eta)]\,ds+\iint_T \varphi(\zeta,z)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{16}$$

4. Обозначим

$$I(z)=\int_L [C_1(\zeta,z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta,z)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds$$

$(z\,\overline{\in}\,L)$, $I^+(t)$, $I^-(t)$ — предельные значения $I(z)$ при $z\to t\in L$ соответственно изнутри и извне.

Тогда справедлива

Теорема. *Если матрица $\mu(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на L, то главное значение интеграла*

$$I(t)=\int_L [C_1(\zeta,t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta,t)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds$$

существует. Предельные значения $I^+(t)$ и $I^-(t)$ существуют, причем имеют место формулы

$$I^+(t)=\frac{1}{2}\mu(t)+I(t),$$

$$I^-(t)=-\frac{1}{2}\mu(t)+I(t).$$

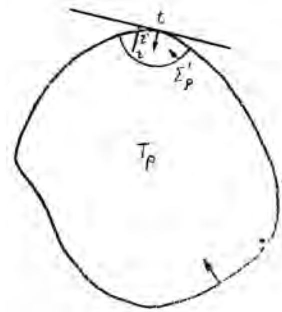

Рис. 1.

Доказательство. Пусть z' — точка пересечения прямой, параллельной нормали к L в точке t и проходящей через z, с кривой L. Тогда

$$I(z)=\int_L [C_1(\zeta,z)\cos(\nu\xi)+ C_2(\zeta,z)\cos(\nu\eta)]\,[\mu(\zeta)-\mu(z')]\,ds+\int_L [C_1(\zeta,z)\cos(\nu\xi)+ C_2(\zeta,z)\cos(\nu\eta)]\,ds\,\mu(z'). \tag{17}$$

Лемма 1. *Интеграл*

$$\int_L [C_1(\zeta,z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta,z)\cos(\nu\eta)]\,[\mu(\zeta)-\mu(z')]\,ds$$

равномерно сходится в точке t.

Это следует из оценок матрицы φ.

Лемма 2. *Главное значение интеграла*

$$\int_L [C_1(\zeta,t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta,t)\cos(\nu\eta)]\,ds \qquad (t\in L)$$

существует.

Доказательство. Произведем построение, как указано на рисунке. Тогда по формуле (12)

$$\int\limits_{L_\varrho} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds =$$

$$= \int\limits_{\Sigma'_\varrho} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds - \tag{18}$$

$$- \iint\limits_{T_\varrho} \varphi(\zeta, t)\, A^{00}(\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

Но из оценок матрицы φ следует:

$$\lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{\Sigma'_\varrho} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{\Sigma_\varrho} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds,$$

где Σ_ϱ — полуокружность $|\zeta - t| = \varrho$, отсеченная касательной к L в точке t.

Из формулы (14) имеем:

$$\frac{1}{2}E = \lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{\Sigma_\varrho} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds.$$

Поэтому, переходя к пределу в (18) при $\varrho \to 0$, получим:

$$\int\limits_{L} [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}E - \iint\limits_{T} \varphi(\zeta, t)\, A^{00}(\zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Согласно формулам (12) и (16) формулу (17) можно записать так: при $z \in T + L$

$$I(z) = \int\limits_{L} [C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)]\,[\mu(\zeta) - \mu(z')]\,ds -$$

$$- \iint\limits_{T} \varphi(\zeta, z)\, A^{00}(\zeta)\, d\xi\, d\eta \cdot \mu(z'); \tag{20}$$

при $z \in T$

$$I(z)=\int\limits_L [C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)][\mu(\zeta)-\mu(z')]\,ds -$$
$$-\iint\limits_T \varphi(\zeta, z)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta\cdot\mu(z')+\mu(z'). \tag{21}$$

Из непрерывности правых частей следует существование $I^-(t)$ и $I^+(t)$, причем

$$I^-(t)=\int\limits_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)][\mu(\zeta)-\mu(t)]\,ds -$$
$$-\iint\limits_T \varphi(\zeta, t)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta\cdot\mu(t). \tag{22}$$

$$I^+(t)=\int\limits_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)][\mu(\zeta)-\mu(t)]\,ds -$$
$$-\iint\limits_T \varphi(\zeta, t)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta\,\mu(t)+\mu(t). \tag{23}$$

