1951 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. III, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об условиях суммируемости бесконечных произведений

М. Д. Калашников

Пусть $(A)=\|a_{nk}\|$ — бесконечная матрица такая, что при всяком $k=1, 2, \ldots$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=a_k$. При помощи этой матрицы для заданного бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ мы можем образовать последовательность

$$P_n=\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{nk}\,u_k), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

в предположении, что произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_{nk}u_k)$ сходится при всяком n.

Предположим, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ таково, что $1+a_k u_k\neq 0$, $k=1, 2, \ldots$

Будем говорить, что произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ суммируемо при помощи матрицы (A) или просто суммируемо (A), если соответствующая ему последовательность $\{P_n\}$ сходится к конечному, отличному от нуля пределу. Если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ равен 0, $\pm\infty$ или вовсе не существует, мы будем говорить, что произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ не суммируемо (A).

В случае, если $1+a_k u_k=0$ для конечного числа значений k, мы будем говорить, что произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ суммируемо (A) или не суммируемо (A), смотря по тому, суммируемо оно или нет при помощи матрицы (A'), получаемой из матрицы (A) путем замены нулями всех элементов тех столбцов матрицы (A), которым соответствует равенство $1+a_k u_k=0$.

Наконец, если $1+a_k u_k=0$ для бесконечного числа значений k, мы также будем говорить, что произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ не суммируемо (A).

Вопрос о суммировании бесконечных произведений при помощи треугольных матриц рассматривался Робинсоном, который установил [1] необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица (A) для того, чтобы любое абсолютно сходящееся бесконечное произведение было суммируемо (A) к своему значению. Легко, однако, показать, что те же самые условия будут необходимыми и достаточными для суммируемости абсолютно сходящихся произведений также и в случае бесконечной матрицы (A).

Харди указал [2] пример сходящегося бесконечного произведения $P=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, для которого

$$\lim_{x\to 1}\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k x^k)\neq P.$$

Впоследствии Швейцер дал [3] необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность натуральных чисел $\{l_k\}$ для того, чтобы для любого сходящегося бесконечного произведения $P=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$

$$\lim_{x\to 1}P(x)=P,$$

где $P(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k x^{l_k})$.

В настоящей заметке решается вопрос об условиях суммируемости сходящихся бесконечных произведений. Доказывается также, что из одной из установленных здесь теорем следует результат Швейцера.

Замечание. Предположение, что при всяком k существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=a_k$, является существенным, в чем легко убедиться, рассматривая при фиксированном $k=k_0$ произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, где

$$u_k=\begin{cases}1, & \text{если } k=k_0;\\ 0, & \text{если } k\neq k_0.\end{cases}$$

Лемма. *Для того чтобы при помощи последовательности* $\{a_k\}$ *любое сходящееся бесконечное произведение* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ *преобразовывалось в сходящееся произведение* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k u_k)$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

(1) *предел* $\lim_{k\to\infty}a_k$ *существовал и был равен* 0 *или* 1;

(2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a)$, *где* $a=\lim_{k\to\infty}a_k$, *сходился абсолютно.*

Доказательство этой леммы в случае действительных a_k, u_k составляет содержание одной заметки автора [4]. Это доказательство без существенных изменений переносится и на случай комплексных a_k, u_k.

Теорема 1. *Если матрица* (A) *такова, что* $\lim_{k\to\infty}a_{nk}=0$, $n=1, 2, \ldots$, *то для того, чтобы любое сходящееся к значению* P *бесконечное произ-*

ведение было суммируемо (A) к тому же значению, необходимо и достаточно, чтобы:

(1) $$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=1, \qquad k=1,\ 2,\ldots;$$

(2) *существовало конечное число* $2q+1$ *последовательностей натуральных чисел* $\{k_n^{(1)}\}, \{k_n^{(2)}\},\ldots, \{k_n^{(2q+1)}\}$, $k_n^{(1)}\leqslant k_n^{(2)}\leqslant\ldots\leqslant k_n^{(2q+1)}$, $n=1, 2,\ldots$, *таких, что* $\lim\limits_{n\to\infty} k_n^{(1)}=\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{k_n^{(1)}} |a_{nk}-1| + \sum_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} |a_{nk}| + \sum_{k=k_n^{(2)}+1}^{k_n^{(3)}} |a_{nk}-1| + \ldots + \sum_{k=k_n^{(2q+1)}+1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M,$$
$$n=1,\ 2,\ldots.$$

Доказательство. В силу леммы и теоремы Робинсона при доказательстве необходимости условий (1), (2) мы можем, очевидно, считать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится абсолютно при всяком $n=1,\ 2,\ldots$ и

$$|a_{nk}|\leqslant A, \qquad n,\ k=1,\ 2,\ldots,$$

где $A>2$.

