DOI: 10.37863/umzh.v74i12.6515

УДК 519.14

$\boxed{\text{О. М. Шарковський}}$ (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДЕСКРИПТИВНА ТЕОРІЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

Descriptive theory of sets — a classical branch of mathematics that arose at the beginning of the last century. This article offers **the basics of descriptive chaos theory.** It is shown that a dynamic system, if the topological entropy is positive:

1) has many different trajectory attractors, namely, a continuum of attractors;

2) the basins of most attractors have an overly complex structure, namely, are sets of the third class according to the terminology of descriptive set theory;

3) the basins of different attractors are too strongly intertwined and cannot be separated from each other by any open or closed sets, but only by sets of the second complexity class

and

4) the set of all attractors of the dynamical system forms an attractor grid (network) in the space of closed sets of the state space (with the Hausdorff metric), the cells of which are created by Cantor sets from the attractors themselves.

Дескриптивна (тобто описова) теорія множин — класичний розділ математики, який виник на початку минулого століття. У цій статті запропоновано **основи дескриптивної теорії хаосу.** Показано, що динамічна система, якщо топологічна ентропія додатна:

1) має дуже багато різних атракторів траєкторій, а саме, континуум атракторів;

2) басейни більшості атракторів мають надскладну будову, а саме, є множинами 3-го класу за термінологією дескриптивної теорії множин;

3) басейни різних атракторів дуже сильно переплітаються, і їх неможливо відокремити один від одного ніякими відкритими чи замкненими множинами, а можна лише множинами 2-го класу складності

та

4) множина всіх атракторів динамічної системи утворює в просторі замкнених множин простору станів (з метрикою Гаусдорфа) атракторну сітку (мережу), комірки якої створюються канторовими множинами з самих атракторів.

На початку 2017 року з'явилася книга С. Рюетт „Хаос на інтервалі” [1], в якій для неперервних відображень інтервалу запропоновано, за словами автора, огляд співвідношень між різними видами хаосу та пов'язаних з ними понять. Саме ця книга стала для автора даної статті останнім і вирішальним поштовхом до того, щоб осмислити результати, отримані ним ще в середині 60-х років минулого століття, і подивитися на те, що було зроблено в той час [2 – 4] з позицій „хаосу”.

Як відомо, слово *хаос* як математичний термін уперше з'явилось у статті Li, Yorke „Period three implies chaos” [5], де основними характеристиками хаосу були вказані наявність в системі (а) періодичних траєкторій всіх періодів та (б) так званої збовтаної (scrambled) множини точок (що визначалось як існування континуума пар точок, траєкторії яких то зближувалися необмежено, то знову розходилися).

На появу терміна *хаос* відразу відреагував P. Kloeden з колегами [6] статтею „A precise definition of chaos” в журналі „Nature”, де, зокрема, зазначено, що в роботі автора [7] про періодичні траєкторії отримано більш точний результат щодо циклів і для існування хаосу, можливо, не є необхідним наявність циклів усіх періодів.

Зауважимо ще, що в книзі С. Рюетт [1] є кілька посилань на роботи автора, а саме, дев'ять, з яких лише в одній [4] безпосередньо використовується термінологія дескриптивної теорії множин і йдеться саме про хаос, але не про той, про який йде мова в книзі [1].

Можна, звісно, подискутувати щодо використання слова *дескриптивна* (descriptive) в нашому контексті, але, на думку автора, слова *descriptive theory*, в перекладі українською *описова теорія*, досить точно характеризують те, про що йдеться в статті, і відповідають усталеній в математиці термінології.

У статті розглядаються динамічні системи на компакті X, породжувані неперервним відображенням $f: X \to X$, переважно у випадку, коли X — це інтервал $I \subset R$.

Асимптотичну поведінку кожної траєкторії $f^i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in X$, звичайно визначає так звана ω-гранична множина, або, простіше, *атрактор* траєкторії, а саме, інваріантна замкнена множина $\mathcal{A}_x = \bigcap_{m>0} \overline{\left\{ \bigcup_{i>m} f^i(x) \right\}}$, яка притягує цю траєкторію, коли час прямує до нескінченності: для будь-якого її околу U існує $i_0 = i_0(U)$ таке, що $f^i(x) \in U$ при $i \geq i_0$.

Кожна з множин $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, може бути атрактором для багатьох траєкторій. Множину всіх траєкторій, що притягуються одним і тим же атрактором, називають *басейном цього атрактора*: якщо $\mathcal{A}$ — атрактор, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mathcal{A}_x = \mathcal{A}\}$ — басейн атрактора.

Більшість результатів, наведених у цій роботі, отримані й опубліковані ще в 60-х роках минулого століття, але і сьогодні, здається, мало відомі, хоча всі вони тоді ж були перекладені англійською.

Тепер добре відомо, що в одновимірній динамічній системі хаос є тоді, коли топологічна ентропія системи додатна. Також відомо, що для одновимірних систем має місце таке твердження.

