DOI: 10.37863/umzh.v73i3.6505

УДК 517.927

О. О. Мурач (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. Б. Пелехата (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ),
В. О. Солдатов (Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

We consider a wide class of linear boundary-value problems for systems of m ordinary differential equations of order r known as the general boundary-value problems. Their solutions $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ belong to the Sobolev space $(W_1^r)^m$, and the boundary conditions are given in the form $By = q$ where $B\colon (C^{(r-1)})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ is an arbitrary continuous linear operator. For such a problem, we prove that its solution can be approximated in $(W_1^r)^m$ with arbitrary precision by solutions to multipoint boundary-value problems with the same right-hand sides. These multipoint problems are built explicitly and do not depend on the right-hand sides of the general boundary-value problem. For these problems, we obtain estimates of error of solutions in the normed spaces $(W_1^r)^m$ and $(C^{(r-1)})^m$.

Розглянуто широкий клас лінійних крайових задач для систем m звичайних диференціальних рівнянь порядку r — так звані загальні крайові задачі. Їхні розв’язки $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ належать до простору Соболєва $(W_1^r)^m$, а крайові умови задаються у вигляді $By = q$, де $B\colon \big(C^{(r-1)}\big)^m \to \mathbb{C}^{rm}$ — довільний неперервний лінійний оператор. Доведено, що розв’язок такої задачі можна з довільною точністю апроксимувати в $\big(W_1^r\big)^m$ розв’язками багатоточкових крайових задач із тими ж правими частинами. Ці багатоточкові задачі будуються явно та не залежать від правих частин загальної крайової задачі. Для цих задач отримано оцінки похибки розв’язків у нормованих просторах $\big(W_1^r\big)^m$ і $\big(C^{(r-1)}\big)^m$.

1. Вступ. Граничний перехід у системах диференціальних рівнянь часто використовується при розв’язанні різних математичних і прикладних задач, тому його обґрунтуванню і дослідженню його властивостей присвячено багато робіт. Найбільш повно вивчено цю проблематику щодо задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку. Істотно менш досліджені крайові задачі, залежні від параметра. Така ситуація пов’язана з великою різноманітністю крайових умов. Перші результати у цьому напрямку отримали І. Т. Кігурадзе [1 – 3] і М. Ашордія [4] щодо широкого класу так званих загальних лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Було знайдено достатні умови неперервності за параметром розв’язків цих задач у нормованому просторі $C\big([a,b],\mathbb{R}^m\big)$, де m — кількість рівнянь у системі. У роботах В. А. Михайлеця і його учнів [5 – 9] ці результати були істотно покращені та узагальнені на випадок комплекснозначних функцій і систем диференціальних рівнянь високого порядку r. Розв’язки цих систем пробігають простір Соболєва $\big(W_1^r\big)^m := W_1^r\big([a,b],\mathbb{C}^m\big)$, а крайові умови мають вигляд $By = q$, де B — довільний неперервний лінійний оператор на парі просторів $\big(C^{(r-1)}\big)^m := C^{(r-1)}\big([a,b],\mathbb{C}^m\big)$ і $\mathbb{C}^{rm}$. Інші широкі класи лінійних одновимірних крайових задач уведено і досліджено у роботах [10 – 17]. Розв’язки цих задач розглядаються у нормованих просторах n разів неперервно диференційовних функцій, де $n \geq r$, функціональних просторах Гельдера порядку $l > r$ або Соболєва – Слободецького порядку $l \geq r$, причому на тих же самих просторах задано і неперервні крайові оператори.

Важливе місце серед згаданих задач належить багатоточковим крайовим задачам. З огляду на досить простий явний вигляд крайових умов у цих задачах їхні розв’язки знайти набагато легше, ніж, наприклад, розв’язки задач з інтегральними крайовими умовами. Тому виникає природне питання про можливість апроксимації розв'язками багатоточкових крайових задач розв'язків більш загальних крайових задач. Мета цієї роботи — показати, що розв'язки вказаних вище загальних крайових задач можна з довільною точністю апроксимувати у просторі $\left(W_1^r\right)^m$ розв'язками багатоточкових крайових задач із тими ж правими частинами. Ці апроксимуючі задачі будуються нами явно і не залежать від правих частин загальної крайової задачі. Для цих задач отримано оцінки похибки розв'язків у нормованих просторах $\left(W_1^r\right)^m$ і $\left(C^{(r-1)}\right)^m$. Для іншого класу лінійних крайових задач, розв'язки яких належать до простору $\left(C^{(n)}\right)^m$ цілого порядку $n \geq r$, відповідний результат про апроксимацію в $\left(C^{(n)}\right)^m$ доведено у статті [18].

2. Постановка задачі та результати. Нехай $a, b \in \mathbb{R}$ і $a < b$. Будемо використовувати такі позначення комплексних банахових просторів функцій $x\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ та їхніх норм:

(a) L_1 — простір усіх інтегровних за Лебегом на $[a,b]$ функцій, наділений нормою $\|x\|_1 := \int_a^b |x(t)|dt$;

(b) C або $C^{(0)}$ — простір усіх неперервних на $[a,b]$ функцій, наділений нормою $\|x\|_C := \|x\|_{(0)} := \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|$;

(c) $C^{(l)}$, де $l \in \mathbb{N}$, — простір усіх l разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій, наділений нормою $\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \|x^{(j)}\|_C$;

(d) W_1^r, де $r \in \mathbb{N}$, — простір Соболєва усіх функцій $x \in C^{(r-1)}$ таких, що функція $x^{(r-1)}$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ (тоді $x^{(r)}(t)$ існує для майже всіх $t \in [a,b]$, причому $x^{(r)} \in L_1$); простір W_1^r наділений нормою $\|x\|_{r,1} := \sum_{j=0}^{r} \left\|x^{(j)}\right\|_1$.

