К вопросу о сходимости последовательностей функций в смысле метрики Вейля D_{W_ω}

А. С. Кованько

Нами было показано [1], [2], что пространство Вейля $\{D_{W_\omega}\}$ неполное, т. е. не всякая фундаментальная последовательность функций оказывается сходящейся (в смысле метрики D_{W_ω}).

Цель настоящей статьи — дать достаточные условия, при которых фундаментальная последовательность функций оказывается также сходящейся.

§ 1

Напомним некоторые определения и теоремы, необходимые для наших дальнейших построений.

Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ есть комплексная функция класса L_ω, т. е. такая, для которой $|f(x)|^\omega$ суммируемо на каждом конечном интервале.

Рассмотрим следующие метрики:

Метрика В. Степанова

$$D_{S_\omega}^T(f, \varphi) = \sup_{-\infty<a<+\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_a^{a+T} |f(x)-\varphi(x)|^\omega dx \right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{1}$$

Метрика Вейля

$$D_{W_\omega}(f, \varphi) = \lim_{T\to\infty} D_{S_\omega}^T(f, \varphi). \tag{2}$$

Метрика Безиковича

$$D_{B_\omega}(f, \varphi) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)-\varphi(x)|^\omega dx \right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{3}$$

Между величинами (1), (2) и (3) всегда существует соответствие:

$$D_{B_\omega}(f, \varphi) \leqslant D_{W_\omega}(f, \varphi) \leqslant D_{S_\omega}^T(f, \varphi). \tag{4}$$

Кроме того, указанные метрики удовлетворяют правилу треугольника, что легко доказывается на основании неравенства Минковского.

Напомним также следующую теорему Марцинкевича [3] и схему ее доказательства:

Теорема. *Дана последовательность функций:* $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ *класса* L_ω *таких, что*

1) $D_{B_\omega}(f_n, 0) < +\infty \qquad (n=1, 2, 3\ldots)$,

2) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} D_{B_\omega}(f_n, f_m)=0.$

Тогда существует функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ *класса* L_ω, *что*

1) $D_{B_\omega}(f, 0) < +\infty$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} D_{B_\omega}(f, f_n)=0.$

Приведем схему построения искомой функции $f(x)$.

1) Выделим из последовательности $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ такую подпоследовательность $\{f_{n_i}(x)\}$ $(i=1, 2, 3,\ldots)$, чтобы

$$D_{B_\omega}(f_{n_{i+1}}, f_{n_i}) < 2^{-(i+1)}. \tag{5}$$

2) Строим бесконечно возрастающую последовательность чисел:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

так, чтобы

$$\lambda_{i+1} \geqslant 2\lambda_i$$

и чтобы

$$\sup_{\lambda_{i+1}\leqslant T<\infty}\left\{\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{+T}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|^\omega\,dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} \leqslant 2^{-i}. \tag{6}$$

3) $f(x)$ определяется затем следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} f_{n_i}(x), & \text{если } \lambda_i\leqslant|x|<\lambda_{i+1} \qquad (i=1, 2, 3,\ldots). \\ 0, & \text{если } |x|<\lambda_1. \end{cases}$$

Следуя современной терминологии, мы сформулируем следующие определения:

Определение I. Последовательность функций

$$\{f_n(x)\} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (n=1, 2, 3,\ldots)$$

называется фундаментальной в смысле метрики $D^{(\omega)}$ [$D^{(\omega)}$ означает кратко одну из метрик (1), (2), (3)], если

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} D^{(\omega)}(f_m, f_n)=0.$$

Определение II. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся в смысле метрики $D^{(\omega)}$, если существует такая „предельная“ функция $f(x)$, что

$$D^{(\omega)}(f, 0) < \infty$$

и что

$$\lim_{n\to\infty} D^{(\omega)}(f, f_n)=0.$$

Для $D^{(\omega)}=D^T_{S_\omega}$ оба понятия, данные в определениях I и II, совпадают между собой, как это следует из нашей статьи [4]. Для $D_\omega=D^T_{B_\omega}$ оба понятия также совпадают, как это следует из теоремы Марцинкевича. Наоборот, для $D^{(\omega)}=D_{W_\omega}$ понятия, данные в определениях I и II, не совпадают, как это было показано нами (см. [1], [2]), а именно: определение I является более широким, чем определение II.