На основании леммы 2 формула (22) может быть записана:

$$I^-(t)=\int\limits_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds -$$
$$-\int\limits_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,ds\cdot\mu(t) -$$
$$-\iint\limits_T \varphi(\zeta, t)\,A^{00}(\zeta)\,d\xi\,d\eta\cdot\mu(t),$$

причем отсюда следует существование главного значения первого интеграла. Подставив в последнюю формулу (19), получим:

$$I^-(t)=-\frac{1}{2}\mu(t)+I(t).$$

Далее, из (22) и (23) следует

$$I^+(t)=I^-(t)+\mu(t)=\frac{1}{2}\mu(t)+I(t).$$

Теорема доказана.

5. Будем искать решение задачи Дирихле в виде

$$u(z)=\int\limits_L K(\zeta, z)\,\mu(\zeta)\,ds, \tag{2}$$

где $K(\zeta, z)=C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)$.

На основании доказанной теоремы задача Дирихле сводится к следующему интегральному сингулярному уравнению:

$$\frac{1}{2}\mu(t)+\int\limits_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\mu(\zeta)\,ds=f(t). \tag{24}$$

Выделим главную часть сингулярного интеграла.

В дальнейшем матричный оператор Фредгольма будет обозначаться R, его ядро M (с индексом).

Введем следующие обозначения:

$$K_1(\zeta, z)=-\frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial\xi}A^{20}(\zeta)-\frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial\eta}A^{11}(\zeta),$$
$$K_2(\zeta, z)=-\frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial\eta}A^{02}(\zeta)-\frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial\xi}A^{11}(\zeta). \tag{25}$$

Тогда уравнение (24) может быть записано:

$$\frac{1}{2}\mu(t)+\int\limits_L [K_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi)+K_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\mu(\zeta)\,ds+R=f(t). \tag{26}$$

Подсчитаем производные матрицы $\varphi(\zeta, z)$. При этом будут использованы формулы, доказанные Я. Б. Лопатинским [1].

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \cdots & \varphi_{p1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1p} & \cdots & \varphi_{pp}\end{pmatrix},$$

причем

$$\varphi_{kl}(\zeta, z)=\psi_{kl}(\zeta, z)+m_{kl}^{(1)}(\zeta, z), \tag{27}$$

где $m_{kl}^{(1)}(\zeta, z)$ имеет первые производные с оценкой $\frac{C}{|\zeta-z|^{\lambda}}$, $0<\lambda<1$. $\psi_{kl}(\zeta, z)$ определяется следующим образом: положим

$$A_{kl}(\zeta;\alpha_1,\alpha_2)=a_{kl}^{20}(\zeta)\alpha_1^2+2a_{kl}^{12}(\zeta)\alpha_1\alpha_2+a_{kl}^{02}(\zeta)\alpha_2^2.$$

Очевидно, $A_{kl}(\zeta;\alpha_1,\alpha_2)$ есть элементы матрицы $A(\zeta;\alpha_1,\alpha_2)$. Пусть $\mathfrak{A}_{kl}(\zeta;\alpha_1,\alpha_2)$ есть алгебраическое дополнение элемента $A_{kl}(\zeta;\alpha_1,\alpha_2)$ в этой матрице. Тогда

$$\psi_{kl}(\zeta, z)=\mathfrak{A}_{kl}\left(\zeta;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\psi(\zeta, z),$$
$$\psi(\zeta, z)=\varphi_0(\zeta-z, \zeta),$$

где $\varphi_0(\zeta-z, \tau)$ — фундаментальная функция оператора $\det A\left(\tau;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$.