Комплексні банахові простори, утворені вектор-функціями вимірності $m \geq 1$ або матрицями-функціями розміру $m \times m$, усі компоненти яких належать до одного з перелічених просторів, позначаємо відповідно через $(\Psi)^m$ або $(\Psi)^{m\times m}$, де Ψ — один із зазначених просторів скалярних функцій. При цьому вектори інтерпретуємо як стовпці. Норма вектор-функції у просторі $(\Psi)^m$ дорівнює сумі норм усіх її компонент у Ψ, а норма матриці-функції у просторі $(\Psi)^{m\times m}$ дорівнює максимуму норм усіх її стовпців у $(\Psi)^m$. Норми у просторах $(\Psi)^m$ і $(\Psi)^{m\times m}$ позначаємо так само, як і норму у просторі Ψ. З контексту завжди буде зрозуміло про норму в якому просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Для числових векторів і матриць використовуємо аналогічні норми, які позначаємо через $\|\cdot\|$.

Нехай $r, m \in \mathbb{N}$. На відрізку $[a,b]$ розглянемо лінійну крайову задачу вигляду

$$Ly(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{l=1}^{r} A_{r-l}(t)\, y^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$By = q. \tag{2}$$

Тут вектор-функція y класу $\left(W_1^r\right)^m$ є невідомою, а довільно заданими є матриці-функції $A_{r-l} \in (L_1)^{m\times m}$, де $1 \leq l \leq r$, вектор-функція $f \in (L_1)^m$, вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і неперервний лінійний оператор

$$B\colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}. \tag{3}$$

З умови $y \in \left(W_1^r\right)^m$ випливає, що старша похідна $y^{(r)}$ в рівнянні (1) існує майже скрізь на $[a,b]$ (відносно міри Лебега) і є вектор-функцією класу $(L_1)^m$. Тому це рівняння розглядається для майже всіх (м.в.) $t \in [a, b]$. Оскільки простір $\left(W_1^r\right)^m$ неперервно вкладений у $\left(C^{(r-1)}\right)^m$, то крайова умова (2) має сенс. Таку задачу досліджували в [7–9].

Далі припускаємо, що крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $y \in \left(W_1^r\right)^m$ для довільних правих частин $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$. Згідно з результатами [7, с. 334], це припущення еквівалентне тому, що відповідна однорідна крайова задача (для $f(\cdot) \equiv 0$ і $q = 0$) має лише тривіальний розв'язок $y(\cdot) \equiv 0$.

Нехай $\mathcal{X}$ — довільна щільна підмножина простору $(L_1)^{m\times m}$ (наприклад, множина всіх поліномів або тригонометричних поліномів, східчастих функцій, полігональних функцій чи сплайнів). Розглянемо послідовність багатоточкових крайових задач вигляду

$$L_k\, y_k(t) := y_k^{(r)}(t) + \sum_{l=1}^{r} A_{r-l,k}(t) y_k^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a, b], \tag{4}$$

$$B_k\, y_k := \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{l=0}^{r-1} \beta_k^{j,l}\, y^{(l)}(t_{k,j}) = q. \tag{5}$$

Вони параметризовані натуральним числом k; їхні праві частини не залежать від k і збігаються з правими частинами крайової задачі (1), (2). Щодо цих багатоточкових задач припускаємо, що кожне $A_{r-l,k} \in \mathcal{X}$ і, крім того, $p_k \in \mathbb{N}$, $\beta_k^{j,l} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$ та $t_{k,j} \in [a, b]$ для всіх припустимих значень параметрів k, j і l. Розв'язки y_k цих задач розглядаються у класі $\left(W_1^r\right)^m$. Очевидно, лінійний оператор B_k діє неперервно з $\left(C^{(r-1)}\right)^m$ в $\mathbb{C}^{rm}$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Для крайової задачі* (1), (2) *існує послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (4), (5) *таких, що вони є однозначно розв'язними для достатньо великих k і виконується асимптотична властивість*

$$y_k \to y \quad \textit{в} \quad \left(W_1^r\right)^m \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{6}$$

Цю послідовність можна вибрати незалежною від f і q та побудувати явно.

Далі у цьому пункті припускаємо, що послідовність крайових задач (4), (5) задовольняє висновок теореми 1 для довільних правих частин $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$, тобто ці задачі однозначно розв'язні у просторі $\left(W_1^r\right)^m$ при $k \geq \widetilde{\varrho}$ і їхні розв'язки мають властивість (6); тут $\widetilde{\varrho}$ — деяке натуральне число.

Дослідимо випадок, коли праві частини цих задач залежать від k. Отже, при $k \geq \widetilde{\varrho}$ розглядаємо крайові задачі вигляду

$$L_k\, x_k(t) = f_k(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a, b], \tag{7}$$

$$B_k\, x_k = q_k, \tag{8}$$

де $f_k \in (L_1)^m$ і $q_k \in \mathbb{C}^{rm}$, а розв'язок $x_k \in \left(W_1^r\right)^m$.

Теорема 2. *Нехай задано натуральне число $\widehat{\varrho} \geq \widetilde{\varrho}$ і дійсне число $\varepsilon > 0$. Припустимо, що праві частини крайових задач* (7), (8) *задовольняють умови*

$$\|f_k - f\|_1 < \varepsilon \quad \textit{і} \quad \|q_k - q\| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad k \geq \widehat{\varrho}. \tag{9}$$

Тоді існують додатні числа $\varkappa$ і $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ такі, що

$$\|x_k - y\|_{r,1} < \varkappa\,\varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \varrho. \tag{10}$$

Число $\varkappa$ можна вибрати незалежним від ε, $\widehat{\varrho}$, f, q, f_k і q_k, а число ϱ — незалежним від f_k і q_k. Зокрема, якщо $f_k \to f$ в $(L_1)^m$ і $q_k \to q$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $k \to \infty$, то $x_k \to y$ в $\left(W_1^r\right)^m$ при $k \to \infty$.

За деякої більш слабкої умови, ніж $\|f_k - f\|_1 < \varepsilon$, можна замість (10) отримати оцінку похибки $x_k - y$ у нормі $\|\cdot\|_{(r-1)}$ (яка у свою чергу слабша за соболєвську норму $\|\cdot\|_{r,1}$). Позначимо через F і F_k первісні функцій f і f_k на $[a,b]$, підпорядковані умовам $F(a) = 0$ і $F_k(a) = 0$.