§ 2

Определение I-а. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L_ω называется D_{W_ω}-равномерно фундаментальной, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $T_0(\varepsilon) > 0$, что

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}} D^T_{S_\omega}(f_n, f_m) < \varepsilon, \quad \text{если } T > T_0(\varepsilon).$$

Определение II-а. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L_ω называется D_{W_ω}-равномерно сходящейся, если существует такая функция $f(x)$, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $T_0(\varepsilon) > 0$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D^T_{S_\omega}(f, f_n) < \varepsilon, \quad \text{если } T > T_0(\varepsilon).$$

Теорема. *Дана последовательность функций $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L_ω. Необходимое и достаточное условие, чтобы эта последовательность была D_{W_ω}-равномерно сходящейся, состоит в том, чтобы она была D_{W_ω}-равномерно фундаментальной.*

I. Условие необходимо. Пусть последовательность сходится D_{W_ω}-равномерно к функции $f(x)$, тогда D_{W_ω}-равномерная фундаментальность ее с очевидностью вытекает из неравенства:

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}} D^T_{S_\omega}(f_n, f_m) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} D^T_{S_\omega}(f, f_n) + \overline{\lim_{m\to\infty}} D^T_{S_\omega}(f, f_m).$$

II. Условие достаточно. Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ D_{W_ω}-равномерно фундаментальна. Тогда во всяком случае она D_{W_ω}-фундаментальна, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} D_{W_\omega}(f_n, f_m) = 0.$$

Но тогда в силу соотношения (4) будет следовать, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} D_{B_\omega}(f_n, f_m) = 0,$$

а потому в силу теоремы Марцинкевича (см. § 1) следует существование такой функции $f(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_\omega}(f, f_n) = 0.$$

Покажем, что $f(x)$ есть искомая функция, т. е. является той функцией, к которой последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится D_{W_ω}-равномерно.

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ по условию D_{W_ω}-равномерно фундаментальна, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $T_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$, что

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}} D^T_{S_\omega}(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{когда } T > T_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Значит можно подобрать число N столь большим, что

$$D^T_{S_\omega}(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{когда } m > N \text{ и } n > N.$$

Вернемся к схеме доказательства теоремы Марцинкевича и построим подпоследовательность $\{f_{n_i}(x)\}$. Тогда последнее неравенство можно заменить таким:

$$D^T_{S_\omega}(f_{n_i}, f_{n_{i+q}}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } n_{i+q} > n_i > N,$$

откуда следует, что

$$\int_a^{a+T} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+q}}(x)|^\omega dx < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^\omega \cdot T. \tag{7}$$

Если $T > T_0$ и $n_i > N$, a — любое и q — любое натуральное число.

Кроме всех указанных требований, мы выбираем индекс i настолько большим, чтобы

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i > T_0 > \lambda_i. \tag{8}$$

Но, поскольку $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ возрастает с индексом i, значит подавно

$$\lambda_{+q+1} - \lambda_{i+q} > T_0 > \lambda_i \tag{9}$$

$$(q=0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим теперь величину

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta |f(x) - f_{n_i}(x)|^\omega dx,$$

где мы изменили обозначения, положив $\alpha = a$ и $\beta = a + T$ $(\beta > \alpha)$. Пусть, кроме того,

$$\lambda_{i+k} < \alpha \leqslant \lambda_{i+k+1},$$

$$\lambda_{i+k+l} < \beta \leqslant \lambda_{i+k+l+1},$$

причем будем считать $k>0$, а $l\geqslant 2$, что всегда возможно, поскольку $\beta-\alpha$ произвольно велико.

В силу самого способа построения $f(x)$ мы имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta}|f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx=\int_{\alpha}^{\lambda_{i+k+1}}|f-f_{n}|^{\omega}\,dx+\sum_{j=1}^{j=l-1}\int_{\lambda_{i+k+j}}^{\lambda_{i+k+j+1}}|f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx+$$

$$+\int_{\lambda_{i+k+l}}^{\beta}|f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx=\int_{\alpha}^{\lambda_{i+k+1}}|f_{n_{i+k}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{j=l-1}\int_{\lambda_{i+k+j}}^{\lambda_{i+k+j+1}}|f_{n_{i+k+j}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx+\int_{\lambda_{i+k+l}}^{\beta}|f_{n_{i+k+l}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx. \tag{10}$$

Оценим теперь модуль каждого члена в данной сумме. В силу соотношения (7) и условий (8) и (9), имеем

$$\int_{\lambda_{i+k+j}}^{\lambda_{i+k+j+1}}|f_{n_{i+k+j}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot(\lambda_{i+k+j+1}-\lambda_{i+k+1});$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{j=l-1}\int_{\lambda_{i+k+j}}^{\lambda_{i+k+j+1}}|f_{n_{i+k+j}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}(\lambda_{i+k+l}-\lambda_{i+k+1})$$

Пусть теперь r есть такое натуральное число, что

$$(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\cdot r\leqslant\lambda_{i+k+1}-\alpha\leqslant(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\cdot(r+1).$$

Положим $\lambda_{i+k+1}-r(\lambda_{i+1}-\lambda_i)=\alpha_1$.