Из той же теоремы следует необходимость условия (1). Предположим, что условие (2) не выполнено.

Тогда справедлив один из следующих двух случаев. В каждом из них мы построим сходящееся бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, для которого соответствующая последовательность $\{P_n\}$ не имеет конечного предела.

а) Каково бы ни было $N>0$, существует n такое, что n-ая строка матрицы (A) содержит $2N$ элементов $a_{nk_1}, a_{nk_2},\ldots, a_{nk_{2N}}$, удовлетворяющих условию

$$|a_{nk_{2p}}-a_{nk_{2p-1}}|\geqslant\frac{1}{3}, \qquad p=1,\ 2,\ldots,\ N.$$

В таком случае, очевидно, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$ такая, что при всяком $\nu=1,\ 2,\ldots$, n_ν-я строка матрицы (A) содержит $2N_\nu$ элементов $a_{n_\nu k_1^{(\nu)}}, a_{n_\nu k_2^{(\nu)}},\ldots, a_{n_\nu k_{2N_\nu}^{(\nu)}}$, $k_{2N_\nu}^{(\nu)}<k_1^{(\nu+1)}$, $\nu=1,\ 2,\ldots$, удовлетворяющих условию

$$|a_{n_\nu k_{2p}^{(\nu)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(\nu)}}|\geqslant\frac{1}{3}, \qquad p=1,\ 2,\ldots,\ N_\nu,$$

где N_ν — такое целое число, что

$$\left[1+\frac{1}{6(\nu_0+\nu)}\right]^{N_\nu}>2^{2N_1+2N_2+\ldots+2N_{\nu-1}+\nu+1}, \qquad N_0=0;$$

$\nu_0>1$ — такое число, что $\dfrac{A^2}{\nu_0}<\dfrac{1}{12}$; причем $\prod\limits_{k=k_1^{(\nu+1)}}^{\infty}(1-|a_{n_\nu k}|)>\dfrac{1}{2}$.

Полагая

$$u_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq k_l^{(\nu)}, \quad l=1, 2, \ldots, 2N_\nu, \ \nu=1, 2, \ldots; \\ -\omega_p^{(\nu)}, & \text{если } k=k_{2p-1}^{(\nu)}, \ p=1, 2, \ldots, N_\nu, \ \nu=1, 2, \ldots; \\ \dfrac{\omega_p^{(\nu)}}{1-\omega_p^{(\nu)}}, & \text{если } k=k_{2p}^{(\nu)}, \ p=1, 2, \ldots, N_\nu, \ \nu=1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где

$$\omega_p^{(\nu)} = \frac{1}{\nu_0+\nu} \operatorname{sign}\left(a_{n_\nu k_{2p}^{(\nu)}} - a_{n_\nu k_{2p-1}^{(\nu)}}\right),$$

будем иметь

$$\left|\left(1+a_{n_\nu k_{2p-1}^{(\nu)}} u_{k_{2p-1}^{(\nu)}}\right)\left(1+a_{n_\nu k_{2p}^{(\nu)}} u_{k_{2p}^{(\nu)}}\right)\right| \geqslant \left|1+\left(a_{n_\nu k_{2p}^{(\nu)}} - a_{n_\nu k_{2p-1}^{(\nu)}}\right)\omega_p^{(\nu)}\right| -$$

$$- \frac{\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(\nu)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(\nu)}}\right)\right|}{1-\left|\omega_p^{(\nu)}\right|} \left|\omega_p^{(\nu)}\right|^2 > 1 + \frac{1}{6(\nu_0+\nu)},$$