Для динамічної системи, яку задає відображення $f \in C^0(I, I)$, *де* I — *замкнений інтервал, наступні твердження еквівалентні*:

(1) *топологічна ентропія додатна*, $h(f) > 0$;

(2) f *має цикл періоду* $\neq 2^i$, $i \geq 0$;

(3) f *має гомоклінічну траєкторію*;

(4) *існують* $m \geq 1$ *і замкнені інтервали* $J, K \subset I$ *такі, що* $f^m J \cap f^m K \supset J \cup K$,

і з них випливають ще два еквівалентних твердження:

(5) *існують такі* $x, y \in I$, *що*

$$\lim_{i\to\infty} \sup \rho[f^i(x), f^i(y)] > 0, \qquad \lim_{i\to\infty} \inf \rho[f^i(x), f^i(y)] = 0;$$

(6) *існує континуум пар траєкторій з властивістю* (5).

Як зазначено вище, слово *хаос* як математичний термін уперше з'явилось у статті Li, Yorke „Period three implies chaos" [5], і саме властивість (6) фігурувала там як одна з основних при визначенні хаосу.

Отже, кожне з тверджень (1)–(5) може слугувати критерієм присутності хаосу в системі. Але властивість (6) не може бути визначальною для хаосу. Наприклад, проста система рівнянь $\dot{r} = r(1 - r)$, $\dot{\varphi} = \alpha$ (в полярних координатах) має періодичну траєкторію $r = 1$, яка є атрактором цієї системи. Після множення обох правих частин системи на множник $h(r, \varphi)$ такий, що $h(1, 0) = 0$ *і* $h(r, \varphi) > 0$ для інших r, φ, майже кожна пара траєкторій буде мати властивість (5), тобто нова система матиме властивість (6). Справді, після множення на h фазовий портрет системи залишиться незмінним, лише періодична траєкторія $r = 1$ трансформується в гомоклінічну траєкторію до точки спокою $(1, 0)$ (див. рис. 1). Саме присутність точки спокою, поблизу якої швидкість руху суттєво спадає, приводить до бажаного ефекту: коли траєкторії наближаються до цієї точки, вони зближуються, а потім знову розходяться. Звісно, ніякого хаосу в цій системі немає.

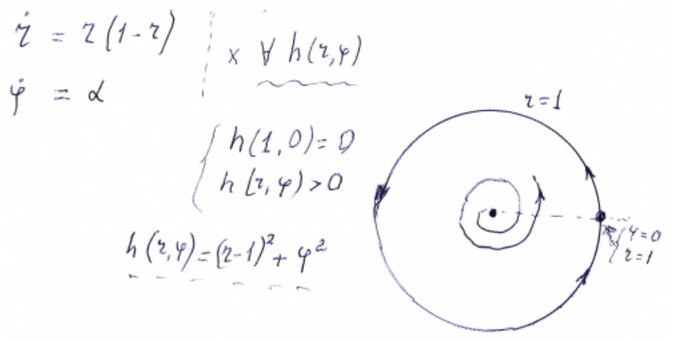

Рис. 1

1. Елементи дескриптивної теорії множин. У теорії динамічних систем поряд з відкритими множинами (наприклад, басейни притягувальних циклів, блукаючі множини) та замкненими множинами (ω-граничні множини, неблукаючі множини, центри динамічних систем) розглядаються множини більш складної структури [8 – 13].

З'являються F_σ-множини, які є об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості замкнених множин, наприклад, як множина всіх періодичних точок; G_δ-множини, які є перетинами не більш ніж зчисленної кількості відкритих множин, як множина всіх транзитивних точок системи; $F_{\sigma\delta}$-множини, які є перетинами не більш ніж зчисленної кількості F_σ-множин, і т. д.

Ми використовуємо класифікацію множин за Бером, відповідно до якої перший клас складають відкриті і замкнені множини разом із множинами, що є як F_σ-, так і G_δ-множинами одночасно. Другий клас складається з множин, які є або F_σ-, або G_δ-множинами, але не є одним і другим, разом з множинами, які, навпаки, є одночасно $F_{\sigma\delta}$- і $G_{\delta\sigma}$-множинами, але не належать до першого класу. Третій клас складається з множин, що є $F_{\sigma\delta}$- або $G_{\delta\sigma}$-множинами, але не є обома, і множин, що... (аналогічно до визначення другого класу). Подальші класи визначаються аналогічним чином.