Теорема 3. *Нехай задано натуральне число $\widehat{\varrho} \geq \widetilde{\varrho}$ і дійсне число $\varepsilon > 0$. Припустимо, що праві частини крайових задач* (7), (8) *задовольняють умови*

$$\|F_k - F\|_C < \varepsilon \quad \text{і} \quad \|q_k - q\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \widehat{\varrho}. \tag{11}$$

Крім того, припустимо, що

$$\sigma := \sup\left\{\left\|B_k \colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}\right\| : k \geq \widehat{\varrho}\right\} < \infty. \tag{12}$$

Тоді існують додатні числа $\varkappa$ і $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ такі, що

$$\|x_k - y\|_{(r-1)} < \varkappa\,\sigma\,\varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \varrho. \tag{13}$$

Число $\varkappa$ можна вибрати незалежним від ε, σ, $\widehat{\varrho}$, f, q і задач (7), (8) (*тоді $\varkappa$ залежатиме лише від L і B*), *а число ϱ — незалежним від f_k і q_k. Зокрема, якщо $F_k \to F$ в $(C)^m$ і $q_k \to q$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $k \to \infty$, то $x_k \to y$ в $\left(C^{(r-1)}\right)^m$ при $k \to \infty$.*

Умова (11) слабша за умову (9), оскільки $\|F_k - F\|_C \leq \|f_k - f\|_1$. Зауважимо, що умову (12) задовольняє побудована у доведенні теореми 1 апроксимуюча послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (4), (5).

3. Обґрунтування результатів. Позначимо через NBV комплексний лінійний простір усіх функцій $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ обмеженої варіації на $[a,b]$, які неперервні зліва на (a,b) і задовольняють умову $g(a) = 0$. Цей простір наділено нормою, яка дорівнює повній варіації $\mathrm{V}(g,[a,b])$ функції g на $[a,b]$. Він є повним, несепарабельним і нерефлексивним відносно цієї норми [19] (розд. IV, пп. 12 і 15).

За теоремою Ф. Рісса кожний неперервний лінійний функціонал ℓ на комплексному банаховому просторі C зображується єдиним чином у вигляді

$$\ell(x) = \int_a^b x(t)\, d\varphi(t) \quad \text{для довільного} \quad x \in C, \tag{14}$$

де φ — деяка функція з класу NBV. Більше того, відповідне відображення $\mathcal{I} \colon \varphi \mapsto \ell$ породжує ізометричний ізоморфізм $\mathcal{I} \colon \mathrm{NBV} \leftrightarrow C'$ (див., наприклад, [19], розд. IV, п. 13, вправа 35). Тут, як звичайно, C' — банахів простір, спряжений до C, наділений нормою функціоналів. Інтеграл у (14) розуміється як інтеграл Рімана – Стільтьєса або Лебега – Стільтьєса за комплексною мірою, породженою функцією φ.

Простір NBV ізометрично ізоморфний банаховому простору всіх комплексних борелевих мір на $[a,b]$ (норма в останньому просторі є повною варіацією міри) [19] (розд. IV, п. 12).

Найпростішим прикладом таких мір є міри Дірака з одноточковими носіями. Позначимо через χ_γ характеристичну функцію (індикатор) підмножини γ відрізка $[a,b]$. За цим ізоморфізмом таким мірам Дірака відповідають характеристичні функції $\chi_{(c,b]}$, де $a \leq c < b$, і $\chi_{\{b\}}$. Позначимо через S комплексну лінійну оболонку всіх цих характеристичних функцій. У доведенні теореми 1 ключову роль відіграватиме такий результат.

Твердження 1. *Множина $\mathcal{I}(S)$ є секвенціально щільною у просторі C' у w^*-топології, тобто для кожного функціонала $\ell \in C'$ існує послідовність $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset S$ така, що*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^b x(t)d\varphi_k(t) = \ell(x) \quad \textit{для довільного} \quad x \in C. \tag{15}$$

Як відомо (див., наприклад, [20, с. 114], п. IV.5), множина $\mathcal{I}(S)$ щільна у просторі C' у w^*-топології. Втім, оскільки вказана топологія неметризовна, із цієї щільності не випливає твердження 1. Його конструктивне доведення наведено у [18] (теореми 2 і 3), де запропоновано явний алгоритм побудови апроксимуючої послідовності функцій $\varphi_k \in S$.

***Доведення теореми* 1**. Оскільки, за припущенням, множина $\mathcal{X}$ щільна у просторі $(L_1)^{m\times m}$, виберемо послідовності $(A_{r-l,k})_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, де $1 \leq l \leq r$, які задовольняють умову

$$\mathcal{X} \ni A_{r-l,k} \to A_{r-l} \quad \text{в} \quad (L_1)^{m\times m} \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{16}$$

Побудуємо послідовність операторів B_k вигляду (5) таку, що

$$B_k\, y \to By \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{для кожного} \quad y \in \big(C^{(r-1)}\big)^m. \tag{17}$$

Для цього використаємо однозначне зображення неперервного лінійного оператора (3) у вигляді

$$By = \sum_{l=0}^{r-2} \alpha_l\, y^{(l)}(a) + \int\limits_a^b (d\Phi(t))\, y^{(r-1)}(t) \quad \text{для всіх} \quad y \in (C^{(r-1)})^m. \tag{18}$$

Тут кожне α_l — деяка комплексна числова матриця розміру $rm \times m$, а

$$\Phi(t) = \big(\varphi^{\lambda,\mu}(t)\big)_{\substack{\lambda=1,\ldots,rm\\ \mu=1,\ldots,m}}$$

— деяка матриця-функція цього ж розміру така, що кожне $\varphi^{\lambda,\mu} \in \mathrm{NBV}$; при цьому інтеграл розуміється у сенсі Рімана – Стільтьєса. (Звісно, якщо $r=1$, то у (18) немає суми за індексом l.) Наведене зображення випливає безпосередньо з відомого опису простору, спряженого до $C^{(r-1)}$ (див., наприклад, [19, с. 344]).