$$p=1, 2, \ldots, N_\nu, \ \nu=1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$|P_{n_\nu}| = \left|\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{n_\nu k} u_k)\right| \geqslant \prod_{l=1}^{2N_1}\left(1-\left|a_{n_\nu k_l^{(\nu)}} u_{k_l^{(\nu)}}\right|\right) \prod_{l=1}^{2N_2}\left(1-\left|a_{n_\nu k_l^{(\nu)}} u_{k_l^{(\nu)}}\right|\right) \ldots$$

$$\prod_{l=1}^{2N_{\nu-1}}\left(1-\left|a_{n_\nu k_l^{(\nu)}} u_{k_l^{(\nu)}}\right|\right) \left|\prod_{l=1}^{2N_\nu}\left(1+a_{n_\nu k_l^{(\nu)}} u_{k_l^{(\nu)}}\right)\right| \prod_{k=k_1^{(\nu+1)}}^{\infty}\left(1-|a_{n_\nu k} u_k|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2N_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N_2} \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^{2N_{\nu-1}} \left[1+\frac{1}{6(\nu_0+\nu)}\right]^{N_\nu} \cdot \frac{1}{2} > 2^\nu,$$

$$\nu=1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность $\{P_n\}$ не сходится к конечному пределу.

б) Каково бы ни было N, существует n такое, что n-ая строка матрицы (A) содержит N групп элементов $a_{nk_1^{(1)}}, a_{nk_2^{(1)}}, \ldots, a_{nk_{2p_1}^{(1)}}$; $a_{nk_1^{(2)}}, a_{nk_2^{(2)}}, \ldots, a_{nk_{2p_2}^{(2)}}; \ldots; a_{nk_1^{(N)}}, a_{nk_2^{(N)}}, \ldots, a_{nk_{2p_N}^{(N)}}$; $k_{2p_l}^{(l)} < k_1^{(l+1)}$, $l=1, 2, \ldots, N-1$; таких, что имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^{2p_l} \left|a_{nk_i^{(l)}}\right| > 2; \quad \sum_{i=1}^{2p_l} \left|a_{nk_i^{(l)}} - 1\right| > 2, \qquad l=1, 2, \ldots, N;$$

при этом все эти элементы одновременно удовлетворяют также одному из следующих двух неравенств:

$$\left|a_{nk_i^{(l)}}\right| \geqslant \frac{1}{3}, \quad i=1, 2, \ldots, 2p_l, \quad l=1, 2, \ldots, N;$$

$$\left|1-a_{nk_i^{(l)}}\right| \geqslant \frac{1}{3}, \quad i=1, 2, \ldots, 2p_l, \quad l=1, 2, \ldots, N.$$

Для определенности мы предположим, что все они удовлетворяют первому из этих неравенств. Если же они удовлетворяют второму из них, дальнейшие рассуждения остаются совершенно аналогичными.

В таком случае, очевидно, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$ такая, что при всяком $\nu=1,2,\ldots$, n_ν-ая строка матрицы (A) содержит $N_\nu-N_{\nu-1}$ групп элементов

$$a_{n_\nu k_1^{(l)}},\ a_{n_\nu k_2^{(l)}},\ldots,\ a_{n_\nu k_{2p_l}^{(l)}},\quad l=N_{\nu-1}+1,\ N_{\nu-1}+2,\ldots,\ N_\nu;$$

$$k_{2p_l}^{(l)}<k_1^{(l+1)},\quad l=N_{\nu-1}+1,\ldots,N_\nu;\quad k_{2p_{N_\nu}}^{(N_\nu)}<k_1^{(N_\nu+1)},\quad \nu=1,2,\ldots,$$

удовлетворяющих неравенствам

$$|a_{n_\nu k_i^{(l)}}|\geqslant\frac{1}{3},\quad i=1,2,\ldots,2p_l,\quad N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu;$$

$$\sum_{i=1}^{2p_l}|1-a_{n_\nu k_i^{(l)}}|>2,\quad N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu,$$

где N_ν — такое целое число, что

$$\left[1+\frac{1}{6(\nu_0+\nu)}\right]^{N_\nu-N_{\nu-1}}>2^{2\sum\limits_{l=1}^{N_{\nu-1}}p_l+\nu+1},\quad N_0=0;$$

$$\nu_0=\max\{5^4,\ 12A^2\}.$$

При этом

$$\prod_{k=k_1^{(N_\nu+1)}}^{\infty}(1-|a_{n_\nu k}|)>\frac{1}{2}.$$

Заметим, что вследствие неравенства

$$\sum_{i=1}^{2p_l}|1-a_{n_\nu k_i^{(l)}}|>2,$$

имеет место по меньшей мере одно из следующих двух неравенств:

$$\sum_{p=1}^{p_l}|1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}|>1,\quad \sum_{p=1}^{p_l}|1-a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}|>1.$$

Для определенности мы предположим, что имеет место первое из них.