2. Структура басейнів атракторів. Атрактори будь-яких траєкторій, коли простір X є компакт, звісно, є замкненими множинами за визначенням, тобто простими, першого класу за термінологією дескриптивної теорії множин (за Бером), яку ми використовуємо. А ось питання щодо структури басейнів є слушним. Верхні дескриптивні оцінки складності будови басейнів для різних атракторів, як правило, отримати досить легко навіть для динамічних систем на довільному просторі X зі зчисленним базисом, і в [2] такі верхні оцінки для систем, заданих неперервним відображенням $T : X \to X$, на довільних компактах, були отримані. А саме:

(a) якщо атрактор $\mathcal{A} \subset X$ є максимальним, тобто не існує атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \subset X$ $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, то басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є G_δ-множиною;

(b) якщо атрактор $\mathcal{A}$ є локально максимальним, тобто існує окіл $\mathcal{A}$, який не містить атракторів $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, то басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є одночасно як $F_{\sigma\delta}$-, так і $G_{\delta\sigma}$-множиною;

(c) в будь-якому випадку басейн $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ є (не більш складним в X, ніж) $F_{\sigma\delta}$-множина, тобто завжди може бути представлений як перетин не більш ніж зчисленного числа об'єднань не більш ніж зчисленного числа замкнених множин.

Ці твердження є наслідком наступних теорем [2].

Теорема 1. $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\supseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ — *множина типу* G_δ.

Нехай $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ — система відкритих (в X) множин таких, що:

1) $\sigma_i \cap \mathcal{A} \neq \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots,$

2) для будь-якого околу U точки з множини $\mathcal{A}$ знайдеться $\sigma \in \Sigma$, яка міститься в U.

Для кожної $\sigma_i \in \Sigma$ побудуємо послідовність відкритих множин $\sigma_i^0, \sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots,$ і σ_i^k складають точки $x \in X$, для яких $T^k x \in \sigma_i,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Множина $Q_i = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_i^k$ є відкритою. Якщо $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, де $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, то $x \in Q_i,\ i = 1, 2, \ldots$. Якщо $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ та $\mathcal{A}''$ не містить $\mathcal{A}$, тобто існує точка $y \in \mathcal{A}$, яка не належить $\mathcal{A}''$, то знайдеться $\sigma_{i'} \ni y$, що не містить жодної точки послідовності $\{T^j x\}_{j=0}^\infty$. Отже, $x \notin Q_{i'}$ і $x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$. Таким чином, $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\supseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}') = \bigcap\limits_{i} Q_i$ і є множиною типу G_δ.

Теорема 2. $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ — *множина типу* $F_{\sigma\delta}$.

Якщо $F \subseteq X$ — довільна замкнена множина, то множина $p_0(F)$, що складається з точок $x \in F$, для яких $T^j x \in F,\ j = 1, 2, \ldots,$ також замкнена. Множини $p_j(F),\ j = 1, 2, \ldots,$ що складаються з точок $x \in X$, для яких $T^j x \in p_0(F)$, також замкнені. Отже, $p(F) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} p_j(F)$ — множина типу F_σ. Точка $x \in X$ належить $p(F)$ тоді й лише тоді, коли існує номер j_x: $T^j x \in F$ при $j \geq j_x$.

Розглянемо послідовність відкритих множин $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ таких, що $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \mathcal{A}$. Нехай F_i — замикання множини U_i. Побудуємо множини $p(F_i),\ i = 1, 2, \ldots$. Стверджується, що $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}') = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} p(F_i)$.

Справді, якщо $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'),\ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, то $x \in p(F_i),\ i = 1, 2, \ldots$. Якщо $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ та існує точка $y \in \mathcal{A}''$, яка не належить $\mathcal{A}$, то знайдеться номер i' такий, що $y \notin F_{i'}$, і тоді $x \notin p(F_{i'})$.

***Висновок* 1.** $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — *множина типу* $F_{\sigma\delta}$.

Відразу ж виникає питання про існування відображень, для яких досягаються знайдені тут верхні оцінки для структури басейнів атракторів. Атрактори $\mathcal{A}$, для яких басейни $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ є $G_{\delta\sigma}$-множинами, можуть слугувати деяким базисом у просторі всіх атракторів.

Вкажемо деякі умови, за яких басейни атракторів мають більш просту структуру.

З теореми 1 безпосередньо випливають такі висновки.

***Висновок* 2.** *Якщо не існує множин* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — *множина типу* G_δ.

***Висновок* 3.** *Якщо існує окіл множини* $\mathcal{A}$, *який не містить множин* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — *множина типу* $G_{\delta\sigma}$.

Справді, розглянемо відкриту в X множину $U \supset \mathcal{A}$ таку, що для будь-якої множини $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \not\subset \overline{U}$. Позначимо X' множину точок $x \in \overline{U}$, для яких $T^j x \in \overline{U},\ j = 1, 2, \ldots$. Множина X' замкнена і $TX' \subseteq X'$. Множина $Q = X' \cap \bigcup\limits_{\mathcal{A}'\supseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ є множиною типу G_δ. Якщо $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то $x \notin Q$. Отже, $Q = X' \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Для будь-якої точки $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ існує номер j_x: $T^j x \in \overline{U}$ при $j \geq j_x$. Це означає, що $T^{j_x} x \in Q$. Таким чином, $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} Q$, де $T^{-j} Q$ — множина точок $x \in X$, для яких $T^j x \in Q$, і є множиною типу $G_{\delta\sigma}$.