Зафіксувавши $\lambda \in \{1,\ldots,rm\}$ і $\mu \in \{1,\ldots,m\}$, означимо функціонал $\ell \in C'$ за формулою (14), у якій покладемо $\varphi(t) \equiv \varphi^{\lambda,\mu}(t)$. За твердженням 1 існує послідовність $\Big(\varphi_k^{\lambda,\mu}\Big)_{k=1}^{\infty} \subset S$, яка задовольняє умову (15), де $\varphi_k(t) \equiv \varphi_k^{\lambda,\mu}(t)$. Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^b z^{(r-1)}(t)\, d\varphi_k^{\lambda,\mu}(t) = \int\limits_a^b z^{(r-1)}(t)\, d\varphi^{\lambda,\mu}(t) \quad \text{для всіх} \quad z \in C^{(r-1)}. \tag{19}$$

Оскільки $\varphi_k^{\lambda,\mu} \in S$, то лівий інтеграл є лінійною комбінацією значень функції $z^{(r-1)}(t)$ у деяких точках відрізка $[a,b]$. Тому, покладаючи

$$B_k\, y := \sum_{l=0}^{r-2} \alpha_l\, y^{(l)}(a) + \int_a^b \left(d\left(\varphi_k^{\lambda,\mu}(t)\right)_{\substack{\lambda=1,\ldots,rm\\ \mu=1,\ldots,m}}\right) y^{(r-1)}(t)$$

для кожного $y \in \left(C^{(r-1)}\right)^m$, бачимо, що лінійні неперервні оператори $B_k \colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}$, де $k \in \mathbb{N}$, набирають вигляду (5) і задовольняють потрібну властивість (17) з огляду на (18) і (19).

Позначимо через $\bar{B}$ і $\bar{B}_k$ відповідно звуження операторів B і B_k на простір Соболєва $\left(W_1^r\right)^m$. Оскільки він неперервно вкладений у простір $\left(C^{(r-1)}\right)^m$, то лінійні оператори $\bar{B}$ і $\bar{B}_k$ неперервно діють з $\left(W_1^r\right)^m$ у $\mathbb{C}^{rm}$. Розглянемо задачу, яка складається з диференціальної системи (1) і крайової умови

$$\bar{B}y = q. \tag{20}$$

Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу, яка складається з диференціальної системи (4) і крайової умови

$$\bar{B}_k\, y_k = q. \tag{21}$$

Розв'язки цих задач беруться у класі $\left(W_1^r\right)^m$. За припущенням перша з них однозначно розв'язна у просторі $\left(W_1^r\right)^m$. Згідно з (17) маємо збіжність

$$\bar{B}_k\, y \to \bar{B}y \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{для кожного} \quad y \in \left(W_1^r\right)^m. \tag{22}$$

Граничні властивості цих задач досліджено у статтях [12, 17]. На підставі теореми 3 [12] (або теорема 2.3 [17]) робимо висновок, що з умов (16) і (22) випливає однозначна розв'язність задачі (4), (21) (а отже, і задачі (4), (5)) при $k \gg 1$ і потрібна асимптотична властивість (6).

Зазначимо, що функції $\varphi_k^{\lambda,\mu}(t)$, а отже, і оператори B_k не залежать від f і q і будуються явно, як це було показано у [18] (доведення лем 1 і 2). Це стосується і матриць $A_{r-l,k}$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Розглянемо крайові задачі (1), (20) і (4), (21), де (як і раніше) $\bar{B}$ і $\bar{B}_k$ позначають відповідно звуження операторів B і B_k на простір Соболєва $\left(W_1^r\right)^m$. Пов'яжемо з цими задачами лінійні оператори $(L,\bar{B})$ і $(L_k,\bar{B}_k)$, які неперервно діють з $\left(W_1^r\right)^m$ у $(L_1)^m \times \mathbb{C}^{rm}$. Ці оператори оборотні при $k \geq \widetilde{\varrho}$. Розглянемо обернені до них оператори $(L,\bar{B})^{-1}$ і $(L_k,\bar{B}_k)^{-1}$. Оскільки за припущенням крайові задачі (4), (5) задовольняють висновок теореми 1, то

$$(L_k,\bar{B}_k)^{-1}(f,q) = y_k \to y = (L,\bar{B})^{-1}(f,q) \quad \text{в} \quad \left(W_1^r\right)^m \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{23}$$

для довільних $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$, тобто $(L_k,\bar{B}_k)^{-1}$ збігається до $(L,\bar{B})^{-1}$ у сильній операторній топології. Тому за теоремою Банаха – Штейнгауза

$$\widetilde{\varkappa} := \sup\left\{\left\|(L_k,\bar{B}_k)^{-1} \colon (L_1)^m \times \mathbb{C}^{rm} \to \left(W_1^r\right)^m\right\| : k \geq \widetilde{\varrho}\right\} < \infty.$$

Отже, на підставі (9) і (23)

$$\|x_k - y\|_{r,1} = \big\|(L_k, \bar{B}_k)^{-1}(f_k, q_k) - (L, \bar{B})^{-1}(f, q)\big\|_{r,1} \leq$$
$$\leq \big\|(L_k, \bar{B}_k)^{-1}(f_k, q_k) - (L_k, \bar{B}_k)^{-1}(f, q)\big\|_{r,1} +$$
$$+ \big\|(L_k, \bar{B}_k)^{-1}(f, q) - (L, \bar{B})^{-1}(f, q)\big\|_{r,1} \leq$$
$$\leq \widetilde{\varkappa}(\|f_k - f\|_1 + \|q_k - q\|) + \|y_k - y\|_{r,1} <$$
$$< 2\widetilde{\varkappa}\varepsilon + \varepsilon = \varkappa\varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \varrho \geq \widehat{\varrho}.$$

Тут $\varkappa := 2\widetilde{\varkappa} + 1$, а число $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ задовольняє імплікацію $k \geq \varrho \Rightarrow \|y_k - y\|_{r,1} < \varepsilon$. При цьому ϱ не залежить від правих частин f_k і q_k, оскільки від них не залежить $y_k - y$. Таким чином, розв'язок x_k задачі (7), (8) має властивість (10).