Полагая:

$$u_k=\begin{cases}0, & \text{если } k\neq k_i^{(l)},\ i=1,2,\ldots,2p_l;\ N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu,\ \nu=1,2,\ldots;\\ -\omega_p^{(l)}, & \text{если } k=k_{2p-1}^{(l)},\ p=1,2,\ldots,p_l;\ N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu,\ \nu=1,2,\ldots;\\ \dfrac{\omega_p^{(l)}}{1-\omega_p^{(l)}}, & \text{если } k=k_{2p}^{(l)},\ p=1,2,\ldots,p_l;\ N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,\end{cases}$$

где

$$\omega_p^{(l)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\nu_0+\nu}}\operatorname{sign}\left(a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right), \text{ если } \left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right|\geqslant \\ \qquad\geqslant\dfrac{2\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|}{\sqrt{\nu_0+\nu}}; \\ \text{одному из корней уравнения} \\ \qquad\dfrac{\omega^2}{1-\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{\nu_0+\nu}}\operatorname{sign}\left\{a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right\}, \\ \text{если} \\ \qquad\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right|<\dfrac{2\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|}{\sqrt{\nu_0+\nu}}; \\ p=1,2,\ldots,p_l,\quad l=N_{\nu-1}+1,\quad N_{\nu-1}+2,\ldots,N_\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,\end{cases}$$

будем иметь при $\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right|\sqrt{\nu_0+\nu}\geqslant 2\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|$

$$\left|\left(1+a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}u_{k_{2p-1}^{(l)}}\right)\left(1+a_{k_{2p}^{(l)}}u_{k_{2p}^{(l)}}\right)\right|\geqslant\left|1+\left(a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\omega_p^{(l)}\right|-$$

$$-\left|\frac{a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)[\omega_p^{(l)}]^2}{1-\omega_p^{(l)}}\right|\geqslant 1+\frac{1}{2(\nu_0+\nu)}\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|,$$

а при

$$\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right|\sqrt{\nu_0+\nu}<2\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|$$

$$\left|\left(1+a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}u_{k_{2p-1}^{(l)}}\right)\left(1+a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}u_{k_{2p}^{(l)}}\right)\right|\geqslant\left|1+a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\frac{[\omega_p^{(l)}]^2}{1-\omega_p^{(l)}}\right|-$$

$$-\left|\left(a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\omega_p^{(l)}\right|\geqslant 1+\frac{1}{2(\nu_0+\nu)}\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|.$$

Поэтому

$$\left|\prod_{i=1}^{2p_l}\left(1+a_{n_\nu k_i^{(l)}}u_{k_i^{(l)}}\right)\right|\geqslant\prod_{p=1}^{p_l}\left(1+\frac{\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|}{2(\nu_0+\nu)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1+\sum_{p=1}^{p_l}\frac{\left|a_{n_\nu k_{2p}^{(l)}}\left(1-a_{n_\nu k_{2p-1}^{(l)}}\right)\right|}{2(\nu_0+\nu)}\geqslant 1+\frac{1}{6(\nu_0+\nu)},$$

$$N_{\nu-1}<l\leqslant N_\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,$$

, следовательно,

$$|P_{n_\nu}|=\left|\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+a_{n_\nu k}u_k\right)\right|\geqslant\prod_{l=1}^{N_1}\prod_{i=1}^{2p_l}\left(1-\left|a_{n_\nu k_i^{(l)}}u_{k_i^{(l)}}\right|\right)\times$$

$$\times\prod_{l=N_1+1}^{N_2}\prod_{i=1}^{2p_l}\left(1-\left|a_{n_\nu k_i^{(l)}}u_{k_i^{(l)}}\right|\right)\times$$

$$\times \ldots \prod_{l=N_{\nu-2}+1}^{N_{\nu-1}} \prod_{i=1}^{2p_l} (1-|a_{n_\nu k_i^{(l)}} u_{k_i^{(l)}}|) \left| \prod_{l=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} (1+a_{n_\nu k_i^{(l)}} u_{k_i^{(l)}}) \right| \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=k_1^{(N_\nu+1)}}^{\infty} (1-|a_{n_\nu k} u_k|) > \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sum_{l=1}^{N_{\nu-1}} p_l} \cdot \left[1+\frac{1}{6(\nu_0+\nu)}\right]^{N_\nu - N_{\nu-1}} \cdot \frac{1}{2} > 2^\nu,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots,$$