Тогда получим

$$\int_{\alpha}^{\lambda_{i+k+1}}|f_{n_{i+k}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx=\int_{\alpha}^{\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{\lambda_{i+k+1}}\leqslant\int_{\alpha}^{\alpha_1}+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot r(\lambda_{i+1}-\lambda_i)=$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha_1}+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot(\lambda_{i+k+1}-\alpha_1).$$

Совершенно аналогично находим натуральное число s такое, что

$$s(\lambda_{i+1}-\lambda_i)<\beta-\lambda_{i+k+l}<(s+1)(\lambda_{i+1}-\lambda_i),$$

и положим

$$+\lambda_{i+k+l}+s(\lambda_{i+1}-\lambda_i)=\beta_1.$$

Тогда получим, что

$$\int\limits_{\lambda_{i+k+l}}^{\beta} |f_{n_{i+k+l}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx \leqslant \int\limits_{\beta_1}^{\beta} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} (\beta_1-\lambda_{i+k+l}).$$

Итак, мы получили оценки модулей всех интегралов, входящих в (10). Отсюда мы заключаем, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} (\lambda_{i+k+l}-\lambda_{i+k+1}) + \int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} |f_{n_{i+k}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx +$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot r(\lambda_{i+1}-\lambda_i) + \int\limits_{\beta_1}^{\beta} |f_{n_{i+k+l}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} (\beta_1-\lambda_{i+k+l}) =$$

$$=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot(\beta_1-\alpha_1) + \int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} |f_{n_{i+k}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx + \int\limits_{\beta_1}^{\beta} |f_{n_{i+k+l}}-f_{n_i}|^{\omega}\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\alpha+(\lambda_{i+1}-\lambda_i)} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot(\lambda_{i+1}-\lambda_i)$$

и

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta} \leqslant \int\limits_{\beta-(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}^{\beta} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\cdot(\lambda_{i+1}-\lambda_i).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} [(\beta_1-\alpha_1)+2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} [(\beta-\alpha)+2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)],$$

откуда

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} \left[1+\frac{2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}{\beta-\alpha}\right].$$

Введем следующие сокращенные обозначения

$$\int\limits_{a}^{b} |f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx = W(a,\,b)$$

и

$$2(\lambda_{i+1}-\lambda_i)=C.$$

Тогда имеем

$$\frac{W(\alpha, \beta)}{\beta-\alpha} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} \cdot \left(1+\frac{C}{\beta-\alpha}\right).$$

По симметрии заключаем, что последнее неравенство имеет также место, если α и β отрицательны ($\alpha < \beta$), причем (β) и $\beta-\alpha$ достаточно велики. Следовательно, существует такое достаточно большое фиксированное число $b > 0$, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{W(b, b+T)}{T} &< \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} \cdot \left(1+\frac{C}{T}\right) \\ \frac{W(-b+T, -b)}{T} &< \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} \cdot \left(1+\frac{C}{T}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

когда $T \geqslant T_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Пусть теперь α и β имеют различные знаки. Здесь возможны следующие случаи:

1) $\alpha < -b - T_0$ и $\beta > b+T_0$ (b имеет прежний смысл). Тогда в силу (11), мы получим:

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta) &= W(\alpha, -b)+W(-b, +b)+W(b, \beta) < \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left(1+\frac{C}{-b-\alpha}\right)(-b-\alpha)+W(-b, +b)+ \\ &+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left(1+\frac{C}{\beta-b}\right)(\beta-b)=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left[(\beta-\alpha-2b)+2C+\frac{W(-b,+b)}{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{W(\alpha, \beta)}{\beta-\alpha}=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left[1+\frac{2C+\frac{W(-b,+b)}{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}}-2b}{\beta-\alpha}\right]=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left(1+\frac{C_1}{\beta-\alpha}\right),$$

где мы положили $C_1=2C-2b+\frac{W(-b, +b)}{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}}$.