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Всі границі розглядаємо при $k \to \infty$. Дослідимо спочатку випадок $r = 1$. Якщо $f_k \to f$ в $(L_1)^m$ і $q_k \to q$ в $\mathbb{C}^m$, то $x_k \to y$ в $\big(W_1^1\big)^m$ згідно з теоремою 2. Отже, розглядаючи y і x_k як розв'язки крайових задач (1), (20) і (7), $\bar{B}_k x_k = q_k$, на підставі теореми 2.3 [17] робимо висновок, що

$$A_{0,k} \to A_0 \quad \text{в} \quad (L_1)^{m\times m}, \tag{24}$$

$$B_k x \to Bx \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \text{для кожного} \quad x \in \big(W_1^1\big)^m. \tag{25}$$

Нехай натуральне $k \geq \widehat{\varrho}$. Нагадаємо, що y_k — єдиний розв'язок задачі (4), (5). Маємо

$$\|x_k - y\|_C \leq \|x_k - y_k\|_C + \|y_k - y\|_C, \quad \text{де} \quad \|y_k - y\|_C \to 0, \tag{26}$$

згідно з теоремою 1 і неперервним вкладенням $\big(W_1^1\big)^m \hookrightarrow (C)^m$. Оцінимо норму $\|x_k - y_k\|_C$.

Позначимо через Y_k матрицант системи (4), віднесений до точки $t = a$, тобто матриця-функція $Y_k \in \big(W_1^1\big)^{m\times m}$ є розв'язком задачі Коші

$$Y_k'(t) = -A_{0,k}(t)Y_k(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a, b], \quad Y_k(a) = E_m, \tag{27}$$

де E_m — одинична матриця порядку m. Як відомо, числова матриця $Y_k(t)$ невироджена для кожного $t \in [a, b]$. Позначимо через $[B_k Y_k]$ квадратну числову матрицю порядку m, довільний j-й стовпець якої є результатом дії оператора B_k на j-й стовпець матрицанту Y_k. Оскільки задача (7), (8) однозначно розв'язна, то матриця $[B_k Y_k]$ невироджена згідно з формулою (1.7) [2].

Як відомо [2] (формула (1.26)), розв'язок x_k крайової задачі (7), (8) зображується у вигляді

$$x_k(t) = z_k(t, q_k) + Y_k(t)h_k(f_k) + R_k(t, f_k) \quad \text{для всіх} \quad t \in [a, b]. \tag{28}$$

Тут

$$z_k(t, q_k) := Y_k(t)[B_k Y_k]^{-1} q_k, \tag{29}$$

$$h_k(f_k) := -[B_k Y_k]^{-1} B_k R_k(\cdot, f_k), \tag{30}$$

де

$$R_k(t, f_k) := Y_k(t) \int_a^t Y_k^{-1}(\tau) f_k(\tau) d\tau = F_k(t) - Y_k(t) \int_a^t Y_k^{-1}(\tau) A_{0,k}(\tau) F_k(\tau) d\tau. \tag{31}$$

Узявши $f_k = f$ і $q_k = q$ у формулах (29)–(31), отримаємо розклад

$$y_k(t) = z_k(t,q) + Y_k(t)h_k(f) + R_k(t,f) \quad \text{для всіх} \quad t \in [a,b]. \tag{32}$$

Позначимо через Y матрицант системи (1), віднесений до точки $t = a$. З властивості (24) на підставі теореми 2.3 [17] випливає, що $Y_k \to Y$ в $\left(W_1^1\right)^{m\times m} \hookrightarrow (C)^{m\times m}$ (вкладення неперервне). Тому $Y_k^{-1} \to Y^{-1}$ в $(C)^{m\times m}$. Окрім того,

$$[B_kY_k] = [B_k(Y_k - Y)] + [B_kY] \to [BY] \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{m\times m}$$

згідно з (12) і (25). Матриця $[BY]$ невироджена, оскільки задача (1), (2) однозначно розв'язна. Тому $[B_kY_k]^{-1} \to [BY]^{-1}$ в $\mathbb{C}^{m\times m}$. Отже, існує ціле число $\varrho_1 \geq \widehat{\varrho}$ таке, що

$$\|Y_k\|_C \left\|[B_kY_k]^{-1}\right\| \leq 1 + \|Y\|_C \left\|[BY]^{-1}\right\| =: c_1 \quad \text{при} \quad k \geq \varrho_1 \tag{33}$$

і, крім того,

$$\|Y_k\|_C \left\|Y_k^{-1}\right\|_C \|A_{0,k}\|_1 \leq 1 + \|Y\|_C \left\|Y^{-1}\right\|_C \|A_0\|_1 =: c_2 - 1 \quad \text{при} \quad k \geq \varrho_1 \tag{34}$$

на підставі (24). Число ϱ_1 не залежить від правих частин задач (1), (2) і (7), (8).

Використавши умови (11), (12) і властивості (33), (34), оцінимо різниці відповідних доданків у розкладах (28) і (32). Нехай натуральне $k \geq \varrho_1$. Тоді

$$\|z_k(\cdot,q_k) - z_k(\cdot,q)\|_C = \|Y_k(\cdot)[B_kY_k]^{-1}(q_k - q)\|_C \leq c_1\|q_k - q\| < c_1\varepsilon.$$

Крім того,

$$\begin{aligned}\|R_k(\cdot,f_k) - R_k(\cdot,f)\|_C &\leq \|F_k - F\|_C + \|Y_k\|_C \left\|Y_k^{-1}A_{0,k}(F_k - F)\right\|_1 \leq \\ &\leq \|F_k - F\|_C + \|Y_k\|_C \left\|Y_k^{-1}\right\|_C \|A_{0,k}\|_1 \|F_k - F\|_C < c_2\varepsilon,\end{aligned} \tag{35}$$

тому

$$\begin{aligned}\|Y_k(\cdot)h_k(f_k) - Y_k(\cdot)h_k(f)\|_C &= \left\|Y_k(\cdot)[B_kY_k]^{-1}B_k(R_k(\cdot,f_k) - R_k(\cdot,f))\right\|_C \leq \\ &\leq \|Y_k\|_C \left\|[B_kY_k]^{-1}\right\| \sigma \|R_k(\cdot,f_k) - R_k(\cdot,f)\|_C < c_1c_2\,\sigma\,\varepsilon.\end{aligned} \tag{36}$$