т. е. последовательность $\{P_n\}$ не сходится к конечному пределу.

Необходимость условия (2), таким образом, доказана.

Предположим, далее, что условия (1), (2) теоремы выполнены. Пусть $P = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ — любое сходящееся бесконечное произведение. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

В самом деле, из условия (1) теоремы следует существование неубывающей последовательности натуральных чисел $\{k_n^{(0)}\}$, $k_n^{(0)} \leqslant k_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim_{n\to\infty} k_n^{(0)} = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n^{(0)}} |a_{nk} - 1| = 0.$$

Используя неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^{n} (1+\alpha_k) - 1 \right| \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|} - 1,$$

легко убеждаемся в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{k_n^{(0)}} \left\{ 1 + (a_{nk} - 1) \frac{u_k}{1+u_k} \right\} = 1.$$

Принимая во внимание условие (2) теоремы, легко показать также, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(0)}+1}^{k_n^{(1)}} \left\{ 1 + (a_{nk} - 1) \frac{u_k}{1+u_k} \right\} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(2)}+1}^{k_n^{(3)}} \left\{ 1 + (a_{nk} - 1) \frac{u_k}{1+u_k} \right\} = 1; \ldots; \lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(2q)}+1}^{k_n^{(2q+1)}} \left\{ 1 + (a_{nk} - 1) \frac{u_k}{1+u_k} \right\} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} (1+a_{nk} u_k) = 1; \ \lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(2)}+1}^{k_n^{(4)}} (1+a_{nk} u_k) = 1; \ldots; \lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(2q+1)}+1}^{\infty} (1+a_{nk} u_k) = 1$$

Сходимость последовательности $\{P_n\}$ к числу P следует теперь из тождества

$$\frac{P_n}{P} = \prod_{k=1}^{k_n^{(0)}} \left\{1+(a_{nk}-1)\frac{u_k}{1+u_k}\right\} \prod_{k=k_n^{(0)}+1}^{k_n^{(1)}} \left\{1+(a_{nk}-1)\frac{u_k}{1+u_k}\right\} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} (1+a_{nk}\,u_k)}{\prod\limits_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} (1+u_k)} \cdot \prod_{k=k_n^{(2)}+1}^{k_n^{(3)}} \left\{1+(a_{nk}-1)\frac{u_k}{1+u_k}\right\} \cdots \frac{\prod\limits_{k=k_n^{(2q+1)}+1}^{\infty} (1+a_{nk}u_k)}{\prod\limits_{k=k_n^{(2q+1)}+1}^{\infty} (1+u_k)},$$

так как, вследствие сходимости произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} (1+u_k)=1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(3)}+1}^{k_n^{(4)}} (1+u_k)=1;$$

. . . .

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_n^{(2q)}+1}^{k_n^{(2q+1)}} (1+u_k)=1.$$

Совершенно аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Если матрица (A) такова, что* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk}=1$, $n=1, 2, \ldots$, *то для того, чтобы любое сходящееся к значению P бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ *было суммируемо (A) к тому же значению, необходимо и достаточно, чтобы:*

(1) $$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=1, \quad k=1, 2, \ldots;$$

(2) *существовало конечное число* $2q$ *последовательностей натуральных чисел*

$$\{k_n^{(1)}\},\ \{k_n^{(2)}\},\ldots,\ \{k_n^{(2q)}\},\ k_n^{(1)} \leqslant k_n^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant k_n^{(2q)}, \quad n=1,2,\ldots,$$

таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n^{(1)}=\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{k_n^{(1)}} |a_{nk}-1| + \sum_{k=k_n^{(1)}+1}^{k_n^{(2)}} |a_{nk}| + \sum_{k=k_n^{(2)}+1}^{k_n^{(3)}} |a_{nk}-1| +$$

$$+ \sum_{k=k_n^{(3)}+1}^{k_n^{(4)}} |a_{nk}| + \ldots + \sum_{k=k_n^{(2q)}+1}^{\infty} |a_{nk}-1| \leqslant M, \qquad n=1, 2, \ldots$$

Принимая во внимание лемму и теоремы 1, 2, легко убедиться также в справедливости следующего предложения.