Полагая

$$\mathfrak{A}_{kl}\left(\zeta;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)=\sum_{j=0}^{2p-2}X_{kl}^{j}(\zeta)\frac{\partial^{2p-2}}{\partial\xi^{j}\,\partial\eta^{2p-2-j}},$$

получим

$$\psi_{kl}(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{2p-2} X_{kl}^j(\zeta) \frac{\partial^{2p-2}\psi(\zeta, z)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^{2p-2-j}}.$$

Наконец,

$$\frac{\partial\psi_{kl}(\zeta, z)}{\partial\xi} = \sum_{j=0}^{2p-2} X_{kl}^j(\zeta) \frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta-z, \tau)}{\partial\xi^{j+1}\,\partial\eta^{2p-2-j}}\Bigg|_{\tau=\zeta} + m_{kl}^{(2)}(\zeta, z);$$

$$\frac{\partial\psi_{kl}(\zeta, z)}{\partial\eta} = \sum_{j=0}^{2p-2} X_{kl}^j(\zeta) \frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta-z, \tau)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^{2p-1-j}}\Bigg|_{\tau=\zeta} + m_{kl}^{(3)}(\zeta, z).$$

Отсюда и из (27) получим:

$$\frac{\partial\varphi_{kl}(\zeta, z)}{\partial\xi} = \sum_{j=0}^{2p-2} X_{kl}^j(\zeta) \frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta-z, \tau)}{\partial\xi^{j+1}\,\partial\eta^{2p-2-j}}\Bigg|_{\tau=\zeta} + m_{kl}^{(4)}(\zeta, z);$$

$$\frac{\partial\varphi_{kl}(\zeta, z)}{\partial\eta} = \sum_{j=0}^{2p-2} X_{kl}^j(\zeta) \frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta-z, \tau)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^{2p-1-j}}\Bigg|_{\tau=\zeta} + m_{kl}^{(5)}(\zeta, z), \tag{28}$$

где

$$|m_{kl}^{(i)}(\zeta, z)| \leqslant \frac{C}{(\zeta-z)^\lambda}, \qquad 0 \leqslant \lambda < 1 \qquad (i=2, 3, 4, 5).$$

Запишем теперь явное выражение для $\varphi_0(\zeta, \tau)$ [1]

$$\varphi_0(\zeta, \tau) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{S(\zeta)} \frac{\Phi(\zeta, \alpha)}{f(\tau, \alpha)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

где $f(\tau, \alpha) = \det A(\tau; \alpha_1, \alpha_2)$

$$\frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta, \tau)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{S(\zeta)} \frac{\partial^{2p-1}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\, \frac{\Phi(\zeta, \alpha)}{f(\tau, \alpha)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2.$$

Но

$$\frac{\partial^{2p-1}\Phi(\zeta, \alpha)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j} = -\frac{1}{2\pi i}\, \frac{\alpha_1^i\,\alpha_2^j}{\xi\alpha_1+\eta\alpha_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta, \tau)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j} = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \iint\limits_{S(\zeta)} \frac{\alpha_1^i\,\alpha_2^j\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{f(\tau, \alpha)\,(\xi\alpha_1+\eta\alpha_2)}. \tag{29}$$

Применим формулу, доказанную Я. Б. Лопатинским [1]

$$\iint\limits_{S(\zeta)} \frac{\alpha_1^i\,\alpha_2^j\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{f(\tau, \alpha)\,(\xi\alpha_1+\eta\alpha_2)} = 2\pi i|\zeta| \left\{ \left[\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\eta_1^i\,\eta_2^j\, d\beta}{f(\tau; \eta_1, \eta_2)\,(\xi\eta_1+\eta\eta_2)} \right]_{\substack{t_1=-\frac{\eta}{|\zeta|}\\ t_2=+\frac{\xi}{|\zeta|}}} + \right.$$

$$\left. + \left[\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\eta_1^i\,\eta_2^j\, d\beta}{f(\tau; \eta_1, \eta_2)\,(\xi\eta_1+\eta\eta_2)} \right]_{\substack{t_1=\frac{\eta}{|\zeta|}\\ t_2=\frac{-\xi}{|\zeta|}}} \right\} \tag{30}$$

$$\eta_1 = \beta\xi + t_1, \quad \eta_2 = \beta\eta + t_2.$$

Подсчитаем первый из интегралов справа:

$$\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\eta_1^i\,\eta_2^j\,d\beta}{f(\tau;\,\eta_1,\eta_2)(\xi\eta_1+\eta\eta_2)} = \frac{1}{|\zeta|^2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\eta_1^i\,\eta_2^j\,d\beta}{f(\tau;\,\eta_1,\,\eta_2)\,\beta}, \tag{31}$$