Таким чином,

$$\|x_k - y_k\|_C \leq (c_1 + c_2 + c_1c_2\,\sigma)\varepsilon = \left((c_1 + c_2)\sigma^{-1} + c_1c_2\right)\sigma\,\varepsilon \leq \varkappa_0\sigma\,\varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \varrho_1,$$

де число

$$\varkappa_0 := (c_1 + c_2)\,\|B\colon (C)^m \to \mathbb{C}^m\|^{-1} + c_1c_2$$

залежить лише від A_0 і B. Звідси на підставі (26) робимо висновок, що $\|x_k - y\|_C < (1+\varkappa_0)\sigma\varepsilon$ при $k \geq \varrho$, де число $\varrho \geq \varrho_1$ задовольняє імплікацію $k \geq \varrho \Rightarrow \|y_k - y\|_C < \sigma\varepsilon$ і не залежить від f_k, q_k. Залишилося покласти $\varkappa := 1 + \varkappa_0$.

Теорему 3 доведено у випадку $r = 1$.

Перейдемо до випадку $r \geq 2$. Зведемо крайові задачі (1), (2) і (7), (8) до крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Почнемо з першої з них. Як звичайно, покладемо $g := \operatorname{col}(0, f) \in (L_1)^{rm}$ і

$$P := \begin{pmatrix} O_m & -E_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & -E_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & -E_m \\ A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_{r-1} \end{pmatrix} \in (L_1)^{rm\times rm}, \qquad (37)$$

де O_m — квадратна нуль-матриця порядку m. Використавши зображення (18) крайового оператора B, покладемо

$$Tv := \sum_{l=0}^{r-2} \alpha_l\, v^l(a) + \int_a^b (d\Phi(t))\, v^{r-1}(t) \quad \text{для довільного} \quad v \in (C)^{rm}, \qquad (38)$$

де $v = \operatorname{col}\bigl(v^0, \ldots, v^{r-1}\bigr)$ і $v^l \in (C)^m$ для кожного $l \in \{0, \ldots, r-1\}$. Маємо обмежений лінійний оператор $T\colon (C)^{rm} \to \mathbb{C}^{rm}$. Якщо $y \in (W_1^r)^m$ є розв'язком задачі (1), (2), то вектор-функція

$$v = \operatorname{col}\Bigl(y, y', \ldots, y^{(r-1)}\Bigr) \in \bigl(W_1^1\bigr)^{rm} \qquad (39)$$

є розв'язком задачі

$$v'(t) + P(t)v(t) = g(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a,b], \qquad (40)$$

$$Tv = q. \qquad (41)$$

Навпаки, якщо $v \in \bigl(W_1^1\bigr)^{rm}$ є розв'язком задачі (40), (41), то вектор-функція $y := v^0$ належить до простору $\bigl(W_1^r\bigr)^m$ і є розв'язком задачі (1), (2), причому виконується рівність (39).

Аналогічно зведемо кожну задачу (7), (8) до крайової задачі

$$u_k'(t) + P_k(t)u_k(t) = g_k(t) \quad \text{для м.в.} \quad t \in [a,b], \qquad (42)$$

$$T_k u_k = q_k. \qquad (43)$$

Тут розв'язок $u_k \in \bigl(W_1^1\bigr)^{rm}$, $g_k := \operatorname{col}(0, f_k) \in (L_1)^{rm}$, матриця-функція $P_k \in (L_1)^{rm\times rm}$ означена за формулою (37), у якій кожне A_j замінено на $A_{j,k}$. Обмежений лінійний оператор $T_k\colon (C)^{rm} \to \mathbb{C}^{rm}$ означено подібно до оператора T за допомогою однозначного зображення оператора B_k у вигляді

$$B_k x = \sum_{l=0}^{r-2} \alpha_{l,k}\, x^{(l)}(a) + \int_a^b (d\Phi_k(t))\, x^{(r-1)}(t) \quad \text{для довільного} \quad x \in \bigl(C^{(r-1)}\bigr)^m, \qquad (44)$$

де кожне $\alpha_{l,k}$ — деяка комплексна числова матриця розміру $(rm\times m)$, а $\Phi_k(t)$ — деяка матриця-функція такого ж розміру така, що кожний її елемент належить до NBV. А саме

$$T_k u := \sum_{l=0}^{r-2} \alpha_{l,k}\, u^l(a) + \int_a^b (d\Phi_k(t))\, u^{r-1}(t) \quad \text{для довільного} \quad u \in (C)^{rm}, \qquad (45)$$

де $u = \operatorname{col}\left(u^0, \ldots, u^{r-1}\right)$ і $u^l \in (C)^m$ для кожного $l \in \{0, \ldots, r-1\}$.

Якщо $f_k \to f$ в $(L_1)^m$ і $q_k \to q$ в $\mathbb{C}^{rm}$, то $x_k \to y$ в $\left(W_1^r\right)^m$ згідно з теоремою 2. Тому на підставі теореми 2.3 [17] $A_{r-l,k} \to A_{r-l}$ в $(L_1)^{m\times m}$ для кожного $l \in \{1, \ldots, r\}$ і $B_k x \to Bx$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $x \in \left(W_1^r\right)^m$. Отже,

$$P_k \to P \quad \text{в} \quad (L_1)^{(rm\times rm)} \tag{46}$$

і, крім того,

$$B_k x \to Bx \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{для кожного} \quad x \in \left(C^{(r-1)}\right)^m \tag{47}$$

з урахуванням умови (12) і щільності множини $\left(W_1^r\right)^m$ у просторі $\left(C^{(r-1)}\right)^m$. Згідно із зображеннями (18) і (44) властивість (47) еквівалентна системі таких умов:

(i) $\alpha_{l,k} \to \alpha_l$ в $\mathbb{C}^{(rm\times m)}$ для кожного $l \in \{0, \ldots, r-2\}$;

(ii) $\sup\{\|V(\Phi_k, [a,b])\| : k \geq \widetilde{\varrho}\} < \infty$;

(iii) $\Phi_k(b) \to \Phi(b)$ в $\mathbb{C}^{(rm\times m)}$;

(iv) $\displaystyle\int_a^t \Phi_k(s)ds \to \int_a^t \Phi(s)ds$ в $\mathbb{C}^{(rm\times m)}$ для кожного $t \in (a,b]$.