Теорема 3. *Для того чтобы любое сходящееся к значению P бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ *было суммируемо (A) к тому же значению, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=1, \qquad k=1, 2, \ldots;$$

(2) *предел* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk}$ *существовал при всяком* $n=1, 2, \ldots$ *и был равен 0 или 1;*

(3) *матрица (A′), составленная из тех строк матрицы (A), для которых* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk}=0$, *удовлетворяла условию (2) теоремы 1; матрица (A″), составленная из тех строк матрицы (A), для которых* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{nk}=1$, *удовлетворяла условию (2), теоремы 2.*

Теорема Швейцера. *Положим* $P(x)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k x^{l_k})$ *для* $|x|<1$. *Для того чтобы* $\lim\limits_{x\to 1} P(x)=P(1)$ *для всякого сходящегося бесконечного произведения* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$L_k=\frac{l_1+l_2+\ldots+l_k}{l_k}\leqslant L \qquad k=1, 2, \ldots$$

При этом предполагается, что $1\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots$ и $x\to 1$ вдоль любого пути S, заключающегося между двумя хордами единичного круга, проходящего через точку $x=1$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{L_k\}$ неограничена. В таком случае существует такая ее монотонная подпоследовательность $\{L_{k_n}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} L_{k_n}=\infty$, что

$$\left(1-\frac{1}{L_{k_n}}\right)\left(1-\frac{2}{L_{k_n}}\right)\left(1-\frac{3}{L_{k_n}}\right)\ldots\left(1-\frac{2n}{L_{k_n}}\right)>\frac{1}{2}, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

причем $L_k\leqslant L_{k_n}$, $k=1, 2, \ldots, k_n-1$.

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{l_{k-1}}{l_k}=\frac{L_k-1}{L_{k-1}},\qquad k=1,2,3,\ldots,$$

легко убедиться в справедливости неравенства

$$l_{k_n-q}\geqslant\left(1-\frac{1}{L_{k_n}}\right)\left(1-\frac{2}{L_{k_n}}\right)\ldots\left(1-\frac{q}{L_{k_n}}\right)l_{k_n},\ q=1,2,\ldots,k_n-1,$$
$$n=1,2,\ldots$$

Пусть теперь S — любой „некасательный“ путь, проходящий через точку $x=1$. На этом пути выберем последовательность точек $\{x_n\}$ так, чтобы

$$|x_n|^{L_{k_n}}=\frac{1}{2},\qquad n=1,2,\ldots.$$

Для этой последовательности будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{k_n-n}|1-x_n^{l_k}|>\sum_{k=k_n-2n+1}^{k_n-n}(1-|x_n|^{l_k})=n-\sum_{k=k_n-2n+1}^{k_n-n}|x_n|^{l_k}>n\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\sum_{k=k_n-n+1}^{\infty}|x_n^{l_k}|>\sum_{k=k_n-n+1}^{k_n}|x_n|^{l_k}>\frac{n}{2},\qquad n=1,2,\ldots,$$

откуда, в силу теоремы 1, вытекает необходимость условия

$$\frac{l_1+l_2+\ldots+l_k}{l_k}\leqslant L,\qquad k=1,2,\ldots.$$

Пусть, далее, последовательность $\{L_k\}$ ограничена.