Якщо множина $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не порожня, то множина $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$, як випливає з теореми 1, є множиною типу G_δ.

***Висновок* 4.** *Якщо* $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$ *та існує замкнена множина* $F \subset \mathcal{A}\colon F \neq \mathcal{A},\ TF = F$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *не є* F_σ*-множиною.*

Справді, множина $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ скрізь щільна на $\mathcal{A}$ і є G_δ-множиною. Множина $\mathcal{A} \cap (X \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ також скрізь щільна на $\mathcal{A}$ [14] (теорема 1.1.6). Отже, $\mathcal{A} \cap (X \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ не є G_δ-множиною (бо будь-які дві G_δ-множини, замикання яких співпадають, мають непорожній перетин). Оскільки $\mathcal{A}$ — замкнена множина, то $X \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не є G_δ-множиною, а $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — F_σ-множиною.

Отже, всі розглянуті тут множини, принаймні, є $F_{\sigma\delta}$- або ж $G_{\delta\sigma}$-множинами. Таким чином, навіть достатньо тонкий аналіз динамічних систем не виводить нас за межі множин 3-го класу класифікації Бера – Валле-Пуссена.

3. Приклади множин 3-го класу і вище третього. Вочевидь, можна навести алгоритми побудови підмножин множин $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, що належать класам вище третього. На підтвердження цього розглянемо приклад Бера множини 3-го класу [15] і приклади Л. В. Келдиш множин класу вище третього [16].

Нехай X складається з ірраціональних точок інтервалу $(0,1)$. У цьому випадку X не є компактом (у звичайній топології), а лише абсолютною G_δ-множиною. Будь-якій точці з X відповідає єдиний ланцюговий дріб

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}.$$

Множина Бера $\mathbb{B}$ 3-го класу складається з точок ланцюгового дробу, в яких $n_j \to \infty$.

І цей же приклад „з точки зору” динамічних систем. Нехай відображення $g\colon X \to X$ задається формулою $g\colon x \mapsto \{1/x\}$, де $\{\ldots\}$ позначає дробову частину числа. Відображення g неперервне на X (метрика для ланцюгових дробів) і $g(X) = X$. Справді, якщо $x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}$, то $g(x) = \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}$. Отже, множина Бера $\mathbb{B}$ третього класу складається з точок $x \in X$, для яких $g^j x \to 0$, коли $j \to \infty$, тобто, в наших позначеннях, множина $\mathbb{B}$ є басейном атрактора $\{x = 0\}$.

Множини Л. В. Келдиш класів вище третього є підмножинами множини Бера, і, отже, точки цих підмножин повинні відрізнятися ще й тим чи іншим способом наближення траєкторії $\{T^j x\}$ до точки $x = 0$. Наприклад, множина 4-го класу складається з точок множини Бера, для яких, яким би не було число i, знайдеться таке $n(i)$, що для всіх $n > n(i)$ кількість чисел n_j, рівних n, кратне 2^i [16]. Іншими словами, вона складається з точок $x \in X\colon T^j x \to 0$ і для будь-якого i існує таке $n(i)$, що число попадань точки x в інтервал $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ при $n > n(i)$ кратне 2^i.

Чи досягаються ці верхні оцінки хоча б для деяких класів динамічних систем і, отже, матимемо для таких систем складне переплетення траєкторій, які прямують до різних атракторів — це досить складна задача навіть для одновимірних систем. . .

Проте, як з'ясувалося, всі ці оцінки досягаються одновимірними системами, коли система має цикл періоду $\neq 2^i$. А саме, в [3, 4, 17] було показано, що в цьому випадку існує максимальний атрактор A_{max}, який містить цикли і континуум різних атракторів типу (c); басейн кожного такого (типу (c)) атрактора є множиною 3-го класу, тобто є $F_{\sigma\delta}$-множиною і не є $G_{\delta\sigma}$-множиною. Це означає, що:

1) тут ми маємо дуже складне переплетення траєкторій з різною асимптотичною поведінкою,

2) з точки зору дескриптивної теорії, одновимірний хаос настільки ж складний, як і багатовимірний та навіть нескінченновимірний хаос.

4. Критерій Бера належності множини до 3-го класу. Нехай $P_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $j_k = 1, 2, \ldots$, — довершені ніде не щільні множини на R (або на множині ірраціональних чисел J) та

1) $P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}} \subset P_{j_1 \ldots j_k}$,

2) $P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$ ніде не щільні на $P_{j_1 \ldots j_k}$,

3) $Q_k = \bigcup\limits_{j_{k+1}=1}^{\infty} P_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$, $k = 1, 2, \ldots$, скрізь щільні на $P_{j_1 \ldots j_k}$.