где $\eta_1=\beta\xi-\frac{\eta}{|\zeta|}$, $\eta_2=\beta\eta+\frac{\xi}{|\zeta|}$.

Положим $\alpha=\frac{\eta_1}{\eta_2}$. Тогда $f(\tau;\,\eta_1,\eta_2)=\eta_2^{2p}f(\tau;\,\alpha,1)$.

Обозначим $f(\tau;\,\alpha,1)=f(\alpha)$.

Тогда интеграл (31) примет вид:

$$\frac{1}{|\zeta|^2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\beta}{f(\alpha)\,\beta\eta_2}.$$

Учитывая, что

$$\alpha=\frac{\beta\xi|\zeta|-\eta}{\beta\eta|\zeta|+\xi}, \tag{32}$$

получим

$$\frac{d\beta}{\beta\eta_2}=\frac{|\zeta|\,d\alpha}{\alpha\xi+\eta}.$$

Преобразование (32) переводит верхнюю полуплоскость в себя и прямую $(-\infty+\varepsilon i,\ +\infty+\varepsilon i)$ в окружность, внутри которой лежат все корни $f(\alpha)$. Поэтому

$$\frac{1}{|\zeta|^2}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\beta}{f(\alpha)\beta\eta_2}=\frac{1}{|\zeta|}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}.$$

Аналогично, подсчитав второй интеграл в (30), получим

$$\frac{1}{|\zeta|}\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}.$$

Следовательно, по формуле (30)

$$\iint\limits_{S(\zeta)}\frac{\alpha_1^i\,\alpha_2^j\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{f(\tau;\,\alpha_1,\,\alpha_2)\,(\xi\alpha_1+\eta\alpha_2)}=2\pi i\left\{\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty-\varepsilon i}^{+\infty-\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}\right\}=4\pi i\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}.$$

Из формулы (29) получим

$$\frac{\partial^{2p-1}\varphi_0(\zeta,\tau)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}=-\frac{2}{(2\pi i)^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}\frac{\alpha^i\,d\alpha}{f(\alpha)(\alpha\xi+\eta)}. \tag{33}$$

Подставив это в формулу (28), получим:

$$\frac{\partial \varphi_{kl}(\zeta, z)}{\partial \xi} = -\frac{2}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\alpha \mathfrak{A}_{kl}(\zeta, \alpha)\, d\alpha}{f(\zeta, \alpha)\,[\alpha(\xi-x)+(\eta-y)]} + m_{kl}^{(4)}(\zeta, z);$$

$$\frac{\partial \varphi_{kl}(\zeta, z)}{\partial \eta} = -\frac{2}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{\mathfrak{A}_{kl}(\zeta, \alpha)\, d\alpha}{f(\zeta, \alpha)\,[\alpha(\xi-x)+(\eta-y)]} + m_{kl}^{(5)}(\zeta, z).$$

В матричной форме это может быть записано:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\zeta, z)}{\partial \xi} &= -\frac{2}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{A^{-1}(\zeta, \alpha)\,\alpha\, d\alpha}{\alpha(\xi-x)+(\eta-y)} + M_1(\zeta, z), \\ \frac{\partial \varphi(\zeta, z)}{\partial \eta} &= -\frac{2}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{A^{-1}(\zeta, \alpha)\, d\alpha}{\alpha(\xi-x)+(\eta-y)} + M_2(\zeta, z), \end{aligned} \tag{34}$$

где $A(\zeta, \alpha) = A^{20}(\zeta)\alpha^2 + 2A^{11}(\zeta)\alpha + A^{02}(\zeta)$.