2) $\alpha > -b - T_0$ и $\beta > b+T_0$, тогда

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta) &= W(\alpha, b)+W(b, \beta) < \\ &< W(\alpha, b)+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left[1+\frac{C}{\beta-b}\right](\beta-b)= \\ &=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left[\frac{W(\alpha, b)}{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}}+\beta-b+C\right], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{W(\alpha,\ \beta)}{\beta-\alpha} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega} \left[1+\frac{\dfrac{W(\alpha,\ \beta)}{\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}}+C+(\beta-b)}{\beta-\alpha}\right] = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left[1+\frac{C_2}{\beta-\alpha}\right],$$

где

$$C_2 = \frac{W(\alpha,\ \beta)}{\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}} + C(\beta-b).$$

3) $\alpha < -b - T_0 \quad \beta < b+T_0$.

По симметрии со случаем 2, мы приходим к аналогичному неравенству.

Итак, во всех трех случаях мы имеем

$$\frac{W(\alpha,\ \beta)}{\beta-\alpha} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\omega}\left(1+\frac{A}{\beta-\alpha}\right), \quad \text{при } \beta-\alpha > T_0,$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная. Возвращаясь к нашим полным обозначениям, мы можем написать последнее неравенство так:

$$\left\{\frac{1}{T}\int\limits_{a}^{a+T}|f-f_{n_i}|^{\omega}\,dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\left(1+\frac{A}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \quad \text{если } T > T_0.$$

Следовательно,

$$D^T_{S_\omega}(f,\ f_{n_i}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\left(1+\frac{A}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}}. \tag{12}$$

Согласно настоящему условию (теоремы) мы имеем такое число N (то самое, что и выше), что

$$D^T_{S_\omega}(f_n,\ f_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

когда $n > N$ и $n_i > N$ и когда $T > T_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

T_0 мы можем выбрать произвольно большим.

Выберем $T_0 > A$.

Тогда, ввиду последнего неравенства и соотношения (12), имеем

$$D^T_{S_\omega}(f,\ f_n) \leqslant D^T_{S_\omega}(f_n,\ f_{n_i}) + D^T_{S_\omega}(f,\ f_{n_i}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\left(1+\frac{A}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\left(1+\frac{A}{T_0}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}(2)^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак,

$$D^T_{S_\omega}(f,\ f_n) < \varepsilon$$

при $n > N$ и при $T > T_0$.

Отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_\omega}^T(f, f_n) < \varepsilon \qquad \text{при} \quad T > T_0,$$

что и требовалось доказать.

§ 3

Естественно возникает вопрос, не будет ли последовательность, D_{W_ω}-равномерно сходящаяся, также сходящейся в смысле метрики $D_{S_\omega}^T$. Следующий пример покажет нам, что это не так.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = 1$ при $n \leqslant x \leqslant n+1$ и $f_n(x) = 0$ для остальных значений x на $(-\infty < x < +\infty)$. Очевидно тогда, что

$$\int_a^{a+T} |f_n(x) - f_m(x)|^\omega \, dx \leqslant 2 \quad \text{при любом } m \text{ и } n.$$

Отсюда

$$D_{S_\omega}^T(f_n, f_m) \leqslant \left(\frac{2}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}} \qquad \text{для любых } n \text{ и } m.$$

Таким образом, поскольку T произвольно велико, то последовательность D_{W_ω}-равномерно фундаментальная. Следовательно, в силу доказанной теоремы, и D_{W_ω}-равномерно сходящаяся, причем очевидно, что предельная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$D_{W_\omega}(f, 0) = 0.$$

Но сходимость в смысле метрики $D_{S_\omega}^T$ не имеет места, поскольку

$$D_{S_\omega}^T(f, f_n) = D_{S_\omega}^T(0, f_n) = \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}} \qquad (T > 1) \qquad \text{при любом } n.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_\omega}^T(f, f_n) = \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}} \neq 0.$$

Очевидно также, что не существует никакой другой функции $\varphi(x)$ такой, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_\omega}^T(\varphi, f_n) = 0.$$

§ 4

Приведем еще пример последовательности, которая сходится в смысле метрики D_{W_ω}, но не сходится D_{W_ω}-равномерно.

Пример 2. $f_n(x) = 1$ на интервале $(0 < x < n)$ и $f_n(x) = 0$ в остальных точках интервала $(-\infty, +\infty)$; тогда очевидно, что последовательность сходится к функции $f(x)=0$ в смысле метрики D_{W_ω} [$\omega \geqslant 1$ любое]. В самом деле

$$D_{S_\omega}^T(f_n, 0) < \left(\frac{n}{T}\right)^{\frac{1}{\omega}},$$

откуда следует, что

$$D_{W_\omega}^{\cdot}(f_n, 0)=0,$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty} D_{W_\omega}(f_n, 0)=0.$$

С другой стороны,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_\omega}^T(f_n, 0)=1,$$

как бы ни велико было T; следовательно, последовательность не сходится D_{W_ω}-равномерно.