Тоді множина $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ є множиною Бера третього класу.

Теорема А. *Якщо відображення має притягувально-відштовхувальну нерухому точку, то басейн цієї точки є множиною Бера третього класу.*

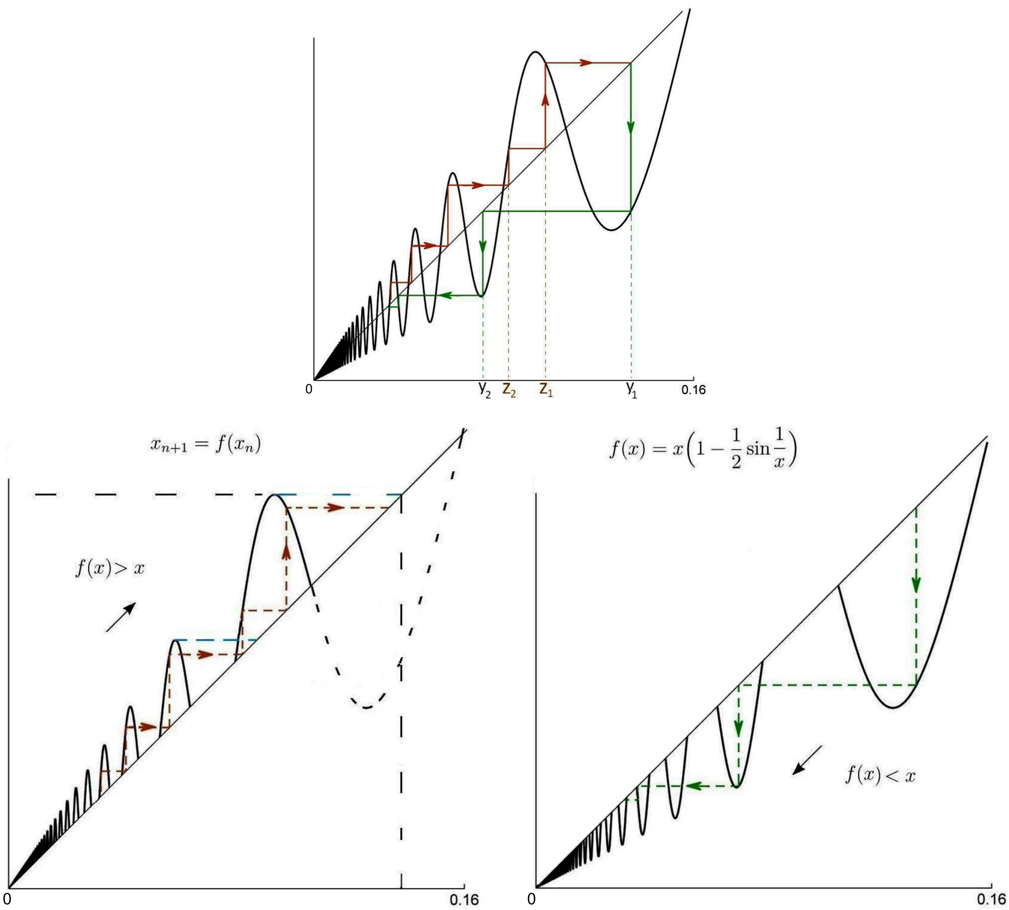

Рис. 2. Дорога до хаосу через „повзучий feedback” (негладка реалізація).

На рис. 2 показано, як відбувається відштовхування від нерухомої точки $x = 0$ та притягування до неї („повзучий зворотний зв’язок”).

Залишилося показати, що множину точок x, для яких $f^i(x) \to 0$, коли $i \to \infty$, можна представити як суму двох множин, а саме, множини, що задовольняє критерій Бера бути множиною третього класу, та множини класу ≤ 2. Саме ця досить складна задача розв'язується в [3] та [14, с. 114 – 133].

Теорема Б. *Якщо атрактор* $\mathcal{A}$ *не є максимальним або локально максимальним* (*тобто будь-який окіл* $\mathcal{A}$ *містить атрактор* $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$) *і містить цикл*, *то басейн* $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ *є множиною Бера третього класу.*

Теорему доведено в [4], базуючись на доведенні відповідної теореми для циклів у [3].

Для одновимірних систем **тільки необерненість** f **надає зворотний зв'язок, який відкриває дорогу до хаосу.**

Тут ми вже маємо „швидкий зворотний зв'язок" як для циклів, так і для локально максимальних атракторів. Проте „повзучий зворотний зв'язок" залишається визначальним для атракторів, які не є локально максимальними.

Найпростішим прикладом такого атрактора може бути гомоклінічна траєкторія разом із циклом, до якого вона прямує. . .

Як же виникає цей „повзучий зворотний зв'язок"? Пояснення досить складні навіть у випадку гладких систем.