Вернемся теперь к интегралу (26). Учитывая формулы (25) и (34), получим,

$$K_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta) =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} \frac{A^{-1}(\zeta, \alpha)\{[A^{20}(\zeta)\alpha + A^{11}(\zeta)]\cos(\nu\xi) + [A^{11}(\zeta)\alpha + A^{02}(\zeta)]\cos(\nu\eta)\}}{\alpha(\xi-x)+(\eta-y)}\, d\alpha + M(\zeta, z). \tag{35}$$

Если ζ пробегает ограниченное замкнутое множество, то множество соответствующих корней α полинома $f(\zeta, \alpha)$ также ограничено и замкнуто. В частности это верно при $\zeta \in L$. Поэтому последний интеграл можно заменить интегралом по конечному замкнутому контуру Γ, охватывающему все корни полинома $f(\zeta, \alpha)$ $(\zeta \in L)$, лежащие в верхней полуплоскости. При этом можно считать, что Γ не пересекает действительной оси.

Воспользуемся тождеством

$$A^{11}(\zeta)\alpha + A^{02}(\zeta) = A(\zeta, \alpha) - \alpha[A^{20}(\zeta)\alpha + A^{11}(\zeta)].$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{A^{-1}(\zeta, \alpha)\, A(\zeta, \alpha)}{\alpha(\xi-x)+(\eta-y)}\, d\alpha = 0,$$

мы можем записать (35) в виде

$$K_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma} A^{-1}(\zeta, \alpha) \frac{d}{d\alpha} A(\zeta, \alpha) \frac{\cos(\nu\xi) - \alpha\cos(\nu\eta)}{\alpha(\xi-x)+(\eta-y)}\, d\alpha + M(\zeta, z). \tag{36}$$

Положим

$$K_0(\zeta, z) = \pi i (\zeta - z) \overline{\zeta'(s)} [K_1(\zeta, z) \cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, z) \cos(\nu\eta)].$$

Тогда уравнение (26) запишется:

$$\frac{1}{2}\mu(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L} \frac{K_0(\zeta, t)\mu(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - t} + R = f(t). \quad (37)$$
$$(t \in L)$$

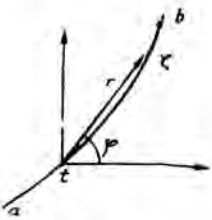

Рис. 2.

Подсчитаем $\lim\limits_{\zeta \to t} K_0(\zeta, t)$ при ζ, $t \in L$. Положим $\zeta - t = re^{i\varphi}$, $t = x + iy$. Пусть сначала $\zeta \in tb$. Тогда

$$\lim_{r \to 0} r[K_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{r \to 0} r \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma} A^{-1}(\zeta, \alpha) \frac{d}{d\alpha} A(\zeta, \alpha) \frac{\cos(\nu\xi) - \alpha\cos(\nu\eta)}{\alpha(\xi - x) + (\eta - y)}\, d\alpha.$$

Но

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\cos(\nu\xi) - \alpha\cos(\nu\eta)}{\alpha(\xi - x) + (\eta - y)} = \frac{\cos(\nu\xi) - \alpha\cos(\nu\eta)}{\alpha\cos\theta + \sin\theta},$$

где $(\nu\xi)$ и $(\nu\eta)$ углы внутренней нормали к L в точке t соответственно с осями ξ и η; θ — угол касательной к L в точке t с осью ξ.