Из неравенств

$$l_1+l_2+\ldots+l_{k-1}<(L-1)\,l_k,$$
$$l_1+l_2+\ldots+l_{k-2}<(L-1)\,l_{k-1}$$

легко следует справедливость неравенств

$$l_{k-1}<(L-1)\,l_k;$$
$$l_{k-2}<\frac{(L-1)^2}{L}\,l_k;$$
$$l_{k-q}<\frac{(L-1)^q}{L^{q-1}},\qquad q=1,2,\ldots,k-1;$$

Полагая в последнем неравенстве $\frac{L}{L-1}=\alpha$, имеем

$$l_{k-q}<\frac{L}{\alpha^{q-1}}\,l_k,\qquad q=1,2,\ldots,k-1,$$

откуда следует также, что

$$l_{k+q}>\frac{\alpha^q}{L}\,l_k,\qquad q=1,2,\ldots$$

Пусть S — любой „некасательный“ путь, проходящий через точку $x=1$, а $\{x_n\}$ — любая последовательность точек кривой S, сходящаяся к 1. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$ такую, чтобы

$$l_{k_n}|\ln|x_n||<1, \quad l_{k_n+1}|\ln|x_n||>\frac{1}{2}, \qquad n=1, 2, \ldots$$

Имеем:

$$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}|1-x_n^{l_k}|<C\sum_{k=1}^{k_n}(1-|x_n|^{l_k})<C\left[k_n-\sum_{k=1}^{k_n}|x_n|^{\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-k}}}\right]<$$

$$<C\left[k_n-\int_1^{k_n}|x_n|^{\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-t}}}dt\right]=C\left[k_n-\frac{1}{\ln\alpha}\int_{\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-1}}}^{Ll_{k_n}}|x_n|^z\frac{dz}{z}\right],$$

где $z=\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-t}}$, а C — такое число, что

$$\frac{|1-x|}{1-|x|}<C \quad \text{для всех } x\in S.$$

Воспользовавшись, далее, разложением

$$\int\frac{a^x}{x}dx=\ln x+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(x\ln a)^\nu}{\nu\cdot\nu!}+\text{const},$$

получаем

$$S_n<\left\{k_n-\left\{\frac{1}{\ln\alpha}\left[\ln z\right]_{\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-1}}}^{Ll_{k_n}}+\frac{1}{\ln\alpha}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(z\ln|x_n|)^\nu}{\nu\cdot\nu!}\right]_{\frac{Ll_{k_n}}{\alpha^{k_n-1}}}^{Ll_{k_n}}\right\}\right\}\cdot C<$$

$$<C\left(1+\frac{2}{\ln\alpha}e^L\right)=M_1, \qquad n=1, 2, \ldots$$

С другой стороны,

$$r_n=\sum_{k=k_n+1}^{\infty}|x_n^{l_k}|<\sum_{k=1}^{\infty}|x_n|^{\frac{\alpha^k l_{k_n+1}}{L}}<1+\int_0^\infty|x_n|^{\frac{\alpha^t l_{k_n+1}}{L}}dt,$$

откуда с помощью замены переменной $\frac{1}{L}l_{k_n}\alpha^t=z$ и последующего интегрирования по частям, находим

$$r_n<1+\frac{1}{\ln|x_n|}\cdot\frac{1}{\ln\alpha}\left[\frac{|x_n|^z}{z}\right]_{\frac{l_{k_n+1}}{L}}^{\infty}+\frac{1}{\ln|x_n|}\frac{1}{\ln\alpha}\int_{\frac{l_{k_n+1}}{L}}^{\infty}\frac{|x_n|^z}{z^2}dz<$$

$$<1-\frac{1}{\ln|x_n|}\frac{1}{\ln\alpha}\frac{L}{l_{k_n+1}}|x_n|^{\frac{1}{L}l_{k_n+1}}<1+\frac{2L}{\ln\alpha}=M_2, \qquad n=1, 2, \ldots.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{k_n} |1-x_n^{l_k}| + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} |x_n^{l_k}| < M_1 + M_2 = M, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда, в силу теоремы 1, следует достаточность условий теоремы.

Примечание. Теоремы 1, 2 обобщаются на случай двойных бесконечных произведений.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Robinson, Summability of Infinite Products, Am. Journal of Math., vol. 51, p. 653, 1929.

2. G. H. Hardy, A note on the continuity or discontinuity of a fonction defined by an infinite product, Proc. of the London Math. Society (2) 7, 1909, p. 40—47.

3. M. Schweitzer, Sur les produits infinis et le théorème d'Abel, Acta Scientiarum Mathematicorum, vol. XI, Fasc. 3, 1947.

4. М. Д. Калашников, Замечание о бесконечных произведениях, ДАН, т. LXXIII, № 1, 1950.

Поступила 9.XII 1950 г. Днепропетровск.