5. Як можна відокремити (розділити) басейни різних атракторів. Для будь-яких двох атракторів $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}_{max}$, що не перетинаються, існують локально максимальні атрактори $\mathcal{A}'_{lmax}, \mathcal{A}''_{lmax}$, які не перетинаються і містять, відповідно, $\mathcal{A}'$ та $\mathcal{A}''$ [14] (розділ 4). Тому їхні басейни можна відокремити один від одного множинами $\mathcal{B}'$ і $\mathcal{B}''$ другого класу Бера, а саме, F_σ-множинами

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathcal{A}'_{lmax}) = \bigcup_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'_{lmax}} \mathcal{B}(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{B}'' = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathcal{A}''_{lmax}) = \bigcup_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''_{lmax}} \mathcal{B}(\mathcal{A}).$$

Отже, басейни будь-яких двох атракторів, які є множинами 3-го класу, завжди можна відокремити один від одного множинами 2-го класу.

6. Сім'я всіх атракторів і сім'я всіх локально максимальних атракторів. Звісно, інформація про самі атрактори та їхні взаємозв'язки має складати суттєву частину дескриптивної теорії хаосу.

В [17] та [14] (розділ 4) розглянуто сім'ї $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{M}'$ всіх атракторів та, відповідно, всіх локально максимальних атракторів, які містяться в $\mathcal{A}_{max}$.

$\mathfrak{M}$ містить континуум локально максимальних атракторів, відмінних від циклів; кожен з них є канторовою множиною, на якій періодичні точки скрізь щільні.

$\mathfrak{M}$ містить континуум мінімальних атракторів, відмінних від циклів, і, отже, всі вони є канторовими множинами.

Існує природний частковий порядок в $\mathfrak{M}$: якщо $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}'$ передує $\mathcal{A}$ у $\mathfrak{M}$.

Максимальний атрактор $\mathcal{A}_{max}$ і кожний локально максимальний атрактор не мають безпосереднього наступника в будь-якому максимальному ланцюгу. Кожний атрактор такого ланцюга, відмінний від $\mathcal{A}_{max}$, має континуум безпосередніх попередників (див. рис. 3).

Кожний максимальний ланцюг з $\mathfrak{M}'$ містить зчисленну кількість локально максимальних атракторів і подібний до множини раціональних точок:
для кожних $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ існує $\mathcal{A}'''$ такий, що $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}'' \ldots$.

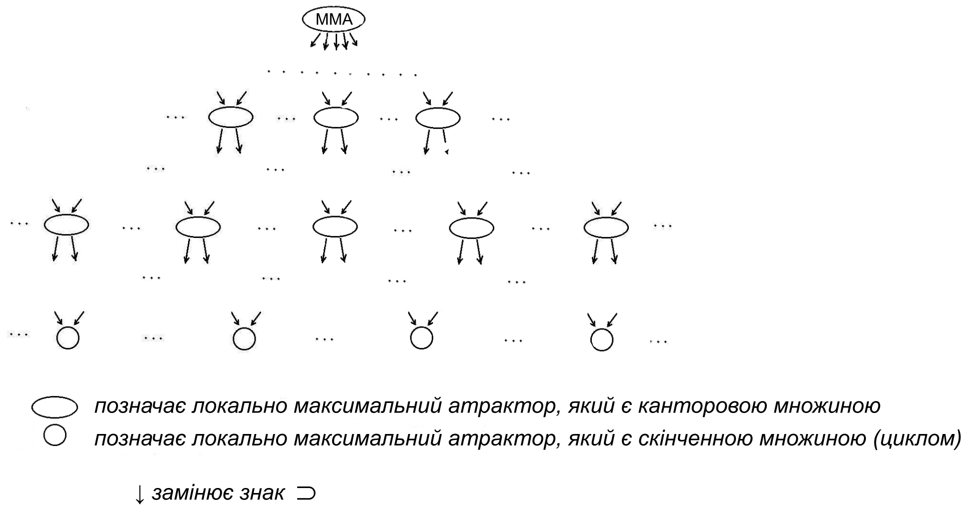

Рис. 3

7. Множина $\mathfrak{M}$ всіх атракторів у просторі 2^X з метрикою Гаусдорфа. Цікаво виглядає сім'я всіх атракторів $\mathfrak{M}$ як множина у просторі 2^X з метрикою Гаусдорфа.

Сім'я $\mathfrak{M}$ утворює в просторі 2^I (з метрикою Гаусдорфа) замкнену множину [18]. Ця множина ніде не щільна на 2^X.

Сім'я $\mathfrak{M}'$ та сім'я всіх циклів $\mathfrak{P}$ утворюють у просторі 2^X множини, скрізь щільні на множині $\mathfrak{M}$, тобто $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{M}'} = \mathfrak{M}$.