Так как $\cos(\nu\xi) = -\sin\theta$, $\cos(\nu\eta) = \cos\theta$, то

$$\frac{\cos(\nu\xi) - \alpha\cos(\nu\eta)}{\alpha\cos\theta + \sin\theta} = -1.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \to 0} r[K_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)] =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma} A^{-1}(t, \alpha) \frac{d}{d\alpha} A(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Далее,

$$\lim_{r \to 0} e^{i\varphi}\, \overline{\zeta'(s)} = 1.$$

Аналогично получим при $\zeta \in at$

$$\lim_{r \to 0} r[K_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + K_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma} A^{-1}(t, \alpha) \frac{d}{d\alpha} A(t, \alpha)\, d\alpha$$

$$\lim_{r \to 0} e^{i\varphi}\, \overline{\zeta'(s)} = -1.$$

Поэтому

$$\lim_{\zeta \to t} K_0(\zeta, t) = -\frac{1}{4\pi i} \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma} A^{-1}(t, \alpha) \frac{d}{d\alpha} A(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Следовательно, $K_0(\zeta, t)$ непрерывна на L, если положить

$$B(t)=K_0(t, t)=-\frac{1}{4\pi i}\operatorname{Re}\int_{\Gamma} A^{-1}(t,\alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t,\alpha)\,d\alpha. \tag{38}$$

6. Докажем, что

$$\frac{1}{2}E-B(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma} A^{-1}(t,\alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t,\alpha)\,d\alpha. \tag{39}$$

Действительно, преобразуем подинтегральное выражение в (38). Обозначим $b_{lm}(t)$ элементы матрицы $B(t)$, $A'_{lm}(t,\alpha)$ элементы матрицы $\frac{d}{d\alpha}A(t,\alpha)$. Тогда (38) запишется

$$b_{lm}(t)=-\frac{1}{4\pi i}\operatorname{Re}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{A}_{jl}(t,\alpha)\,A'_{jm}(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha. \tag{38a}$$

Пусть сначала $l\neq m$.
Тогда

$$\sum_{j=1}^{p}A'_{jm}\mathfrak{A}_{jl}=\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1l-1}\,A'_{1m}\,A_{1l+1}\ldots A_{1p}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{p1}\ldots A_{pl-1}\,A'_{pm}\,A_{pl+1}\ldots A_{pp}\end{vmatrix}. \tag{40}$$

Представив m-ый столбец в виде

$$A_{km}(t,\alpha)=\frac{1}{2}\alpha A'_{km}(t,\alpha)+[a^{11}_{km}(t)\alpha+a^{02}_{km}(t)],$$

разложим определитель (40) на сумму двух определителей, из которых первый окажется равным нулю, а второй будет полиномом порядка $\leqslant 2p-2$ (по α). Поэтому

$$\int\frac{\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{A}_{jl}(t,\alpha)\,A_{jm}(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{A}_{jl}(t,\alpha)\,A'_{jm}(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha$$

действительная функция t.

Поэтому при $l\neq m$

$$b_{lm}(t)=-\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{A}_{jl}(t,\alpha)\,A'_{jm}(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha. \tag{38б}$$

Положим теперь $l=m$. Тогда числитель подинтегрального выражения в (38а) может быть записан

$$\sum_{j=1}^{p}A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm}=\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1m-1}\,A'_{1m}\,A_{1m+1}\ldots A_{1p}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{p1}\ldots A_{pm-1}\,A'_{pm}\,A_{pm+1}\ldots A_{pp}\end{vmatrix}.$$

Его старший член по α будет $2\alpha^{2p-1}\det A^{20}(t)$. Такой же старший член имеет полином $\frac{1}{p}\frac{d}{d\alpha}f(t,\alpha)$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{p} A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm} - \frac{1}{p}\frac{d}{d\alpha}f(t,\alpha)$$

есть полином порядка $\leqslant 2p-2$ относительно α.

Следовательно,

$$\int_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{j} A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm}}{f(t,\alpha)}\,d\alpha = \int_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{j} A'_{jn}\mathfrak{A}_{jm} - \frac{1}{p}\frac{d}{d\alpha}f(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha + \frac{1}{p}\int_{\Gamma}\frac{\frac{d}{d\alpha}f(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha.$$

Но первый интеграл действительный, а второй равен $2\pi i$. Поэтому

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{j} A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm}}{f(t,\alpha)}\,d\alpha = \int_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{j} A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm}}{f(t,\alpha)}\,d\alpha - 2\pi i.$$

Из (38а) получим:

$$b_{mm}(t) = -\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{j=1}^{p}\mathfrak{A}_{jm}(t,\alpha)A'_{jm}(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha + \frac{1}{2}. \tag{38c}$$

Учитывая эту формулу и формулу (38б), получим (39). Из формулы (39) следует, что условие (4) равносильно условию $B(t)=0$, т. е. условие (4) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (24) было уравнением Фредгольма.