Тут числова матриця $V(\Phi_k, [a,b])$ утворена повними варіаціями елементів матриці-функції Φ_k. Ця еквівалентність випливає з критерію Ф. Рісса слабкої збіжності неперервних лінійних функціоналів на просторі C (див., наприклад, [21], розд. III, п. 55). Отже, (47) обумовлює збіжність

$$T_k u \to Tu \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{для кожного} \quad u \in (C)^{rm}. \tag{48}$$

Розглянемо крайові задачі (40), (41) і (42), (43), де $k \geq \widetilde{\varrho}$, для *довільних* правих частин $g, g_k \in (L_1)^{rm}$ і $q, q_k \in \mathbb{C}^{rm}$. Вони належать до класу задач, досліджених у цій роботі у випадку $r = 1$. Вони однозначно розв'язні у просторі $\left(W_1^1\right)^{rm}$, оскільки мають лише тривіальний розв'язок у випадку нульових правих частин, що випливає з наших припущень про однозначну розв'язність крайових задач (1), (2) і (7), (8) у просторі $\left(W_1^r\right)^m$. З властивостей (46) і (48) згідно з теоремою 2.3 [17] випливає, що

$$\left(g_k \to g \text{ в } (L_1)^{rm}\right) \wedge \left(q_k \to q \text{ в } \mathbb{C}^{rm}\right) \implies \left(u_k \to v \text{ в } \left(W_1^1\right)^{rm}\right).$$

Зокрема, послідовність задач (42), (43) задовольняє висновок теореми 1, розглянутої для задачі (40), (41).

З формул (44) і (45) випливає, що

$$\left\|B_k \colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}\right\| \leq \|T_k \colon (C)^{rm} \to \mathbb{C}^{rm}\| \leq \theta \left\|B_k \colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}\right\|,$$

де θ — деяке додатне число, яке може залежати лише від r, m і $b-a$. Отже, умова (12) обумовлює нерівність

$$\|T_k \colon (C)^{rm} \to \mathbb{C}^{rm}\| \leq \theta\sigma \quad \text{при} \quad k \geq \widehat{\varrho}. \tag{49}$$

Нехай знову $g = \operatorname{col}(0, f)$ і $g_k = \operatorname{col}(0, f_k)$. Тоді

$$v = \operatorname{col}\left(y, y', \ldots, y^{(r-1)}\right) \quad \text{і} \quad u_k = \operatorname{col}\left(x_k, x_k', \ldots, x_k^{(r-1)}\right) \tag{50}$$

— розв'язки задач (40), (41) і (42), (43) відповідно. На підставі теореми 3, вже доведеної для цих задач, робимо висновок, що з умов (11) і (49) випливає існування додатних чисел $\varkappa_1$ і $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ таких, що

$$\|u_k - v\|_C < \varkappa_1 \theta\sigma\varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq \varrho. \tag{51}$$

Тут $\varkappa_1$ залежить лише від P і T (тобто лише від L і B), а число ϱ можна вибрати незалежним від g_k (тобто від f_k) і q_k. З формул (50) і (51) безпосередньо випливає нерівність (13), де $\varkappa := \varkappa_1\theta$.

Теорему 3 доведено.

4. Прикінцеві зауваження. 1. У доведенні теореми 1 побудовано послідовність багатоточкових крайових операторів B_k вигляду (5), яка збігається до оператора B у топології сильної збіжності неперервних лінійних операторів на парі просторів $\left(C^{(r-1)}\right)^m$ і $\mathbb{C}^{rm}$. Для рівномірної збіжності (тобто збіжності за операторною нормою) таку апроксимуючу послідовність побудувати, взагалі кажучи, неможливо. Справді, з огляду на зображення оператора B у вигляді (18) його апроксимація операторами B_k є по суті апроксимацією підінтегральної функції Φ кусково-сталими функціями. Якщо, наприклад, $r = 1$, $m = 1$ і $\Phi(t) \equiv t$, то рівномірна збіжність $B_k \rightrightarrows B$ рівносильна тому, що повна варіація $\mathrm{V}(\Phi_k - \Phi, [a, b]) \to 0$ для деякої послідовності кусково-сталих функцій Φ_k на $[a, b]$. Для розглянутої функції $\Phi(t) \equiv t$ остання збіжність неможлива, оскільки $\mathrm{V}(\Phi_k - \Phi, [a, b]) \geq b - a$.

2. Нехай ціле $r \geq 2$. Молодші частини багатоточкових крайових диференціальних операторів B_k, побудованих у доведенні теореми 1, не залежать від k і набирають вигляду

$$\sum_{l=0}^{r-2} \alpha_l \, y^{(l)}(a),$$

де числові матриці α_l взято із зображення (18) крайового оператора B.

3. Вкажемо допустиме значення сталої $\varkappa$ у теоремі 3. Як видно з її доведення, у випадку $r = 1$ можна взяти

$$\varkappa := (c_1 + c_2)\lambda + c_1 c_2 + 1, \tag{52}$$

де

$$c_1 := 1 + \|Y\|_C \|[BY]^{-1}\|,$$
$$c_2 := 2 + \|Y\|_C \left\|Y^{-1}\right\|_C \|A_0\|_1,$$
$$\lambda := \|B\colon (C)^m \to \mathbb{C}^m\|^{-1}.$$

У випадку $r \geq 2$ сталу $\varkappa$ можна означити за формулою (52), де

$$c_1 := 1 + \|V\|_C \left\|[BV^\circ]^{-1}\right\|,$$
$$c_2 := 2 + \|V\|_C \left\|V^{-1}\right\|_C (b - a + \|A_{r-1}\|_1),$$
$$\lambda := \left\|B\colon \left(C^{(r-1)}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}\right\|^{-1}.$$

Тут V — матрицант системи (40), віднесений до точки $t = a$ (тобто $V \in (W_1^1)^{rm\times rm}$ — розв'язок задачі Коші $V'(t) = -P(t)V(t)$ для м.в. $t \in [a,b]$, $V(a) = E_{rm}$), V° — матриця-функція розміру $m \times rm$, утворена першими m рядками матриці-функції V (всі елементи матриці V° належать до простору W_1^r з огляду на (37)). Безпосереднє використання доведення теореми 3 у випадку $r \geq 2$ приводить до грубої оцінки $\varkappa$ зверху. Проте, аналізуючи доведення у випадку $r = 1$ щодо зведених крайових задач (40), (41) і (42), (43), приходимо до вказаного результату. При цьому використовуємо такі факти:

3.1. Оскільки усі стовпці матриціанту V мають вигляд (50), то $[BV^\circ] = [TV]$ для оператора T, означеного за формулою (38), що і дає оцінку $\|z_k(\cdot, q_k) - z_k(\cdot, q)\|_C \leq c_1\varepsilon$ при $k \gg 1$.