8. Атракторна сітка з локально максимальних атракторів. Кожний максимальний ланцюг $\mathfrak{L}$ з $\mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{P}$ після його замикання в метриці Гаусдорфа перетворюється в множину Кантора на 2^X, яка починається в точці, що відповідає атрактору $\mathcal{A}_{max}$, і закінчується точкою, яка відповідає мінімальному або майже мінімальному атрактору, на яких всі або майже всі траєкторії скрізь щільні.

Різні максимальні ланцюги з $\mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{P}$ перетинаються на деяких локально максимальних атракторах, що приводить у просторі 2^X до перетину в певних точках різних канторових множин і утворення канторовими множинами сітки, вузлам якої відповідають саме локально максимальні атрактори.

Отже, $\mathfrak{M}$, як множина у просторі 2^X, є сіткою зі сплетених канторових множин, що беруть початок у точці, яка відповідає атрактору $\mathcal{A}_{max}$, та зчисленної кількості ізольованих точок, які відповідають циклам з $\mathfrak{P}$. Якщо $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}'$, то $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{P}$ є замкненою щільною в собі множиною в 2^X (див. рис. 4).

Множина $\mathfrak{M}$ має певну самоподібність (див. рис. 5). Наприклад, якщо $X = S^1$ і $f\colon x \mapsto 2x \bmod 1$, то наступне твердження здається правдоподібним: якщо $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{M}'$ є локально максимальним атрактором і $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}^*} = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*\}$, то на 2^X існує гомеоморфізм $\phi_{\mathcal{A}^*}$ такий, що $\phi_{\mathcal{A}^*}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{A}^*}$.

Однак доведення результатів, які містилися у [17], на жаль, ніколи не були опубліковані, хоча всі доведення були повністю наведені в докторській дисертації автора (1966 рік). Публічний

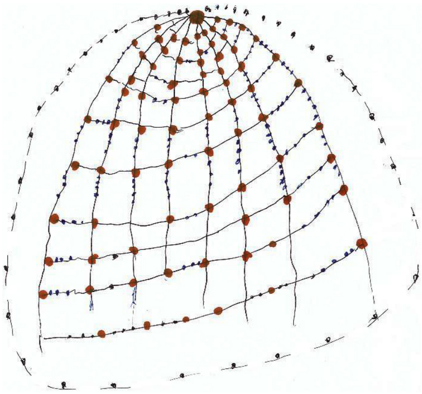

Рис. 4

захист цієї дисертації відбувся у травні 1967 року, і тоді, ймовірно, мало сенс „зупинитися”, „озирнутися” і, можливо, приєднатися до більш популярної на той час тематики, наприклад, долучитися до дослідження гладких динамічних систем.

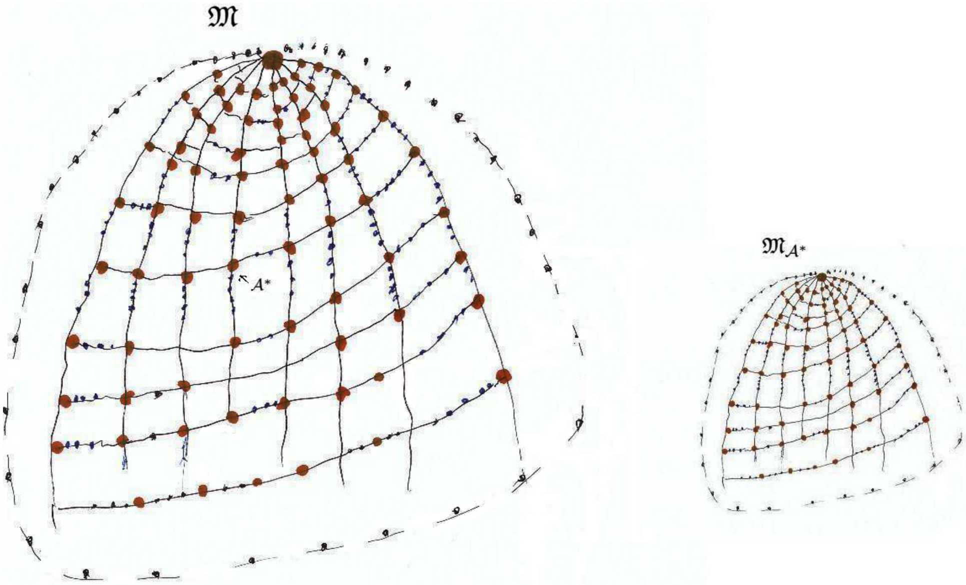

Рис. 5

У 1971 році автор був організатором літньої школи з динамічних систем. Лекції, прочитані в цій школі, були опубліковані у 1972 і 1976 роках (2-е вид.), а пізніше перекладені англійською мовою Amer. Math. Society (В. М. Алексеєв, А. Б. Каток, А. Г. Кушніренко, *Три статті про динамічні системи*, AMS Transl. (2), **116** (1981)).