В заключение приведем пример последовательности, фундаментальной в смысле метрики D_{W_ω}, но не сходящейся в смысле той же метрики.

Пример 3. Построим последовательность функций $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \ldots$), $\varphi_k(x)$ есть периодическая функция с периодом $2\cdot(k)!$, она определена на интервале периода $(-k!, +k!)$ следующим образом:

$$\varphi_k(x)=k\cdot 2^{k+1} \quad \text{на отрезках} \left[-k!+\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x \leqslant -k!+\frac{1}{2^k}\right]$$

и

$$\left[k!-\frac{1}{2^k} \leqslant x \leqslant k!-\frac{1}{2^{k+1}}\right];$$

в остальных местах $\varphi_k(x)=0$. Построим теперь последовательность

$$f_n(x)=\sum_1^n \varphi_k(x) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Легко проверить, что эта последовательность сходится к функции

$$f(x)=\sum_1^\infty \varphi_k(x)$$

равномерно в любом конечном интервале, а также в смысле метрики D_{B_1}.

В самом деле, в силу того, что $f_n(x)$ — четные функции, можно ограничиться рассмотрением предела

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f-f_n|\,dx, \quad \text{когда } T\to\infty$$

и, больше того, можно ограничиться рассмотрением только значений $T=m!$ ($m=1, 2, 3, \ldots$). Имеем

$$\frac{1}{m!}\int_0^{m!} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{m!}\int_0^{m!} \sum_1^n \varphi_k(x)\,dx =$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_1^n \int_0^{m!} \varphi_k(x)\,dx = \frac{1}{m!}\sum_1^n \frac{m!}{k!}(k\cdot 2^{k+1})\cdot\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_1^n \frac{1}{(k-1)!}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\int_0^{m!}|f_n|\,dx=\sum_1^n\frac{1}{(k-1)!},$$

откуда также легко убедиться, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\int_0^{m!}|f|\,dx=\sum_1^\infty\frac{1}{(k-1)!}=l,$$

Также простыми выкладками мы вычисляем, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\int_0^{m!}|f-f_n|\,dx=\sum_{n+1}^\infty\frac{1}{(k-1)!}.$$

Следовательно,

$$D_{B_1}(f_n, 0)=\sum_1^n\frac{1}{(k-1)!};$$

$$D_{B_1}(f, 0)=l;$$

$$D_{B_1}(f, f_n)=\sum_{n+1}^\infty\frac{1}{(k-1)!};$$

$$D_{B_1}(f_n, f_{m+p})=\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)!}.$$

Отсюда видно, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в смысле метрики D_{B_1}. Кроме того, легко видеть, что

$$D_{W_1}(f_n, f_{n+p})=D_{B_1}(f_n, f_{n+p})=\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)!},$$

откуда следует фундаментальность последовательности $f_n(x)$ в смысле метрики D_{W_1}. Однако сходимость в смысле метрики D_{W_1} здесь не имеет места. В самом деле, выберем произвольно большое число $T>0$ и пусть $T<(n-1)!$; построим интервал $(a,\ a+T)$ так, чтобы он включал в себя интервал

$$[(n!)!-1,\quad (n!)!+1].$$

Тогда в нем

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f_n!(x)\,dx\geqslant\frac{1}{T}\int_{(n!)!-1}^{(n!)!+1}f_n!(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{T}\int_{(n!)!-1}^{(n!)!+1}\varphi_{n!}(x)\,dx=2\cdot 2^{n!+1}\frac{n!}{\varphi 2^{n!+1}}=\frac{2(n)!}{T}>\frac{2(n)!}{(n-1)!}=2n$$

число сколь угодно большое, значит сходимость в смысле метрики D_{W_1} не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько, О компактности систем обобщенных почти периодических функций Вейля, ДАН, т. XLIII, № 7, 1944.

2. А. С. Кованько, К вопросу о полноте пространства Вейля (W_p) и применимость теорем Фишера-Рисса, Успехи мат. наук, том III, вып. 5 (27), стр. 161.

3. **Marzincicvic, Une rémarque sur les éspaces de A. Besicovitch C. R., Paris, t. 208, p. 157—159.**

4. А. С. Кованько, О некоторых видах сходимости последовательностей функций одной действительной переменной на ($-\infty$, ∞), Известия НИИММ при Томском гос. университете, том I, вып. II, стр. 154.

Поступила 20.III 1951 г.

г. Львов.