3.2. Оцінка (35) для зведених крайових задач набирає вигляду

$$\|R_k(\cdot, g_k) - R_k(\cdot, g)\|_C \leq \|G_k - G\|_C + \|V_k\|_C \left\|V_k^{-1}P_k(G_k - G)\right\|_1 \leq$$
$$\leq \|F_k - F\|_C + \|V_k\|_C \left\|V_k^{-1}\right\|_C \|P_k(G_k - G)\|_1 =$$
$$= \|F_k - F\|_C + \|V_k\|_C \left\|V_k^{-1}\right\|_C (\|F - F_k\|_1 + \|A_{r-1,k}(F_k - F)\|_1) \leq$$
$$\leq \|F_k - F\|_C + \|V_k\|_C \left\|V_k^{-1}\right\|_C (b - a + \|A_{r-1,k}\|_1)\|F_k - F\|_C < c_2\varepsilon$$

при $k \gg 1$. Тут V_k — матрицант системи (42), віднесений до точки $t = a$, та $G_k := \mathrm{col}\,(0, F_k)$ і $G := \mathrm{col}\,(0, F)$ — вектор-функції вимірності rm.

3.3. Оцінка (36) для зведених крайових задач набирає вигляду

$$\|V_k(\cdot)h_k(g_k) - V_k(\cdot)h_k(g)\|_C = \left\|V_k(\cdot)[T_kV_k]^{-1}T_k(R_k(\cdot, g_k) - R_k(\cdot, g))\right\|_C =$$
$$= \left\|V_k(\cdot)[B_kV_k^\circ]^{-1}B_k\,(R_k^\circ(\cdot, g_k) - R_k^\circ(\cdot, g))\right\|_C \leq$$
$$\leq \|V_k\|_C \left\|[B_kV_k^\circ]^{-1}\right\| \sigma \,\|R_k^\circ(\cdot, g_k) - R_k^\circ(\cdot, g)\|_{(r-1)} < c_1c_2\,\sigma\,\varepsilon$$

при $k \gg 1$. Тут матриця-функція V_k° утворена першими m рядками матриці-функції V_k, а вектор-функція $R_k^\circ(\cdot,\cdot)$ — першими m компонентами вектор-функції $R_k(\cdot,\cdot)$, причому з огляду на формули (28) і (32) для зведених задач вектор-функції $R_k(\cdot, g_k)$ і $R_k(\cdot, g)$ мають вигляд (50).

Література

1. И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси (1975).
2. I. T. Kiguradze, *Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations*, J. Soviet Math., **43**, 2259 – 2339 (1988).
3. I. T. Kiguradze, *On boundary value problems for linear differential systems with singularities*, Different. Equat., **39**, № 2, 212 – 225 (2003).
4. M. Ashordia, *Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations*, Czechoslovak Math. J., **46**, № 3, 385 – 404 (1996).
5. В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач*, Доп. НАН України, № 9, 23 – 27 (2008).
6. T. I. Kodlyuk (Kodliuk), V. A. Mikhailets, N. V. Reva, *Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems*, Ukr. Math. J., **65**, № 1, 77 – 90 (2013).
7. V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova, *Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems*, J. Math. Sci. (N. Y.), **204**, № 3, 333 – 342 (2015).
8. V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva, *Limit theorems for the solutions of boundary-value problems*, Ukr. Math. J., **70**, № 2, 243 – 251 (2018).

9. O. B. Pelekhata, N. V. Reva, *Limit theorems for the solutions of linear boundary-value problems for systems of differential equations*, Ukr. Math. J., **71**, № 7, 1061 – 1070 (2019).
10. В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений*, Доп. НАН України, № 8, 28 – 30 (2008).
11. T. I. Kodliuk, V. A. Mikhailets, *Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces*, J. Math. Sci. (N. Y.), **190**, № 4, 589 – 599 (2013).
12. E. V. Gnyp, T. I. Kodlyuk (Kodliuk), V. A. Mikhailets, *Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces*, Ukr. Math. J., **67**, № 5, 658 – 667 (2015).
13. V. O. Soldatov, *On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces* $C^{(n+r)}[a, b]$, Ukr. Math. J., **67**, № 5, 785 – 794 (2015).
14. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. O. Soldatov, *Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems*, Electron. J. Qual. Theory Different. Equat., № 87, 1 – 16 (2016).
15. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. O. Soldatov, *A criterion for continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems for higher-order differential systems*, Methods Funct. Anal. and Topology, **22**, № 4, 375 – 386 (2016).
16. E. V. Gnip (Gnyp), *Continuity with respect to the parameter of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Slobodetskii spaces*, Ukr. Math. J., **68**, № 6, 849 – 861 (2016).
17. E. Hnyp (Gnyp), V. Mikhailets, A. Murach, *Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces*, Electron. J. Different. Equat., № 81, 1 – 13 (2017).
18. H. Masliuk, O. Pelekhata, V. Soldatov, *Approximation properties of multipoint boundary-value problems*, Methods Funct. Anal. and Topology, **26**, № 2, 119 – 125 (2020).
19. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Pt I. General theory*, Intersci., New York (1958).
20. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Acad. Press, New York (1980).
21. F. Riesz, B. Sz-Nagy, *Functional analysis*, Dover Publ. Inc., New York (1990).

Одержано 30.12.20