А вже в 1974 році аспірант автора В. С. Бондарчук захистив дисертацію „Інваріантні множини гладких динамічних систем” [19]. Суттєву частину цієї дисертації було опубліковано в статтях [20, 21].

Стаття [21] містила майже всі твердження з [17] і використовувала ті ж методи доведення, що і в [14] (розділ 4.1). Таким чином, методи доведення основних результатів [17] були фактично опубліковані ще в 1973 році, хоча і в застосуванні вже до дещо інших об'єктів. При цьому В. С. Бондарчук використав також ще один метод, а саме, метод марковських розбиттів і топологічних ланцюгів Маркова, розроблений Я. Г. Сінаєм і відповідним чином модернізований для розширюючих ендоморфізмів В. С. Бондарчуком. У [20] був використаний алгоритм для реконструкції (відновлення) відображення f, застосований у [14] (розділ. 4.2). Динамічна система, породжувана f, має так багато атракторів (тобто, ω-граничних множин), що функція $f(x)$ справді може бути відновлена (поточково!) для кожного x, якщо мати тільки атрактори її траєкторій!

Література

1. S. Ruette, *Chaos on the interval*, Amer. Math.Soc., Ser. Univ. Lect., 67 (2017).
2. А. Н. Шарковский, *О притягивающих и притягивающихся множествах*, Докл. АН СССР, **160**, № 5, 1036 – 1038 (1965) (переклад: Soviet Math. Dokl., **6**, 268 – 270 (1965)).
3. А. Н. Шарковский, *Об одной классификации неподвижных точек*, Укр. мат. журн., **17**, № 5, 80 – 95 (1965) (переклад: Amer. Math. Soc. Transl. (2), **97**, 159 – 179 (1970)).
4. А. Н. Шарковский, *Поведение отображения в окрестности притягивающего множества*, Укр. мат. журн., **18**, № 2, 60 – 83 (1966) (переклад: Amer. Math. Soc. Transl. (2), **97**, 227 – 258 (1970)).
5. T.-Y. Li, J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82**, № 10, 985 – 992 (1975).
6. P. Kloeden, M. Deakin, A. Tirkel, *A precise definition of chaos*, Nature, **264** (1976), p. 295.
7. A. N. Sharkovsky, *Coexistence of the cycles of a continuous map of the line into itself*, Ukr. Math. J., **16**, № 1, 61 – 71 (1964); Intern. J. Bifurcation and Chaos, **5**, № 5, 1263 – 1273 (1995); Reprint of the paper in World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. B, 8, Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Murcia, 1994), 1 – 11 (1995).
8. А. Н. Шарковский, *Строение эндоморфизма на ω-предельном множестве*, Intern. Math. Congress (Moscow, 1966), секц. 6, тез., с. 51.
9. A. N. Shakovsky, *How complicated can be one-dimensional dynamical systems: descriptive estimates of sets*, Dynamical Systems and Ergodic Theory (Warsaw, 1986), Banach Center Publ., **23**, Warsaw, 447 – 453 (1989).
10. А. Г. Сивак, *Дескриптивные оценки для статистически предельных множеств динамических систем,* Динамические системы и турбулентность, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1989), с. 100 – 102.
11. А. Г. Сивак, *О структуре множества траекторий, порождающих инвариантную меру,* Динамические системы и нелинейные явления, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1990), с. 39 – 43.
12. А. Г. Сивак, *σ-Аттракторы траекторий и их бассейны,* Добавление, гл. 7, в [14], с. 281 – 310.
13. A. N. Sharkovsky, A. G. Sivak, *Basins of attractors of trajectories,* J. Difference Equat. and Appl., **22**, № 2, 159 – 163 (2016).
14. А. Н. Шарковский, *Аттракторы траекторий и их бассейны*, Наук. думка, Киев (2013).
15. R. Baire, *Sur la representation des fonctions discontinues*, Acta Math., **30** (1905).
16. Л. В. Келдыш, *Структура B-множеств*, Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, **17** (1945).
17. А. Н. Шарковский, *Частично упорядоченная система притягивающих множеств*, Докл. АН СССР, **170**, № 6, 1276 – 1278 (1966) (переклад: Soviet Math. Dokl., **7**, 1384 – 1386 (1966)).
18. A. M. Blokh, A. M. Bruckner, P. D. Humke, J. Smital, *Space of ω-limit sets of a continuous map of the interval,* Trans. Amer. Math. Soc., **348**, № 4, 1357 – 1372 (1996).
19. В. С. Бондарчук, *Инвариантные множества гладких динамических систем*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Киев (1974).
20. В. С. Бондарчук, А. Н. Шарковский, *Восстанавливаемость расширяющих эндоморфизмов по системе ω-предельных множеств*, Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1973), с. 28 – 34.
21. А. Н. Шарковский, В. С. Бондарчук, *Частично упорядоченная система ω-предельных множеств растягивающих эндоморфизмов*, Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1973), с. 128 – 164.

Одержано 26.03.21