Из (38) видно, что $\det\left[\frac{1}{2}E-B(t)\right]$ и $\det\left[\frac{1}{2}E+B(t)\right]$ комплексно сопряженные и поэтому равны или не равны нулю одновременно.

Поэтому условие нормальности уравнения (37) (Н. И. Мусхелишвили [3]): $\det\left[\frac{1}{2}E-B(t)\right]\neq 0 \quad (t\in L)$, или на основании (39)

$$\det\int_{\Gamma} A^{-1}(t,\alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t,\alpha)\,d\alpha \neq 0 \qquad (t\in L). \tag{41}$$

При выполнении этого условия уравнение (24) допускает регуляризацию, причем регуляризующий оператор, а следовательно, и уравнение Фредгольма могут быть явно построены.

Можно указать частный случай системы (1), когда задача Дирихле сводится непосредственно к уравнению Фредгольма: когда система не содержит вторых смешанных производных или коэфициенты при вторых смешанных производных равны нулю на контуре:

$$A^{11}(t)=0 \qquad (t\in L).$$

Действительно, в этом случае в формуле (38а) при $l \neq m$ мы можем заменить контур Γ действительной прямой и ввиду нечетности подынтегральной функции получим

$$b_{lm}(t) = 0.$$

При $l = m$ получаем

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma} \frac{\sum_j A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm}}{f(t,\alpha)}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_j A'_{jm}\mathfrak{A}_{jm} - \frac{1}{p}\frac{d}{d\alpha} f(t,\alpha)}{f(t,\alpha)}\,d\alpha = 0,$$

ввиду нечетности подинтегральной функции. Поэтому $b_{mm}(t) = 0$, $B(t) = 0$ и, следовательно, уравнение (24) является уравнением Фредгольма.

7. Найдем индекс уравнения (24) (Н. И. Мусхелишвили [3])

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det\left(\frac{1}{2}E - B\right)}{\det\left(\frac{1}{2}E + B\right)}\right]_L = \frac{1}{\pi}\left[\arg\det\int_{\Gamma} A^{-1}(t,\alpha)\frac{d}{d\alpha}A(t,\alpha)\,d\alpha\right]_L.$$

Если вместо условия (3) наложить на коэфициенты уравнения (1) более сильное ограничение

$$\det\int_{\Gamma} A^{-1}(z,\alpha)\frac{d}{d\alpha}A(z,\alpha)\,d\alpha \neq 0$$

при $z \in T + L$, то $\varkappa = 0$.

В этом случае из отсутствия ненулевых решений однородного уравнения (24) следует разрешимость задачи Дирихле для любого столбца $f(t)$, непрерывного в смысле Гельдера на L.

8. В качестве примера рассмотрим систему, к которой приводят некоторые задачи плоской теории упругости ортотропного тела.

$$\begin{gathered} a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+d)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + F_1 = 0, \\ (b+d)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_2 = 0, \end{gathered} \tag{42}$$

где F_1 и F_2 — линейные функции u, v и их первых производных; a, b, c, d — постоянные, удовлетворяющие условию эллиптичности рассматриваемой системы.

Легко показать, что необходимым условием эллиптичности является: $ac > 0$.

Условие (3) для системы (42) запишется в виде

$$(b+d)^2 \neq 4d\sqrt{ac}.$$

При выполнении этого условия задача Дирихле для рассматриваемой системы может решаться по указанному выше методу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский, Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных диференциальных уравнений, Укр. математ. журнал № 1 (1951).

2. Я. Б. Лопатинский, Фундаментальные решения системы диференциальных уравнений эллиптического типа II, Укр. математ. журнал № 3, 1951.

3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М. (1946).

4. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М. (1948).

Поступила 23.XII 1950 г. Львов.